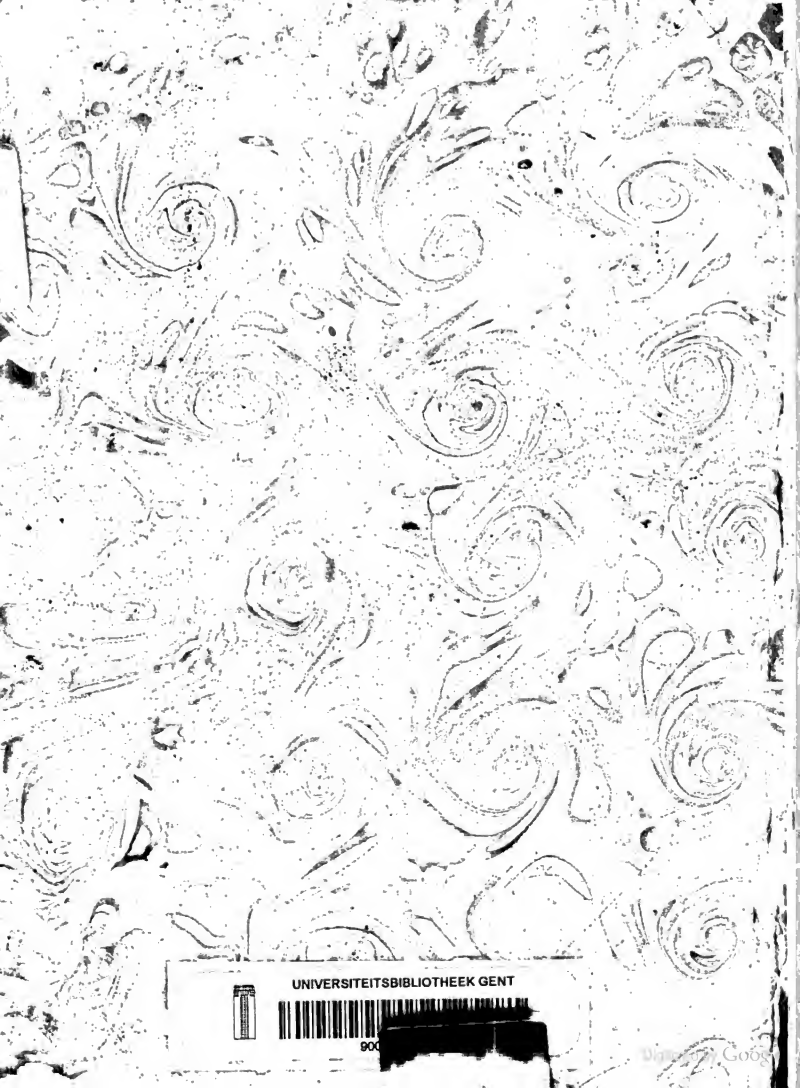
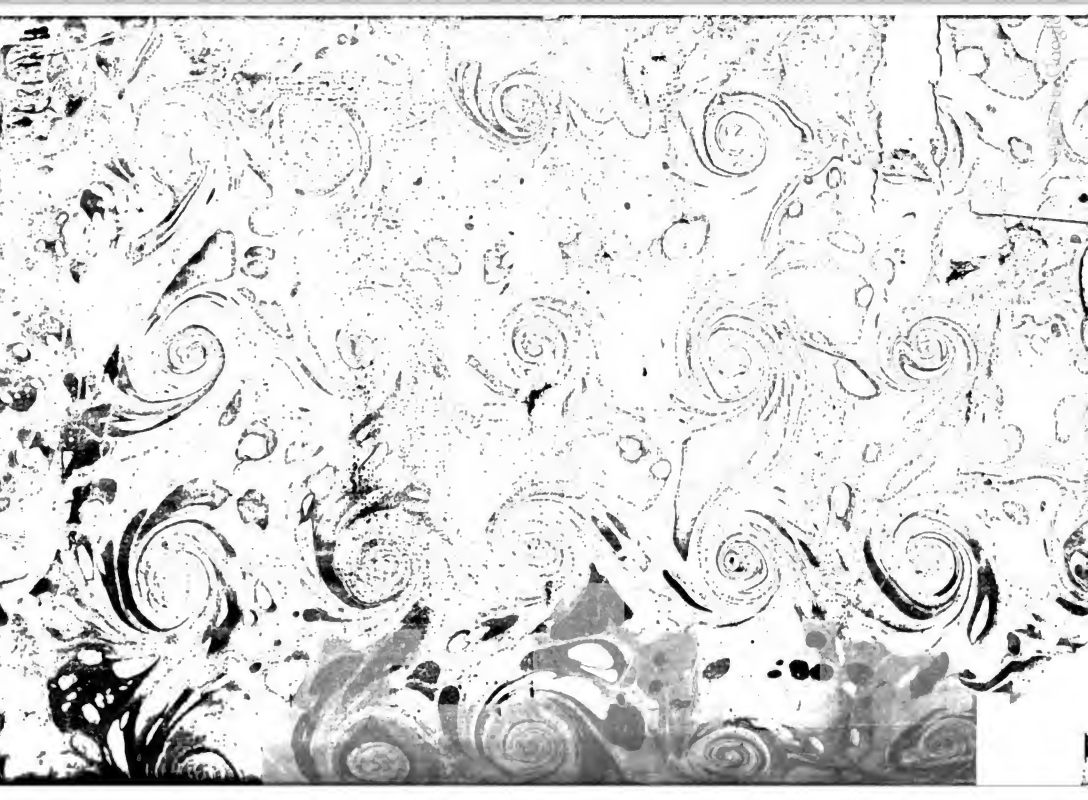
Digitized by Google


UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK GENT



Hist. 1895

Digitized by Google

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE
ROYALE
DES SCIENCES.

Année M. DCCLXXXIV.

Avec les Mémoires de Mathématique & de Physique, pour la même Année,

Tirés des Registres de cette Académie.

A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

M. DCCLXXXVII.

Digitized by Google

Digitized by Google

TABLE
POUR L'HISTOIRE.

Discours prononcé à l'Académie, devant Son Alteſſe Royale le prince Henri de Pruſſe..... Page 1

Expoſé des Expériences qui ont été faites pour l'examen du Magnétiſme animal. Par M.rs Franklin, le Roy, de Bory, Lavoisier & Bailly..... 6

Ouvrages préſentés à l'Académie..... 16

Machine approuvée par l'Académie..... 19

Éloge de M. Macquer..... 20

Éloge de M. Bergman..... 31

Éloge de M. Morand..... 48

Éloge de M. Caſſini de Thury..... 54

Éloge de M. le Comte de Milly..... 64

Digitized by Google

Digitized by Google

TABLE
POUR LES MÉMOIRES.

Sur les Inégalités séculaires des Planètes & des Satellites. Par M. DE LA PLACE..... Page 1

Observations sur des Morts subites occasionnées par la rupture du ventricule gauche du cœur. Par M. PORTAL.... 51

Observation sur la nature & sur le traitement d'une Maladie singulière. Par le même..... 65

Observations de Mercure, faites à l'École Royale-militaire. Par M. D'AGELET..... 74

Mémoire sur le premier Drap de laine superfine du crû de la France. Par M. DAUBENTON..... 76

Addition au Mémoire sur le premier Drap de laine superfine du crû de la France. Par le même..... 81

Mémoire sur l'expression analytique de la génération des Surfaces courbes. Par M. MONGE..... 85

Mémoire sur le Calcul intégral des équations aux différences partielles. Par le même..... 118

Observation sur un grand nombre de Morsures faites à une même personne, par un chien enragé, traitées avec succès. Par M. SABATIER..... 193

Mémoire sur une Plante du Pérou, nouvellement connue en France. Par M. FOUGEROUX DE BONDAROY.. 200

Mémoire sur l'Abricotier de Sibérie. Par le même.... 207

Mémoire sur une nouvelle espèce d'Orme. Par le même. 211

Description d'un Poisson du genre des Silures, appellé Shaid *ou* Shaiden *par les Allemands.* Par le même.... 216

Digitized by Google

Recherches théoriques & expérimentales ſur la force de torſion, & ſur l'élaſticité des fils de métal, &c. Par M. COULOMB. 229

Obſervations ſur les Schorls. Par M. l'Abbé HAÜY.. 270

Mémoire ſur la ſtructure des Criſtaux de feld-ſpath. Par le même..... 273

Mémoire ſur l'effet de l'Air inflammable ſur les corps organiſés. Par M. SAGE..... 287

Expériences qui font connoître la néceſſité d'employer une grande quantité de Plomb pour extraire l'Argent contenu dans des terres. Par le même..... 289

Analyſe d'une Mine de plomb terreuſe, jaunâtre, antimoniale & martiale, &c. Par le même..... 291

Obſervation ſur une ſubſtance ramaſſée de jeunes Peupliers d'Italie. Par M. l'Abbé TESSIER..... 293

Obſervation ſur les ſuites d'une Grêle tombée le 25 Mai 1783, dans un canton de la Beauce. Par le même..... 296

Examen de la dernière révolution de Jupiter, & des élémens actuels de ſon orbite. Par M. DE LA LANDE.... 301

Mémoire contenant les obſervations de la première Comète de 1784, obſervée à Paris, &c. Par M. MESSIER. 313

Obſervation de l'éclipſe de Lune, &c. Par le même.. 328

Vérification des nouvelles découvertes faites en Angleterre, ſur les Étoiles fixes. Par M. CASSINI..... 331

Mémoire ſur un nouveau genre de plante uommé Brucea, *& ſur le faux Breſillet d'Amérique.* Par M. le Chevalier DE LA MARCK..... 342

Recherches ſur le Calcul intégral. Par M. CHARLES.. 348

Mémoire ſur la diſparition de l'Étoile de la conſtellation du Taureau, &c. Par M. LE MONNIER..... 353

Digitized by Google

Observation sur une illusion d'Optique. Par M. DE FOURCROY. 355

Mémoire contenant les observations & la théorie de la première Comète de 1784. Par M. MÉCHAIN..... 358

Observation de l'éclipse de Lune, du 6 Mars 1784. Par le même..... 367

Recherches sur la figure des Planètes. Par M. LE GENDRE. 370

Mémoire sur les moyens d'opérer une entière combustion de l'Huile, &c. Par M. MEUSNIER..... 390

Observation anatomique. Par M. DE FOUCHY..... 399

Renseignemens généraux pour tenir lieu de réponse à une Question adressée à l'Académie, par M. Gaslé de Bonay, &c. Par M. MORAND..... 402

Mémoire sur l'intégration des Équations aux différences partielles. Par M. COUSIN..... 407

Mémoire sur l'île de Frislande. Par M. BUACHE... 430

Suite du Mémoire sur le calcul des Probabilités. Par M. le Marquis DE CONDORCET..... 454

Mémoire sur la grandeur apparente des Corps opaques, vus sur un fond lumineux ou autrement. Par M. LE GENTIL. 469

Mémoire sur le Froid observé à l'Observatoire royal & aux Chartreux, à la fin de 1783. Par le même..... 478

Remarque sur les Vents qui règnent à Paris & dans les environs. Par le même..... 480

Remarques & observations sur l'Astronomie des Indiens, & sur l'ancienneté de cette Astronomie. Par le même.. 482

Supplément où l'on fait voir que les Équations aux différences ordinaires, pour lesquelles les conditions d'intégrabilité ne sont pas satisfaites, sont susceptibles d'une véritable intégration, &c. Par M. MONGE..... 502

Digitized by Google

Suite de l'Eſſai pour connoître la Population du Royaume, &c. Par M.rs DU SÉJOUR, le Marquis DE CONDORCET & DE LA PLACE..... 577.

Mémoire ſur la combinaiſon du Principe oxygine avec l'Eſprit-de-vin, &c. Par M. LAVOISIER..... 593

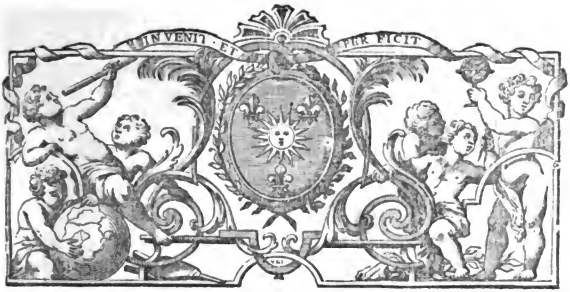
Eſſai de comparaiſon entre les mouvemens des Animaux & ceux des Plantes, &c. Par M. BROUSSONET.... 609

Obſervations ſur la criſtalliſation de l'Huile de Vitriol. Par M. CHAPTAL, de la Société Royale de Montpellier. 622

Extrait des Obſervations aſtronomiques & phyſiques, faites à l'Obſervatoire royal, en l'année 1785. Par M. le Comte DE CASSINI..... 631

HISTOIRE

Digitized by Google



HISTOIRE

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES.

Année M. DCCLXXXIV.

SON ALTESSE ROYALE LE PRINCE HENRI DE PRUSSE, qui voyageoit en France, ſous le nom du *comte d'Oëls*, ayant fait à l'Académie l'honneur d'aſſiſter à ſa ſéance du 4 ſeptembre 1784, le Secrétaire a lû le diſcours ſuivant :

MESSIEURS,

Ce jour glorieux pour nous, ſemble retracer à nos yeux les temps à jamais célèbres où les héros d'Athènes ne dédaignoient pas de venir au retour de leurs victoires,

Digitized by Google

entendre dans les écoles la voix d'Anaxagore & de Socrate, où ces Céſars, ſi grands dans le ſénat, ſi terribles à la tête des légions, dépoſant des lauriers cueillis ſur les bords de l'Euphrate & du Rhin, ſe plaiſoient à diſcuter les principes de la philoſophie avec Apollonius, avec Pline, avec Maxime, ou à rechercher le peu qu'il étoit alors donné aux hommes de connoître ſur les loix de la nature & ſur les phénomènes de l'Univers.

Mais ces temps, qui furent ceux de la gloire & du bonheur des nations gouvernées par ces grands hommes, ne forment dans l'hiſtoire qu'un petit nombre de jours ſereins, qui ont brillé de loin en loin au milieu d'une longue ſuite de ſiècles condamnés à l'erreur & à la misère. Périclès vivoit encore quand les Athéniens chaſsèrent de leur ville Anaxagore, convaincu d'avoir oſé dire, le premier, que le ſoleil étoit un globe de feu, & qu'une Intelligence avoit préſidé à la formation du monde. Bientôt après, dociles à la voix d'un vil farceur, ils condamnèrent Socrate à la mort. Chez les Romains à peine un empereur vertueux a-t-il fermé les yeux, qu'un indigne ſucceſſeur s'empreſſant d'étouffer les dernières lueurs de la raiſon, livre l'empire à la tyrannie de l'ignorance & de la ſuperſtition.

C'eſt qu'alors les lumières étoient le partage de quelques hommes privilégiés, choiſis dans un ſeul peuple. Aujourd'hui, elles ont pénétré dans toutes les claſſes de la ſociété, elles ſe ſont répandues chez toutes les nations. Chaque peuple expoſé à la cenſure de tous les autres, & contenu par l'opinion commune de l'Europe, ne peut plus ni ſe livrer à ces excès honteux, ni éteindre un flambeau que ſes voiſins auroient bientôt ralumé. Nous ne reverrons plus ces jours où Gerbert & Roger Bacon étoient regardés comme des magiciens, parce qu'ils avoient entrevu quelques demi-vérités; où Galilée couvert de gloire & d'années, condamné par des moines à une priſon perpétuelle, étoit contraint d'abjurer les vérités qu'il avoit

Digitized by Google

découvertes; où l'indigence obligeoit Képler à faire des horoſcopes; où Deſcartes achetant par un exil volontaire le droit d'inſtruire les hommes, trouvoit encore des Voëtius, même dans le pays de la liberté; où le ſpectacle des maux cauſés par l'intolérance, forçoit Huyghens & Roëmer à fuir de la patrie qu'ils avoient adoptée.

Aujourd'hui les lettres, les ſciences & la philoſophie, long-temps ſéparées, quelquefois ennemies, ont acquis en ſe réuniſſant un empire ſur l'opinion des hommes, que rien ne peut plus leur enlever. Loin de croire, comme autrefois, que les préjugés peuvent être utiles, ſinon aux peuples, du moins à ceux qui les gouvernent, on ſait maintenant qu'il n'eſt aucun préjugé qui ne puiſſe devenir une ſource de malheurs pour les citoyens, une cauſe de révolutions ou d'affoibliſſement pour les états; on ſait que ſi les hommes éclairés ſont les ſeuls qui ſoient dignes de donner des loix à leurs ſemblables, les hommes inſtruits ſont auſſi les ſeuls qui ſachent obéir aux loix.

On commence à ſavoir que le plus dangereux & peut-être le ſeul ennemi du genre humain, c'eſt l'erreur; qu'elle produit également & ces paſſions qui troublent l'ordre du monde, & la foibleſſe qui rend ces paſſions dangereuſes; que c'eſt elle qui inſpire à ceux qui commandent des loix contraires à leurs intérêts comme à l'intérêt général, tandis qu'en ſéduiſant les eſprits de la multitude, elle oppoſe à tout changement utile une barrière trop ſouvent inſurmontable.

Les ſciences ont acquis une ſi grande étendue, leurs applications ſe ſont tellement multipliées, la philoſophie a ſu connoître ſi bien la véritable méthode de chercher la vérité, que tous ceux qui s'occupent du bonheur des hommes, de la grandeur & de la proſpérité des empires, ou trouvent à chaque pas l'occaſion de faire un uſage utile des vérités qu'on doit à la philoſophie & aux ſciences; ou ſont arrêtés au milieu de leurs travaux par des queſtions qu'elles ſeules peuvent réſoudre. L'art de la guerre, cet art

où le succès paroît dépendre de l'activité & du coup-d'œil plutôt que des connoissances acquises, où les héros semblent devoir tout à eux seuls & rien à ce qu'on a pu leur enseigner; cet art éprouve lui-même, dans presque toutes ses parties, le besoin de ces sciences paisibles, fondées sur l'expérience ou sur le calcul, & ses progrès qui ont suivi ceux des connoissances humaines en ont fait enfin de nos jours une véritable science. Aussi les plus grands maîtres de cet art, se sont-ils montrés dans ce siècle les plus dignes protecteurs de la philosophie & des lettres, & si cette protection n'avoit pas été une suite nécessaire de l'étendue de leur esprit & de l'élévation de leur caractère, l'intérêt de leur gloire leur eût inspiré la même conduite; car les siècles éclairés peuvent seuls assigner la place qu'ils méritent, & sentir la différence du conquérant qui ne doit ses victoires qu'à la terreur qu'inspire sa férocité, & du héros dont le génie maîtrise les événemens & fait encore diminuer les maux de la guerre.

Mais si ceux qui ont intérêt de craindre le progrès des lumières, n'osent plus supposer qu'elles sont dangereuses, ils ont essayé de rendre du moins odieux les hommes qui cherchent à les répandre. Désespérant d'être désormais assez forts avec le secours de l'ignorance, ils ont voulu soulever les passions en leur faveur; & pour y réussir, ils ont imaginé d'accuser les philosophes, les savans, les gens de lettres, de méconnoître les distinctions établies dans la société & de reserver uniquement leurs hommages aux talens & aux vertus. Ils espéroient avoir trouvé dans cette accusation un secret sûr de susciter aux lumières utiles, des ennemis puissans, implacables & surtout très-nombreux; car la vanité persuade aisément à des particuliers très-obscurs, qu'ils sont aussi dans une de ces classes qui auroient trop à perdre si on vouloit n'estimer dans chaque individu que son mérite réel. Mais en supposant même cette inculpation aussi fondée qu'elle l'est peu, du moins elle ne rendroit pas ceux contre qui elle est dirigée bien coupables, aux yeux des hommes dont

Digitized by Google

ils doivent ambitionner le plus les bontés & l'eſtime. Suppoſons, en effet, qu'ils oublient qu'un héros eſt ſorti du ſang de Charlemagne ou de Witikind, & que le rang auguſte qu'il occupe ne leur en impoſe point; la juſtice qu'ils rendront à ſes qualités perſonnelles n'en devient-elle pas plus digne de lui? En ſauront-ils moins admirer la réunion ſi rare d'une activité qui ne laiſſe, ni perdre un inſtant, ni échapper une occaſion, & d'une ſageſſe conſommée, qui dans la conduite d'une guerre entière n'offre pas même l'apparence de la plus légère faute, aux yeux des juges les plus éclairés & les plus ſévères? Verront-ils avec moins d'étonnement le même génie qui combine avec force pendant la guerre les plans les plus vaſtes, veiller pendant la paix ſur les plus petits détails qui ſervent à former les inſtrumens de ſes victoires? Seront-ils moins touchés de cette humanité toujours agiſſante, toujours occupée d'adoucir ces malheurs, ſuite trop inévitable de la guerre, & qui dans toute une campagne au milieu des mouvemens les plus importans & dans les poſitions les plus critiques, n'oublie pas un ſeul inſtant qu'il exiſte dans une ville conquiſe, un citoyen que l'amitié a confié à ſes ſoins. N'applaudiront-ils pas à un prince ami de la vérité, prompt à ſe rendre l'appui de ceux qui ſouffrent pour elle; regardant les hommes célèbres dans les lettres & dans les ſciences comme les objets les plus dignes de ſa curioſité; chériſſant la mémoire de ceux qui ne ſont plus, & cherchant avec empreſſement ce qui reſte d'eux dans les lieux honorés par leur génie? Cette ſimplicité de mœurs, ſi eſtimable, même dans un citoyen obſcur, ne devient-elle pas la preuve la plus certaine d'un grand caractère, lorſqu'elle ſe joint à tant de titres & ſur-tout à tant de gloire? Enfin le ſtoïciſme le plus exagéré, à quelque degré qu'il puiſſe porter l'oubli des diſtinctions ſociales, pourra-t-il s'empêcher de reſpecter, dans un héros, le frère & l'ami d'un grand homme?

Mais je ſens, Meſſieurs, combien mon foible organe eſt

au-deſſous de vos ſentimens, & combien je dois vous faire regretter la perte d'un ſavant illuſtre, en qui l'Académie auroit trouvé aujourd'hui un digne interprète. Comblé des bontés du Prince qui nous fait l'honneur d'aſſiſter à cette ſéance, honoré de ſa familiarité, il lui eût fait entendre les accens d'une voix qui lui étoit connue : ſans doute il a manqué au bonheur de M. d'Alembert de n'avoir pas aſſez vécu pour recevoir, dans cette Académie, le frère de ſon premier bienfaiteur, & nous oſons croire qu'il manque auſſi quelque choſe à la ſatisfaction du Prince, lorſque ſes yeux cherchent en vain le philoſophe qu'il avoit jugé digne de ſon amitié, & dont il ne reſte plus parmi nous que le ſouvenir de ſes vertus & les monumens de ſon génie.

M. LAVOISIER a lû enſuite un Mémoire ſur la combuſtion de l'eſprit-de-vin, dans lequel il prouve qu'une livre de cette liqueur produit, en brûlant, dix-neuf onces d'eau.

M. TENON, un Mémoire ſur l'œuf humain.

M. l'ABBÉ ROCHON, un Mémoire ſur la manière de meſurer les hauteurs ſolſticiales, en employant une lunette de criſtal d'Iſlande.

M. COULOMB, un Mémoire ſur la manière d'employer la torſion des fils, à la meſure des forces très-petites.

M. BAILLY a terminé la ſéance par la lecture du Mémoire ſuivant.

EXPOSÉ des Expériences qui ont été faites pour l'examen du Magnétiſme animal.

Lû par M. BAILLY, en ſon nom & au nom de M.rs FRANKLIN, LE ROY, DE BORY & LAVOISIER.

MESSIEURS,

VOUS ſavez que des commiſſaires ont été choiſis par le Roi dans la Faculté de Médecine & dans cette Académie

pour examiner le Magnétiſme animal, & pour donner leur avis ſur ſon exiſtence & ſur ſon utilité. Nous en avons rendu compte au Roi & devant le public. Sa Majeſté a été ſatisfaite de notre travail, le public & l'Europe vont le juger.

Mais les Académiciens doivent à l'Académie & à leurs confrères un récit détaillé de leur conduite. Cet écrit eſt deſtiné à mettre ſous vos yeux les vues qui ont dirigé nos recherches, & les réſultats que nos travaux ont produits.

Quand je dis nous, Meſſieurs, j'entends la commiſſion entière; rien n'a été diſtingué, le travail appartient à tous: également guidés par les intérêts de la vérité, nous avons été toujours unis, toujours unanimes. Le compte qui va vous être rendu ici eſt un hommage particulier de vos confrères, mais il ne renferme rien qui ne ſoit le réſultat du travail commun des membres des deux compagnies.

Il y a déjà plus de ſix ans que le Magnétiſme animal a été annoncé à l'Europe, ſur-tout en France & dans cette capitale; mais ce n'eſt que depuis deux ans environ qu'il a intéreſſé particulièrement un aſſez grand nombre de citoyens, & qu'il eſt devenu l'objet de l'entretien public. Jamais une queſtion plus extraordinaire n'avoit partagé les eſprits dans une nation éclairée. On propoſoit un moyen ſûr & puiſſant d'agir ſur les corps animés, un remède nouveau, un agent univerſel pour guérir & prévenir les maladies. Cet art étoit un myſtère; les phyſiciens en ignoroient les procédés, & ils n'entendoient parler que de ſes prodiges. On citoit peu de cures réelles, mais beaucoup de perſonnes ſe diſoient ſoulagées, & le remède plaiſoit aſſez pour ſoutenir l'eſpérance des malades. Depuis quelque temps le ſecret a été communiqué. Alors on a vu des perſonnes inſtruites, éclairées, diſtinguées même par leurs talens, adopter la théorie & la pratique nouvelle qu'on leur enſeignoit; on a vu un nombre de médecins & de chirurgiens admis à l'école du Magnétiſme, en devenir les partiſans, en défendre la théorie, en ſuivre la pratique. Ces témoignages rendus au Magné-

Digitized by Google

tiſme devoient donner à penſer aux meilleurs eſprits, & faire ſuſpendre le jugement des ſavans. C'eſt dans ces circonſtances que les commiſſaires ont été nommés par le Roi; l'examen qu'il a ordonné eſt un fruit de la ſageſſe de ſon adminiſtration. C'étoit un ſcandale pour l'Europe de voir un peuple éclairé par toutes les ſciences & par tous les arts, un peuple chez qui la philoſophie a fait les plus grands progrès, oublier la leçon de Deſcartes qui en eſt le reſtaurateur, & renfermer dans ſon ſein deux partis oppoſés, qui uniſſoient leurs vues & leurs penſées ſur le même objet, mais qui ſe diviſoient & ſe combattoient; l'un en annonçant le Magnétiſme comme une découverte utile & ſublime, l'autre en le regardant comme une illuſion à la fois dangereuſe & ridicule. La déciſion étoit importante & indiſpenſable; il falloit éclairer ceux qui doutoient, il falloit établir une baſe ſur laquelle puſſent venir ſe repoſer ou l'incrédulité ou la confiance. On ne doit pas être indifférent ſur le règne mal fondé des fauſſes opinions : les ſciences qui s'accroiſſent par les vérités, gagnent encore à la ſuppreſſion d'une erreur; une erreur eſt toujours un mauvais levain qui fermente & qui corrompt à la longue la maſſe où elle eſt introduite. Mais lorſque cette erreur ſort de l'empire des ſciences pour ſe répandre dans la multitude, pour partager & agiter les eſprits, lorſqu'elle préſente un moyen trompeur de guérir à des malades qu'elle empêche de chercher d'autres ſecours, lorſque ſur-tout elle influe à la fois ſur le moral & le phyſique, un bon gouvernement eſt intéreſſé à la détruire. C'eſt un bel emploi de l'autorité que celui de diſtribuer la lumière ! Les commiſſaires ſe ſont empreſſés d'entrer dans les vues de l'Adminiſtration & de répondre à l'honneur de ſon choix.

Tranſportés au traitement public du Magnétiſme, ils ont d'abord été frappés d'une oppoſition très-remarquable entre la nature des effets produits & l'inſuffiſance apparente des moyens employés. D'une part, ce ſont des convulſions violentes, longues & multipliées; de l'autre, de ſimples attouchemens,

attouchemens, des geſtes & des ſignes : & cependant le traitement public fait reconnoître une grande puiſſance miſe en action par ces moyens, tout foibles qu'ils ſont. Un pareil ſpectacle ſemble nous tranſporter au temps & au règne de la féerie : cet empire exercé ſur un nombre d'individus, l'homme qui en diſpoſe, la baguette qui lui ſert d'inſtrument, tout reſſemble en effet aux enchantemens de nos fables ; ce ſont leurs récits mis en action. Mais ſi ce ſpectacle étonne, il ne doit pas ſubjuguer. S'il a pu ſurprendre la foi d'un nombre de ſpectateurs conduits par une curioſité plus ou moins attentive, s'il a ſéduit ſur-tout les malades toujours prêts à ſe tromper eux-mêmes, il n'a pu produire cet effet ſur des hommes choiſis pour un examen ſérieux. Leur premier devoir étoit d'être en garde contre l'illuſion ; ils ſe ſont mutuellement ſurveillés, ils ont obſervé en ſilence ; & reſtés de ſang-froid au milieu de l'enthouſiaſme, ils ont pu écouter leur raiſon & chercher la lumière.

Nous avons d'abord demandé par quels reſſorts étoient produits tant d'effets ſurprenans, & quelles étoient les raiſons qui les faiſoient attribuer à un fluide inconnu & nouveau, à un fluide qui appartient à l'homme & qui agit ſur l'homme. Plus cette découverte étoit grande & extraordinaire, plus on devoit être difficile ſur le choix des preuves. Enſuite, procédant en phyſiciens, nous avons cherché à reconnoître la préſence du fluide ; mais ce fluide échappe à tous les ſens. On nous a déclaré que ſon action ſur les corps animés étoit la ſeule preuve que l'on pût adminiſtrer de ſon exiſtence. Vous avez vu, Meſſieurs, dans notre rapport, les raiſons ſolides, qui parmi les effets prétendus de cette action, nous ont fait rejeter abſolument la cure des maladies. La nature agit en même-temps que le remède ; on ne ſait ſi le ſoulagement appartient au remède ou à la nature : la nature guérit quelquefois ſans remède ; comment ſe convaincre de l'exiſtence d'un remède inviſible, par des guériſons que la nature peut opérer ſans lui ? Nous avons donc été forcés de nous borner à obſerver l'action phyſique

du fluide opérant sur l'économie animale, des changemens momentanés; mais alors, Messieurs, nous sommes entrés dans un dédale de difficultés. Si les premières causes de la nature sont simples, les derniers résultats sont le produit d'une vaste complication. L'homme ne fait pas un mouvement qui ne puisse être dû à une infinité de causes; être moral & physique, ses affections, ses maux, ses mouvemens dépendent autant de sa pensée que de l'irritabilité de ses organes. Les expériences que nous avons faites sur nous-mêmes, nous ont fait reconnoître que lorsqu'on détourne son attention, il n'y a plus aucun effet. Les épreuves faites sur les malades nous ont appris que l'enfance, qui n'est pas susceptible de prévention, n'éprouve rien, que l'aliénation d'esprit s'oppose à l'action du Magnétisme, même dans un état habituel de convulsions & de mobilité de nerfs où cette action devroit être le plus sensible. Dans un nombre de malades, si les uns ressentent des effets légers & équivoques, les autres ne sentent rien, & nous avons dû en être surpris. Le Magnétisme n'est-il pas annoncé comme un fluide universel, comme le principe de la vie, & le grand ressort de la nature? Qu'est-ce qu'un agent qui n'agit pas toujours dans des circonstances semblables? L'absence de son action dans certains cas, n'indique-t-elle pas que dans les autres l'action qu'on lui attribue appartient à d'autres causes? Il a manqué son effet quand nous l'avons employé pour porter de la chaleur aux pieds; il a manqué son effet quand nous l'avons interrogé comme capable d'indiquer les maux. On a essayé différentes méthodes de magnétiser, en observant, en négligeant la distinction des pôles; elles ont eu les mêmes effets. Les pôles sont donc une chimère qui n'a d'autre objet que d'assimiler le nouveau Magnétisme au véritable Magnétisme qui est un des phénomènes de la nature. C'est ainsi, qu'en avançant dans notre examen, nous voyions disparoître l'une après l'autre les propriétés attribuées à ce prétendu fluide, & que l'édifice entier posé sur une base idéale s'écrouloit devant nous.

Digitized by Google

Forcés de renoncer aux preuves phyſiques, nous avons été obligés de chercher les cauſes des effets réels dans les circonſtances morales. Nous avons, dans la ſuite de nos opérations, ceſſé d'être phyſiciens pour n'être plus que philoſophes; & nous avons ſoumis à l'examen les affections de l'eſprit & les idées des individus expoſés à l'action du Magnétiſme. Alors, en opérant ſur des ſujets qui avoient les yeux bandés, nous avons vu d'une manière évidente, cette action naître des idées que nous excitions, & les effets ſuivre la même marche que nos queſtions. En ne magnétiſant pas, les effets étoient les mêmes, & répondoient de même à nos queſtions.

A ces effets variés & indépendans du Magnétiſme, nous avons dû reconnoître l'influence de l'imagination; mais dans l'examen moral où nous conduiſoit la nature de la queſtion, nous avons ſuivi, autant qu'il a été poſſible, la marche certaine & méthodique des ſciences: obſervant en philoſophes, nous avons encore emprunté les procédés de la phyſique. Nous avons opéré, comme on fait en chimie, où, après avoir décompoſé les ſubſtances, découvert leurs principes, on s'aſſure de l'exactitude de l'analyſe, en recompoſant les mêmes ſubſtances à l'aide de ces principes réunis. Nous avons dit: les effets qu'on attribue au Magnétiſme, & à un fluide que rien ne manifeſte, n'ont lieu que lorſque l'imagination eſt avertie & peut être frappée; l'imagination ſemble donc en être le principe. Il faut voir ſi on reproduira ces effets par le pouvoir de l'imagination ſeule; nous l'avons tenté, & nous avons pleinement réuſſi. Sans toucher & ſans employer aucun ſigne, les ſujets qui ont cru être magnétiſés ont ſenti de la douleur, de la chaleur & une chaleur très-grande. Sur des ſujets doués de nerfs plus mobiles, nous avons produit des convulſions & ce qu'on appelle des *criſes*. Nous avons vu l'imagination aſſez exaltée, devenue aſſez puiſſante pour faire perdre en un inſtant la parole. Nous avons en même-temps prouvé la nullité du Magnétiſme, en le mettant en

opposition avec l'imagination. Le Magnétisme seul, employé pendant trente minutes, n'a rien produit; & aussi-tôt l'imagination mise en action a produit sur la même personne, avec les mêmes moyens, dans des circonstances absolument semblables, une convulsion très-forte & très-bien caractérisée. Enfin, pour compléter la démonstration, pour achever le tableau des effets de l'imagination, également capable d'agiter & de calmer, nous avons fait cesser la convulsion par le même charme qui l'avoit produite, par le pouvoir de l'imagination.

Si nous n'avons pas fait d'expériences sur les animaux que l'on regarde comme privés de l'imagination, c'est que les expériences auroient été plus difficiles & plus délicates, sans être plus concluantes. D'abord, la cure des maladies des animaux ne prouve pas davantage que la cure des maladies des hommes; & quand nous nous bornerons à agir sur les animaux momentanément, comment connoîtrons-nous ce qu'ils éprouvent? Ne pouvant les interroger, leurs mouvemens ne peuvent être qu'équivoques. D'ailleurs, une grande raison pour rejeter cette espèce de preuves, est qu'on annonce un fluide universel, un fluide agissant sur l'homme, & propre à guérir ses maux. Il seroit singulier qu'on en vantât les bons effets sur l'espèce humaine, & qu'on ne pût les rendre sensibles que sur l'espèce animale: c'est donc sur l'homme que nous avons dû éprouver le Magnétisme, & nos expériences ne nous ont fait découvrir que le pouvoir de l'imagination. Nous avons procédé par des preuves négatives, & cette marche étoit déterminée par la nature des choses. Une opinion est attaquée & défendue par des moyens contraires: un agent réel doit être démontré par des preuves positives, tandis qu'un agent chimérique ne peut être exclu que par le manque d'effets & par la démonstration de sa nullité.

La suite d'expériences que nous avons faites nous a donc permis de conclure & d'établir que rien ne prouve l'existence du fluide magnétique animal. La saine physique ne

Digitized by Google

permet pas de recourir à un fluide inconnu & insensible, pour expliquer des effets qui peuvent tous être produits par l'imagination, ou seule, ou combinée avec l'attouchement & l'imitation.

Telles sont les causes des effets attribués au Magnétisme, tel est le résultat de notre travail; mais les phénomènes observés permettent encore quelques résultats que nous allons proposer. Ces résultats concernent l'imitation & l'imagination, deux de nos plus étonnantes facultés : ce sont des faits pour une science encore neuve, celle de l'influence du moral sur le physique; & nous demandons qu'il nous soit permis d'entrer à cet égard dans quelques détails préliminaires & purement philosophiques.

L'homme moral, comme l'homme physique, n'existe & ne devient tel qu'il est que par ces deux facultés : il se forme, il se perfectionne par l'imitation; il agit, il devient puissant par l'imagination. L'imitation est donc le premier moyen de sa perfectibilité; elle le modifie depuis la naissance jusqu'à la mort. Sans l'imitation, les progrès d'un individu seroient perdus pour tous les autres : c'est par elle que dans la société polie & habituelle les caractères s'effacent, & que tous les individus ont la même physionomie; c'est par elle que les enfans apprennent nos usages, nos conventions, se plient à nos habitudes, s'instruisent de la langue. La prononciation adoucie par un long usage, est un effet de la même cause. Cette imitation agit également sur les esprits; elle n'introduit pas les vérités nouvelles, mais elle conserve les idées reçues; elle forme & constitue l'esprit national; & comme le plus souvent elle fait croire sans examen, c'est sur son pouvoir irrésistible que sont fondés les préjugés qui ont une durée si longue & une résistance si puissante.

Avec cette faculté, tout resteroit au même terme, tout seroit communiqué; mais le niveau des connoissances & des institutions ne s'éleveroit jamais. L'imagination est la faculté progressive; c'est par elle que les hommes ont par-

Digitized by Google

couru les différens états de la société perfectionnée : faculté éminemment active, auteur des biens & des maux, tout eſt devant elle, l'avenir comme le préſent, les mondes de l'univers comme le point où nous ſommes. Elle agrandit tout ce qu'elle touche, elle va ſans ceſſe exagérant, & cette exagération fait ſa force. C'eſt par cette force qu'elle déploie les reſſources morales & qu'elle multiplie les forces phyſiques : à ſa voix la nature obéit & ſe développe toute entière. Auſſi quand l'imagination parle à la multitude, la multitude ne connoît plus de dangers ni d'obſtacles; un ſeul homme commande, & les autres ne ſont que des inſtrumens. Les nations ſont ce que veulent les ſouverains, les armées ce que ſont leurs généraux ; & c'eſt une vérité connue depuis Alexandre juſqu'à FRÉDÉRIC & SON ILLUSTRE FRÈRE.

L'imitation, telle que nous venons de la peindre, Meſſieurs, ſemble avoir une marche lente & graduée, elle ne s'établit que par des leçons répétées ; mais ſi dans la ſociété elle a des progrès inſenſibles, dans le traitement du Magnétiſme elle ſe manifeſte par des phénomènes frappans. Les criſes y ſont d'autant plus multipliées qu'elles ſont plus violentes ; elles commencent toutes à-peu-près dans le même-temps, il ſemble que ce ſoit une étincelle qui allume un incendie. Cette facilité de communication eſt très-remarquable. Nous ſavions que l'homme, machinal dans un grand nombre de ſes mouvemens, ſe plie à la longue à répéter ce qu'il voit & ce qu'il entend; mais les convulſions du Magnétiſme nous montrent que le même effet a lieu inſtantanément, en grand, & de manière qu'un nombre d'individus convenablement diſpoſés, ſont des inſtrumens montés à l'uniſſon, & dont un ſeul fait mouvoir tous les autres.

Quant à l'imagination, on connoît les dérangemens qu'une impreſſion vive & ſubite a ſouvent occaſionnés dans la machine de l'homme. L'imagination renouvelle ou ſuſpend les fonctions animales ; elle ranime par l'eſpérance,

Digitized by Google

ou elle glace par la terreur. Dans une nuit elle fait blanchir les cheveux, dans un inſtant elle rend ou l'uſage des jambes ou la parole; elle détruit ou elle développe le germe des maux, elle donne même la mort. Mais ces effets ſurprenans appartiennent à des révolutions inopinées; c'eſt le concours des circonſtances qui les amène, & le haſard qui ſemble les produire; ils ne paroiſſent point dépendre de la puiſſance & de la volonté de l'homme. Ce que nous avons appris, ou du moins ce qui nous a été confirmé d'une manière démonſtrative & évidente, par l'examen des procédés du Magnétiſme, c'eſt que l'homme peut agir ſur l'homme, à tous momens & preſque à ſa volonté, en frappant ſon imagination; c'eſt que les geſtes & les ſignes les plus ſimples peuvent avoir les plus puiſſans effets; c'eſt que l'action que l'homme a ſur l'imagination peut être réduite en art, & conduite par une méthode, ſur des ſujets qui ont la foi. On parle du Magnétiſme d'intention, ſans doute l'intention peut ſuffire, pourvu qu'elle ſoit réciproque; elle établit entre deux individus une relation & une dépendance néceſſaires. L'intention que je dirige, c'eſt mon imagination qui commande; l'intention qui me répond, c'eſt l'imagination qui s'exalte & qui obéit. La recherche d'un agent qui n'exiſte pas, ſert donc à faire connoître une puiſſance réelle de l'homme. L'homme a le pouvoir d'agir ſur ſon ſemblable, d'ébranler le ſyſtème de ſes nerfs, & de lui imprimer des convulſions; mais cette action ne peut être regardée comme phyſique: nous ne voyons pas qu'elle dépende d'un fluide communiqué; elle eſt entièrement morale, c'eſt celle de l'imagination ſur l'imagination. Action preſque toujours dangereuſe, que l'on peut obſerver en philoſophe, & qu'il n'eſt bon de connoître que pour en prévenir les effets.

Le Magnétiſme n'aura pas été tout-à-fait inutile à la philoſophie qui le condamne; c'eſt un fait de plus à conſigner dans l'hiſtoire des erreurs de l'eſprit humain, & une grande expérience ſur le pouvoir de l'imagination.

Digitized by Google

OUVRAGES
PRÉSENTÉS À L'ACADÉMIE.

PRIX.

L'ACADÉMIE avoit propoſé, pour ſujet d'un Prix qui devoit être donné en 1782, la queſtion ſuivante:

1.° Déterminer par des caractères conſtans, faciles à ſaiſir même par ceux qui n'ont pas fait une étude particulière de la botanique, les différences qui exiſtent entre les divers cotonniers d'Aſie, d'Afrique, & d'Amérique.

2.° Indiquer l'état naturel du coton dans ſa coque après la maturité, ſon adhérence à la graine, la manière dont ſes brins enveloppent les graines, afin d'en déduire le meilleur procédé pour les en ſéparer dans leur plus grande longueur.

3.° Établir, d'après des épreuves ſuffiſantes, les rapports des degrés de fineſſe, de blancheur, de longueur & de ténacité qui ſont propres aux brins de chaque eſpèce de cotonnier, ainſi que le rapport de ces qualités avec la perfection des filatures.

Ce Prix a été remis en 1784, & décerné à une pièce ayant pour deviſe, *Deus bone*, dont l'auteur eſt M. Quatremère.

LES

Digitized by Google

Les Mémoires approuvés par l'Académie, deſtinés pour le volume des Savans-Étrangers, ſont au nombre de vingt-cinq.

Eſſai ſur la conſtruction des tables de logarithmes : par M. Callet.

Mémoire ſur pluſieurs pièces de canon, forgées en Eſpagne : par M. de Norbek, depuis correſpondant de l'Académie.

Sur la fonte des minéraux de plomb.

Sur la fonte des ſcories provenant de celle des minéraux de plomb, où l'on détaille la manière de retirer l'argent & l'or des cendres des Monnoies & des Orfévres.

Obſervations ſur le traitement des minérais de fer à la fonte.

Ces trois Mémoires ſont de M. Duhamel, depuis membre de l'Académie.

Sur les difficultés que préſente la préparation des alkalis fixes cauſtiques ſecs, & ſur les propriétés peu connues de ces ſels bien purs.

Sur la néceſſité d'employer l'alkali volatil, en état de gaz, dans les expériences délicates de la chimie; & ſur quelques propriétés nouvelles du gaz alkalin.

Sur la décoloration du bleu de Pruſſe, par la chaux, la magnéſie, &c.

Obſervation ſur la diſſolution lente du régule d'antimoine, par l'acide marin.

Obſervation ſur un précipité roſe mercuriel, produit par le lait, la lymphe, &c.

Remarques ſur la différence du foie d'arſenic & du ſel neutre arſenical, & ſur la cauſe de cette différence.

Digitized by Google

Mémoire ſur les propriétés du ſel neutre, réſultant de la combinaiſon de l'acide crayeux avec le fer.

Deſcription d'un feld-ſpath criſtalliſé, que l'on trouve mêlé avec le criſtal de roche & le mica dans les environs d'Alençon.

Obſervations ſur une ſingulière criſtalliſation du ſel neutre arſenical; avec quelques remarques ſur la nature de ce ſel.

Mémoire ſur les phénomènes que préſente l'alkali fixe végétal cauſtique, trituré à froid avec le ſoufre & quelques préparations antimoniales.

Recherches chimiques ſur le kermès minéral.

Ces onze Mémoires ſont de M. de Fourcroy, depuis membre de l'Academie.

Réſultat d'une expérience faite ſur la réſiſtance d'un maſſif de bois de chêne imbibé d'eau, contre les progrès de l'inflammation excitée par les matières incendiaires, &c: par M. Darçon.

Obſervations aſtronomiques faites à Bagdad: par M. de Beauchamp, vicaire général de Babylone, depuis correſpondant de l'Académie.

Mémoire ſur la manière d'échauffer les maiſons des pays-froids, &c: par M. le Maréchal-Duc de Croy.

Sur la montagne des Chalanches près d'Allemont en Dauphiné: par M. Schreiber, directeur des Mines de Monſieur.

Sur les ſemences des champignons: par M. de Beauvois, correſpondant de l'Académie.

Sur les nombres: par M. l'Abbé Genti, depuis correſpondant de l'Académie.

Obſervation ſur les plantes de mer: par M. Vaſtel.

Digitized by Google

Mémoires & obſervations ſur quelques procédés peu connus, mais utilement employés à des conſtructions maritimes d'exécution difficile : par M. de Fourcroy, maréchal-de-camp, depuis membre de l'Académie.

Sur le tartre contenu dans le verjus & dans le mouſt, &c : par M. le Marquis de Bullion.

MACHINE approuvée par l'Académie.

INSTRUMENT propre à tracer toutes ſortes de lignes parallèles : par M. Milon, conſeiller au Châtelet.

ÉLOGE

DE M. MACQUER.

PIERRE-JOSEPH MACQUER, docteur-régent de la Faculté de médecine de Paris, professeur de chimie au Jardin du Roi, pensionnaire de l'Académie des Sciences, membre de la Société de médecine, de l'Académie de médecine de Madrid, & des Académies de Stockolm, de Turin & de Philadelphie, naquit à Paris le 9 Octobre 1718, de Joseph Macquer & de Marie-Anne Caillet. Il tiroit son origine d'une famille noble d'Écosse, qui avoit sacrifié ses biens & sa patrie à son attachement pour la religion romaine & pour la maison de ses anciens Rois.

Les parens de M. Macquer exigeoient qu'il prît un état, & il choisit celui de médecin, qui contrarioit moins qu'aucun autre son goût naissant pour les sciences physiques. La chimie fut le principal objet de ses travaux, & il fut reçu à l'Académie en 1745, à l'âge de vingt-sept ans. Depuis cette époque, des recherches sur la chimie, des ouvrages élémentaires sur cette science, & des travaux sur les arts qui en dépendent, ont rempli toute l'étendue de sa vie.

Les phénomènes singuliers que présentoit l'arsenic avoient attiré l'attention des chimistes dans le temps où presque tous avoient conservé au moins un penchant secret pour les idées chimériques des adeptes. On connoissoit la propriété qu'a cette substance de décomposer le nitre & d'en séparer l'acide, qui, dans cette opération, acquiert une belle couleur bleue; mais personne encore n'avoit songé à examiner

Digitized by Google

le réſidu de la diſtillation. M. Macquer l'eſſaya le premier, & il trouva un ſel criſtalliſable, diſſoluble dans l'eau, ayant toutes les propriétés d'un ſel neutre, & formé par la combinaiſon de la baſe du nitre, avec un acide particulier, qui tire ſon origine de l'arſenic.

Les deux autres alkalis & la chaux peuvent ſervir de baſe à un ſel ſemblable; & c'eſt ici le premier exemple connu en chimie, de ces acides propres à certaines ſubſtances, & qu'on en retire par la diſtillation avec l'acide nitreux, ſoit que ces acides y exiſtent tout formés, ſoit qu'ils doivent quelques-unes de leurs parties conſtituantes à la décompoſition qu'éprouve alors l'acide qu'on a employé.

M. Macquer donna, peu de temps après, la première analyſe exacte du bleu de Pruſſe. Cette matière colorante n'eſt, ſuivant lui, qu'une combinaiſon du fer avec une ſubſtance que les alkalis enlèvent aux matières charbonneuſes; & il le prouve en montrant que l'alkali digéré ſur le bleu de Pruſſe, ſe charge de cette ſubſtance, & ne laiſſe plus qu'une chaux de fer, tandis que ce même alkali ainſi ſaturé & verſé ſur une diſſolution de fer, précipite de nouveau bleu de Pruſſe. Les chimiſtes ont regardé cette ſubſtance extraite du charbon par l'alkali fixe, comme étant du phlogiſtique; & l'alkali qui en eſt chargé a même porté le nom *d'alkali phlogiſtiqué*. Mais les progrès de la chimie, en l'enrichiſſant d'un grand nombre de faits, l'ont rendue en même-temps bien plus pauvre en théories qu'elle ne croyoit l'être, ſi pourtant avoir perdu des théories & des ſyſtêmes, ce n'eſt pas avoir beaucoup gagné. La plupart des dénominations & même des expoſitions que l'on faiſoit des phénomènes portoient, ſans preſque qu'on s'en doutât, quelque teinte de ces ſyſtêmes, & il a fallu créer une nouvelle langue, que peut-être dans quelques années il faudra changer encore.

M. Macquer ſoumit, conjointement avec M. Baumé, une quantité aſſez conſidérable de platine à des expériences nouvelles, où ils ſe propoſoient d'examiner ſur-tout la

Digitized by Google

fusibilité & la ductilité de ce métal, celles de ses propriétés, dont les chimistes s'étoient jusqu'alors le moins occupés. Ils parvinrent à la fondre au miroir ardent d'une manière imparfaite. Quelques morceaux arrondis par la fusion, parurent avoir une véritable ductilité; & ce fait important consigné dans nos Mémoires, a soutenu l'espérance des chimistes qui, depuis, ont trouvé des moyens de forger & de travailler cette substance singulière, également intéressante, & par les faits nouveaux qu'elle présente dans la chimie des métaux, & par l'utilité dont elle deviendra un jour dans les arts.

Un voile épais en couvre encore l'origine & l'histoire; & malgré l'abondance de ce métal, le préjugé en refuse à ceux qui veulent l'étudier & dont heureusement ces obstacles n'ont fait qu'exciter le zèle. On avoit cru d'abord que la platine qui peut se mêler avec l'or, s'y unissoit si intimement, qu'il étoit impossible de reconnoître le mélange & de la séparer d'avec l'or. Sans doute cet inconvénient auroit encore été un motif bien foible pour condamner à une éternelle inutilité une substance que la nature a prodiguée, & qu'à bien des égards il seroit difficile de remplacer; mais cet inconvénient n'existe même plus depuis quarante ans. Cependant l'opinion de ceux qui possèdent la platine est restée la même; exemple moins rare qu'on ne croit, & de la lenteur avec laquelle les vérités s'établissent, & de cette fatalité singulière qui fait regarder l'opinion la moins fondée, comme suffisante pour donner le droit de ravir aux hommes quelque portion de leur liberté, tandis qu'on exige que l'inutilité d'une prohibition soit rigoureusement prouvée, & souvent le soit depuis long-temps, pour le croire autorisé à la faire cesser. Il semble que chez tous les peuples & dans tous les temps, on ait regardé l'esclavage comme le véritable état de l'homme, & la liberté comme un état forcé, & pour ainsi dire contre nature.

Vers 1750, M. Macquer fut chargé, par la Cour, d'une commission particulière. Il existoit alors en Bretagne, un

homme, le Comte de la Garaie, qui, entraîné par une véritable paſſion à l'exercice de la bienfaiſance, s'étoit dévoué depuis quarante ans, au ſervice de l'humanité ſouffrante. Il avoit bâti un hôpital à côté d'un laboratoire de chimie; il ſoignoit, il traitoit lui-même les malades auxquels il adminiſtroit les remèdes préparés dans ſon laboratoire, remèdes qu'il avoit ou que du moins il croyoit avoir inventés. Son premier ouvrage étoit fondé ſur l'idée chimérique d'extraire des mixtes, par le moyen de l'eau, toutes leurs parties actives; & on devoit à cet ouvrage quelques préparations utiles, nouvelles ou peu connues.

D'autres idées du même genre avoient frappé depuis le Comte de la Garaie; & il vouloit vendre au Gouvernement ſes nouveaux remèdes, comme il lui avoit vendu ſes premiers ſecrets, c'eſt-à-dire, toujours au profit de ſon hôpital. Il eſt ſingulier, peut-être, qu'un homme ſi bienfaiſant fît un ſecret de ſes découvertes, & qu'il ne s'empreſsât point de les conſacrer gratuitement à l'utilité commune; mais puiſque ceux qui ſollicitent des grâces oublient ſi facilement que c'eſt aux dépens du ſang du peuple qu'ils cherchent à ſatisfaire leur avarice ou leur ambition, pourroit-on ne point pardonner un pareil oubli à celui qui ne demande que pour les malheureux?

M. Macquer fut chargé d'examiner ces remèdes. Le projet du Comte de la Garaie étoit alors d'extraire les parties ſalubres des minéraux par une longue macération avec des ſels neutres. Il avoit entr'autres préparé une teinture mercurielle par des procédés qui duroient pluſieurs mois; mais cette teinture n'étoit qu'une diſſolution de ſublimé corroſif dans l'eſprit-de-vin. Telle eſt en général l'hiſtoire de ces ſecrets ſi vantés, tantôt chimériques, tantôt connus de tout le monde, excepté de ceux qui les achettent.

M. Macquer ſe trouva placé à une époque où la chimie commençoit à ſe délivrer des rêves des alchimiſtes dont les ouvrages des reſtaurateurs de cette ſcience ſont encore infectés; mais la clarté, la méthode étoient un mérite

inconnu dans les livres de qui en traitoient, & sur-tout en France, un reste de cartésianisme ajoutoit à l'obscurité de la science, en la surchargeant de prétendues explications mécaniques.

M. Macquer est le premier qui ait donné des élémens de chimie où l'on trouve la même clarté, la même méthode, qui règnoient déjà dans les autres branches de la physique. Avant lui, on regardoit la chimie comme une science isolée, embarrassée, obscure, remplie d'opérations secrètes, de recettes énigmatiques presque comme une occupation dangereuse où l'on risquoit de compromettre sa santé, sa fortune, & même sa raison: elle parut dans les ouvrages de M. Macquer, une science simple, fondée sur les faits, procédant par des opérations dont une sage méthode prescrivoit tous les détails, utile à tous les besoinsde la vie humaine & liée au système général de nos connoissances. Ainsi, ses élémens contribuèrent à répandre le goût de la chimie, en montrant combien il étoit facile de l'apprendre; tandis qu'un autre chimiste son contemporain, & autrefois son maître, en inspiroit l'enthousiasme par une marche plus hardie & des idées plus vastes & plus imposantes.

M. Macquer fit, pendant plusieurs années, des cours, conjointement avec M. Baumé. Il avoit préféré, dans ces cours, l'ordre qui lui avoit paru exiger de ceux qui les suivoient moins de connoissances préliminaires en chimie; il décrivoit les expériences, exposoit les faits avec clarté, avec précision, y ajoutoit les explications les plus plausibles, les plus généralement adoptées, mais avec le ton d'un homme qui doute encore & qui veut seulement payer un léger tribut au besoin si naturel aux hommes, & surtout aux jeunes gens, de croire quelque chose. L'incertitude où une suite de simples faits auroit laissé ses disciples, leur eût paru trop pénible; il les consoloit donc par quelques explications, mais il ne les trompoit point sur le prix qu'ils devoient y attacher. Il avoit l'art de choisir les parties de la chimie où les faits étoient le plus certains, où

où les objets avoient été le plus discutés & le mieux éclaircis; enfin son but sembloit être principalement d'inspirer quelque confiance dans les vérités chimiques aux esprits d'une justesse sévère, & qui se piquent d'être difficiles en preuves. Il se concilioit ainsi l'estime & la confiance de ses disciples plus qu'il n'attiroit leur admiration; ils n'étoient point frappés de la fécondité de ses vues, mais ils sentoient qu'ils avoient en lui un guide sûr, qui ne les égareroit jamais. C'est avec un plaisir mêlé de douleur que je m'arrête sur ces détails. Je dois à M. Macquer mes premières connoissances en chimie; & en parlant ici de ses talens comme démonstrateur, c'est un devoir de reconnoissance dont je m'acquitte envers sa mémoire.

M. Macquer jugea qu'un dictionnaire de chimie étoit nécessaire pour assurer les heureux effets que ses livres élémentaires & ses cours avoient déjà produits. Cette manière de traiter les sciences appartient presque à notre siècle, & c'est un des services qu'il aura rendus à l'esprit humain. Aucune espèce de livres n'est plus propre à montrer à chaque époque le point où les sciences sont parvenues, à en faire connoître tous les détails, à en perfectionner la langue. Le public attendoit cet ouvrage de M. Macquer; son esprit naturellement juste & méthodique, son impartialité bien connue, son aversion pour les systèmes, la sagesse qu'il savoit mettre dans ses vues & dans ses jugemens, l'indiquoient comme le chimiste auquel on devoit desirer que cet important travail fût confié. L'exécution & le succès répondirent à cette attente. Il avoit pris la méthode la plus sûre pour faire un bon dictionnaire: celle de composer une espèce de cours de chimie complet & méthodique, dont les grands articles de son dictionnaire sont en quelque sorte les principaux chapitres, & peuvent être lûs suivant leur ordre naturel qu'il a indiqué dans une table particulière.

M. Macquer donna la seconde édition de son dictionnaire dans un moment où de nouvelles difficultés auroient pu

refroidir ſon zèle. C'étoit préciſément celui où la connoiſſance d'un grand nombre de ſubſtances aériformes, juſqu'alors négligées dans les analyſes, avoit produit dans toutes les parties de la chimie une révolution, & preſque un bouleverſement général; où toutes les théories devenoient incertaines, & toutes les expériences incomplètes. M. Macquer ſut éviter à la fois les deux inconvéniens qui étoient le plus à craindre, celui de ſe refuſer à des idées nouvelles qui l'obligeoient de revenir ſur des opinions qu'il avoit long-temps adoptées, & celui de trop ſacrifier à ces nouvelles idées, & de négliger les autres parties de la ſcience. Il expoſa les faits nouvellement découverts, en diſcuta les circonſtances & les réſultats, & garda un juſte milieu entre un attachement ſervile aux opinions anciennes & l'enthouſiaſme des nouveautés.

Il eſt impoſſible d'être chimiſte ſans avoir la curioſité d'étudier les travaux des arts qui ne ſont que des opérations chimiques faites en grand, d'après les règles fondées ſur une expérience en général groſſière & peu préciſe, mais qui préſentent beaucoup de phénomènes inſtructifs, & où, parmi un grand nombre de procédés inutiles & bizarres, il s'en trouve d'autres qu'on ſeroit d'abord tenté de condamner, & dont un examen plus approfondi fait connoître les raiſons & l'utilité.

M. Hellot, qui étoit commiſſaire du Conſeil pour les teintures, & chimiſte de la manufacture de porcelaine, deſira d'avoir M. Macquer pour adjoint; & ce deſir fait d'autant plus d'honneur à M. Hellot, qu'il ſavoit très-bien que la réputation de M. Macquer, en chimie, ſurpaſſoit la ſienne, & qu'il eſt rare de ſe choiſir pour ſucceſſeurs ou pour adjoints, des hommes par leſquels on puiſſe craindre d'être éclipſé; mais il ne l'eſt pas moins de mériter, comme M. Macquer, qu'une conduite ſi noble ne puiſſe être regardée comme imprudente.

L'art de la teinture dépend de la chimie, & d'une chimie très-délicate & très-compliquée. M. Macquer voulut

Digitized by Google

d'abord traiter cette partie de la ſcience comme il avoit traité toutes les autres, c'eſt-à-dire, en donner les élémens, les principes, en diſſiper les ténèbres. Il regardoit ce préliminaire comme auſſi eſſentiel aux véritables progrès des arts qu'à ceux des ſciences, & une grande partie de ſon art de la teinture en ſoie, publié dans la collection de l'Académie, eſt conſacrée à l'expoſition de ces principes élémentaires. Il y joignit dans nos Mémoires, des procédés pour employer le bleu de Pruſſe comme teinture, & pour donner à la ſoie teinte avec la cochenille, la même nuance & le même brillant que cette ſubſtance colorante fait prendre à la laine; ces procédés ſont le fruit d'obſervations chimiques très-fines, & ce qui eſt rare dans les opérations des arts, on y eſt guidé par une méthode ſûre.

M. Macquer n'a rien publié ſur l'art de la porcelaine, & on doit le regretter. Cette poterie, utile à la Chine & au Japon, pays dans leſquels elle eſt d'un uſage commun, n'eſt encore, parmi nous, qu'un objet de luxe, & par conſéquent une bagatelle inutile. L'art de la porcelaine étoit le ſecret de quelques manufactures au commencement de ce ſiècle; mais elles ſe ſont répandues depuis chez preſque toutes les nations; elles ſe ſont multipliées, & pour nous procurer la jouiſſance d'un objet qui, ſans être d'une néceſſité réelle, pourroit devenir d'une véritable utilité, il ne faudroit aujourd'hui que rendre la liberté à ce genre d'induſtrie, & lever le voile, bien tranſparent à la vérité, ſous lequel quelques parties de cet art ſont encore cachées. Heureuſement l'on commence à convenir preſque généralement que les ſecrets dans les arts ne peuvent que produire le double effet, d'en reſtreindre l'uſage & d'en arrêter les progrès.

L'eſprit qu'on remarque dans les ouvrages de M. Macquer, eſt le même qui dirigea ſa conduite. Tout en lui étoit d'accord: cette juſteſſe d'eſprit, cette modération dans ſes jugemens, cette réſerve dans ſes aſſertions, étoient la ſource de la modeſtie, de la tranquillité, de la douceur qu'il

montra conſtamment dans toutes les circonſtances de ſa vie. Il étoit ſenſible aux critiques; mais il ne connoiſſoit ni l'aigreur, ni l'emportement de l'amour-propre bleſſé. S'il ne faiſoit pas valoir avec enthouſiaſme ce qui lui paroiſſoit utile & bon, du moins il approuvoit toujours avec plaiſir. C'étoit malgré lui, & lorſqu'il y étoit contraint par la juſtice, qu'il ſe déterminoit à porter un jugement ſévère. Il voyoit le bien, il l'aimoit, mais quelquefois cédoit trop facilement aux obſtacles, croyoit trop promptement à l'impoſſibilité du ſuccès, & ſe conſoloit trop tôt par l'idée qu'il eſt impoſſible d'empêcher le bien s'il eſt une fois connu, & qu'il ne faut que ſavoir attendre.

Quoiqu'il eût peu pratiqué la médecine, la Société Royale le choiſit pour un de ſes premiers membres; & ſon amour pour le bien public lui fit un devoir de s'intéreſſer à un établiſſement ſi utile. Les réclamations qui s'élevèrent contre cette inſtitution, n'ébranlèrent pas M. Macquer; il y reconnut les mêmes raiſonnemens & les mêmes principes que dans le ſiècle dernier on avoit oppoſés à l'établiſſement des compagnies ſavantes. Son zèle éclairé pour les Sciences & pour l'Académie, étoit encore un des motifs de ſon attachement à cette ſociété nouvelle; il ſavoit que c'eſt ſur-tout des progrès de la théorie que doivent s'occuper les compagnies qui, par leur conſtitution, embraſſent toute l'étendue des ſciences. C'eſt dans ces Académies ſeules que les recherches qui ne ſont point d'une application immédiate, qui ne frappent point la curioſité publique, peuvent être appréciées, ou eſpérer de trouver une récompenſe. Si, ſéduites par des vues d'une utilité prochaine, les compagnies ſavantes ſe livroient excluſivement à des recherches pratiques, la marche des ſciences en ſeroit retardée aux dépens de cette même utilité à laquelle on les auroit imprudemment ſacrifiées.

L'inſtitution d'un corps chargé ſpécialement de l'application des ſciences phyſiques à l'utilité commune, devoit donc paroître à un eſprit auſſi juſte que celui de M. Macquer,

Digitized by Google

non-ſeulement un moyen de perfectionner la médecine, mais un ſervice rendu aux ſciences, qui, s'enrichiſſant tous les jours de vérités & d'applications nouvelles, deviennent d'une immenſe étendue, & demandent à être partagées pour être mieux cultivées.

M. Macquer avoit paſſé une grande partie de ſa vie avec un frère qui aimoit les Lettres, & à qui l'on doit quelques abrégés chronologiques eſtimés; après la mort de ce frère, le ſeul chagrin violent qu'il ait jamais éprouvé, il ne vécut plus qu'avec ſa femme & deux enfans, dont l'éducation étoit ſon unique délaſſement & ſon occupation la plus chérie.

Il aimoit peu le monde, parce qu'il préféroit à tout la tranquillité & l'indépendance; cependant il étoit doux, facile même dans la ſociété, & on n'eût jamais deviné qu'il ne s'y livrât qu'à regret : l'eſpèce de contrainte qu'il y éprouvoit n'étoit pas l'embarras que donne l'humeur, c'étoit le beſoin de ces ſentimens doux auxquels il eſt ſi touchant de pouvoir s'abandonner en liberté, & qui rendent, pour ceux qui les connoiſſent, tout autre plaiſir inſipide. Il n'étoit point malheureux dans le monde, mais il y portoit toujours le ſouvenir involontaire du bonheur qui l'attendoit au ſein de ſa famille. C'eſt le contraire de ce qu'éprouve le commun des hommes, qui ſouvent ſe trouvent mal où ils ſont, ſans pouvoir dire où ils ſeroient mieux.

La ſérénité qui paroiſſoit dans toute la perſonne de M. Macquer, ſembloit indiquer une ſanté conſtante; mais cette ſérénité n'annonçoit que le calme de ſon ame. Il ſouffroit depuis long-temps, mais le cachoit aux perſonnes qu'il aimoit le plus, parce qu'il regardoit ſes maux comme incurables; il les ſentit redoubler peu-à-peu dans ſes dernières années, en obſerva le progrès, & conjectura très-juſte le moment où la mort devoit les finir. Peu de temps auparavant, il en avertit ſa femme, lui parla de ſa fin prochaine avec ſenſibilité, mais ſans trouble, la remercia du bonheur qu'elle avoit répandu ſur ſa vie, & inſiſta beaucoup

ſur le deſir qu'il avoit d'être ouvert après ſa mort, afin que la cauſe en fût connue. Quelques jours après, ſes maux augmentèrent, & il y ſuccomba le 15 Février 1784, ſans avoir perdu un inſtant ni ſa préſence d'eſprit, ni ſa ſenſibilité, ni ſa douceur, ni ſa tranquillité ordinaire. L'oſſification de l'aorte & des concrétions pierreuſes formées dans les cavités du cœur, avoient été la cauſe de cet état de ſouffrance auquel il étoit condamné depuis pluſieurs années, & de l'impoſſibilité d'exiſter dont il avoit ſenti ſi long-temps les approches lentes & douloureuſes.

Digitized by Google

ÉLOGE
DE M. BERGMAN.

TORBERN BERGMAN, professeur de chimie à Upsal, membre de l'Académie des Sciences de la même ville, de celles de Londres, de Berlin, de Stockolm, des Curieux de la nature, de Gottingue, de Turin, associé-étranger de la Société de médecine de Paris & de l'Académie des Sciences, naquit le 20 Mars 1735, à Catharineberg, dans la province de Vestro-Gothie, de Barthold Bergman, receveur des finances, & de Sara Hœgg.

Chez presque toutes les nations de l'Europe, l'état de financier est une profession lucrative & paisible; il n'en étoit pas de même alors en Suède. Souvent les receveurs des deniers publics, créatures d'un parti qui avoit été dominant dans une Diète, étoient exposés à la persécution de la Diète suivante, où le parti contraire avoit l'avantage. On croyoit trouver dans la recherche de leur fortune, des ressources pour le trésor public, & dans les poursuites exercées contre eux, un moyen presque sûr de capter la bienveillance du peuple. Il en résultoit que leurs profits devoient être d'autant plus grands, d'autant plus onéreux à la nation, qu'ils étoient plus incertains; mais en même-temps ceux qui, comme M. Bergman, refusoient d'embrasser cette profession, annonçoient au moins autant de sagesse que de désintéressement.

Lorsqu'il eut fini ses premières études, son père lui permit de suivre la carrière des universités, & de se rendre à Upsal. Un de ses parens fut chargé de veiller sur sa conduite. Bien loin d'avoir besoin de l'exhorter au travail, le surveillant se vit bientôt obligé de modérer son ardeur,

Digitized by Google

& ſur-tout de l'empêcher de cultiver les ſciences phyſiques. L'univerſité d'Upſal embraſſe les connoiſſances humaines dans toute leur étendue ; & ceux qui s'y appliquent à la théologie, au droit public, à la juriſprudence, peuvent eſpérer des places importantes & une grande fortune, tandis que les ſuccès dans l'étude des mathématiques & de la phyſique ne ſont récompenſés que par un peu de gloire. M. Bergman préféroit cependant ces dernières études, & cette préférence imprudente étoit l'objet des remontrances de ſon parent ; remontrances auxquelles il ne put échapper qu'en imaginant un moyen de cacher ſubitement ſes livres de phyſique, lorſqu'il étoit ſurpris, pour ne laiſſer voir que ceux qu'il lui étoit permis d'étudier. Cette néceſſité d'acquérir dans des genres auxquels il ne ſe livroit qu'avec dégoût, aſſez de connoiſſances pour perſuader qu'il en avoit été uniquement occupé, & cacher les progrès plus grands qu'il faiſoit dans les ſciences de ſon choix, altéra promptement ſa ſanté ; & au bout d'une année, il fut obligé de retourner dans ſa famille & de joindre aux études ſédentaires un exercice de corps habituel, qui ſeul pouvoit rétablir & fortifier ſa conſtitution. Mais il voulut que cet exercice ſervît encore à l'inſtruire ; il avoit étudié la botanique avant d'aller à Upſal ; il reprit cette étude dans ſa retraite, & y joignit celle des inſectes. Pluſieurs de ceux qu'il obſerva ne ſe trouvoient point claſſés dans les ouvrages de Linné. M. Bergman en forma une petite collection, & la fit remettre à cet homme illuſtre, qui alors habitoit Upſal. M. Bergman n'avoit pas oſé ſe préſenter à lui pendant ſon premier ſéjour. Cette diſcrétion eſt un ſentiment bien naturel dans un jeune homme qui, frappé d'un juſte reſpect pour le génie, ne ſe croit pas digne encore de l'approcher, mais nourrit au fond de ſon cœur l'eſpérance de mériter un jour d'attirer ſes regards. Cet hommage fut d'autant plus agréable à Linné, que le jeune naturaliſte avoit eu le bonheur de rencontrer des eſpèces curieuſes & réellement inconnues.

Lorſque

Digitized by Google

Lorſque la ſanté de M. Bergman fut rétablie, il obtint la permiſſion de retourner à Upſal, avec une liberté entière de cultiver les mathématiques, la phyſique, l'hiſtoire naturelle. Il s'y étoit ménagé l'avantage d'être connu du ſavant dont le nom célèbre y éclipſoit alors les autres noms. Ainſi, cédant à cet empire que la gloire & le génie exercent ſur tout ce qui les environne, M. Bergman ne parut d'abord aimer que l'hiſtoire naturelle; elle fut l'objet de ſes premiers travaux, & ſon premier Mémoire fut une découverte. On ignoroit la nature d'un corps qui ſe trouve dans quelques eaux, & qui porte le nom de *coccus aquaticus*. M. Bergman s'aperçut que c'étoit l'œuf d'une ſangſue, œuf qui renfermoit dix à douze petits. Linné, auquel il fit part de cette obſervation, refuſa de le croire; mais M. Bergman le rendit lui-même témoin de ce fait. Alors Linné, après avoir écrit de ſa main au bas du mémoire de ſon élève; *vidi & obſtupui, je l'ai vu, & j'en ai été frappé d'étonnement*, l'envoya, décoré de cette honorable apoſtille, à l'Académie de Stockolm.

Peu de temps après, Linné donna le nom de M. Bergman à une nouvelle eſpèce d'inſectes. Cette manière d'attacher le nom d'un homme à une eſpèce qui doit être éternelle, ſemble annoncer qu'on croit, ou ſes talens, ou le ſentiment qu'on éprouve pour lui dignes d'être conſacrés à l'immortalité. C'eſt une ſorte d'apothéoſe qui ne coûte rien à la raiſon; mais le ſuccès de cet honneur dépend beaucoup du haſard. Ces dénominations diſparoiſſent ſouvent de la langue des ſciences, d'autres fois elles s'y conſervent, mais elles ceſſent de rappeler un nom oublié dont on a voulu vainement prolonger la mémoire; & les ſavans ne doivent compter ſur l'immortalité que lorſqu'ils l'ont méritée par leurs ouvrages.

Des Mémoires couronnés par l'Académie de Stockolm, ſur l'hiſtoire des inſectes qui attaquent les arbres à fruit, & ſur les moyens de ſe mettre à l'abri de leurs ravages; une méthode de les claſſer d'après la forme qu'ils ont dans

l'état de larve, époque où il ſeroit le plus utile pour l'agriculture de pouvoir reconnoître & détruire ceux qui ſont nuiſibles; un grand nombre d'obſervations ſur cette claſſe d'animaux ſi variés dans leurs formes & dans leur organiſation, ſi importans pour l'homme qui a ſu en ſoumettre quelques-uns à ſes beſoins, tandis que les autres défendus par leur petiteſſe, & puiſſans par leur multitude, oſent lui diſputer encore quelques parties de ſon empire, enfin ſi intéreſſans par cette foule d'obſervations qu'offre au philoſophe qui ſait voir & réfléchir, le ſpectacle de leur induſtrie, de leur prévoyance, de leurs travaux, de leurs mœurs, de leur état de civiliſation plus ou moins perfectionnée : tel a été le fruit du goût de M. Bergman pour une étude qui déjà n'étoit plus pour lui qu'un délaſſement; car les mathématiques & les parties de la phyſique qui y ont rapport étoient devenues ſa véritable occupation. M. Bergman aimoit à parler de ſes premiers travaux dans un genre auquel il avoit renoncé, mais pour lequel il avoit conſervé un goût très-vif; & long-temps après il citoit avec une ſorte de complaiſance, que dans un ſeul jardin & pour une ſeule année, l'uſage d'un moyen qu'il avoit indiqué avoit prévenu la naiſſance de plus de ſept millions d'inſectes deſtructeurs.

Il fut nommé, en 1761, profeſſeur de mathématiques & de philoſophie naturelle. Depuis pluſieurs années il enſeignoit les différentes parties de ces ſciences. Nous lui devons une ſavante hiſtoire de l'arc-en-ciel & des crépuſcules, des recherches ſur l'aurore boréale, ſur les phénomènes électriques, ſur l'électricité du cryſtal d'Iſlande, ſur celle de la tourmaline. Enfin on trouve ſon nom dans la liſte des aſtronomes qui ont obſervé le premier paſſage de Vénus ſur le Soleil, parmi ceux dont les réſultats méritent le plus la confiance des ſavans.

Perſonne alors ne ſavoit à Upſal qu'il eût cultivé la chimie; mais Wallerius s'étant démis, en 1767, du titre de profeſſeur dans cette ſcience, M. Bergman fit inſcrire ſon nom dans la liſte des concurrens. Wallerius avoit eſpéré

Digitized by Google

pouvoir faire paſſer ſa chaire à un de ſes élèves, & bientôt M. Bergman vit ſe réunir contre lui tous ceux qui formoient, à Upſal, le parti de l'ancien profeſſeur : car tout homme célèbre a la triſte facilité d'en avoir un, à moins qu'il n'ait la ſageſſe & la noble fierté de dédaigner un avantage ſi dangereux. Ce parti s'accrut bientôt de la foule de ces hommes condamnés à ne jamais reconnoître un mérite ſupérieur dans leurs contemporains, ainſi qu'à ne jamais croire une vérité ſi elle n'a point été une des opinions de leur jeuneſſe.

Deux diſſertations ſur l'alun, que M. Bergman avoit données comme un eſſai de ſes forces, furent critiquées avec amertume. Il devoit ſuccomber ſous cette eſpèce de conjuration. Heureuſement pour la chimie, le prince royal, aujourd'hui roi de Suède, étoit alors chancelier de l'univerſité d'Upſal; il conſulta des ſavans qui, étrangers à ce corps, ne pouvoient partager les préventions de ſes membres, examina les titres de M. Bergman & les reproches élevés contre lui, ſe chargea lui-même de répondre à ces reproches & de le défendre auprès du ſénat. C'eſt à-la-fois une anecdote bien honorable pour les ſciences, & une preuve frappante des progrès de la raiſon humaine, que de voir l'héritier d'un trône employer ſes talens, plutôt encore que ſon crédit, à ſoutenir devant les chefs de la nation la cauſe du génie perſécuté, & à lui faire obtenir juſtice.

On auroit pu craindre que M. Bergman, livré pendant long-temps à des études étrangères à la chimie, ne manquât, dans la nouvelle carrière où il s'étoit jeté, de cette étendue de connoiſſances, de cette facilité, de cette habitude des opérations, avantages ſans leſquels, dans les ſciences phyſiques, le talent peut encore beaucoup pour la célébrité du ſavant, mais très-peu pour le progrès de la ſcience & l'utilité réelle. On s'aperçut bientôt au contraire, que ſes études de géométrie, de phyſique, d'hiſtoire naturelle, étoient bien loin de lui avoir été inutiles. Elles le préſervèrent des *préjugés* & de l'eſprit de routine dont chaque partie

de nos connoiſſances ſemble avoir encore conſervé quelques veſtiges; elles donnèrent à ſes idées & à ſes vues plus de préciſion & plus d'étendue. Il vit que la chimie devoit être, après les mathématiques, la baſe fondamentale de la connoiſſance de la nature, qu'il falloit donc reculer les bornes du champ trop reſſerré où cette ſcience avoit été renfermée; mais qu'en lui ouvrant une carrière plus vaſte, on couroit riſque de n'y multiplier que les erreurs, ſi on ne s'occupoit en même temps d'en bannir toutes les explications vagues & ſyſtématiques, d'en réformer la langue, enfin d'y porter l'exactitude de quelques autres parties de la phyſique.

Son premier ſoin fut de former auprès de ſon laboratoire un cabinet dans lequel les ſubſtances du règne minéral étoient rangées par ordre, à côté des produits des expériences qui lui en avoient fait connoître la compoſition; une autre pièce renfermoit les minéraux qui ſe trouvent en Suède, & ils y étoient rangés ſuivant leur ordre géographique; enfin dans une troiſième, les modèles des machines, des inſtrumens, des métiers employés à faire ſubir à ces ſubſtances les préparations, à leur donner les formes qui les rendent utiles à nos beſoins, étoient placés à côté des produits que les arts en avoient formés. Par ce moyen, un élève apprend d'abord à connoître les ſubſtances d'après leur nature & la proportion de leurs principes. Plus loin, il les aperçoit rangées dans l'ordre où elles ont été répandues ſur le globe, & les loix qui ont préſidé à cet ordre deviennent plus faciles à reconnoître ou à ſaiſir. Enfin il voit comment les arts ont ſu employer ces ſubſtances, comment leur pratique a prévenu les théories, ou a ſu en profiter, comment on y a réſolu une foule de problèmes chimiques compliqués par une condition de plus, la néceſſité de les réſoudre avec profit, élément qui rend cette ſolution plus difficile, & les méthodes par leſquelles on l'a trouvée, ſouvent plus piquantes.

Cette manière d'inſtruire, ſi nouvelle, & pour laquelle

Digitized by Google

M. Bergman fit des ſacrifices conſidérables, eſt un des grands ſervices qu'un eſprit profond & philoſophique pût rendre aux ſciences. Bientôt après il les enrichit par de nombreuſes découvertes.

C'eſt lui qui le premier a fait bien connoître la ſubſtance à laquelle on donnoit le nom d'*air fixe*, & qu'il a nommée *acide aérien*, après avoir prouvé qu'elle avoit toutes les propriétés des acides.

Le nikel, le régule de manganèſe, la terre de magnéſie, la terre peſante étoient des ſubſtances nouvellement découvertes, & ſur leſquelles la chimie n'offroit avant lui que des vues ingénieuſes ou des expériences iſolées.

L'acide qu'on retire du ſucre & d'un grand nombre d'autres ſubſtances végétales, en diſtillant ſur elles de l'acide nitreux; ceux qu'on retire de l'arſenic, de la molibdène, du ſpath fluor, de la tunſthène, avoient été découverts dans ſon école, par lui ou par ſes diſciples. Mais il falloit une longue ſuite d'expériences & de recherches pour apprendre à connoître ces ſubſtances, ou nouvelles, ou peu familières aux chimiſtes, auſſi parfaitement que celles qui ont été plus anciennement traitées; & pour que leur analyſe, leurs propriétés, les phénomènes qu'elles préſentent dans leurs combinaiſons, formaſſent également un enſemble ſyſtématique de faits conſtans & précis.

M. Bergman oſa entreprendre ce travail immenſe; & tandis que ce terrein, juſque-là ſans culture, lui offroit d'abondantes moiſſons, il ſavoit en recueillir de nouvelles ſur ceux qu'une culture aſſidue ſembloit avoir épuiſés. Le fer qui eſt depuis ſi long-temps le ſujet des opérations de tant d'arts différens, & l'objet des recherches des ſavans & des artiſtes, n'a commencé à être vraiment connu que depuis les recherches de M. Bergman, qui a montré, dans ce qu'on prenoit pour du fer, pluſieurs ſubſtances étrangères, preſque toutes métalliques, dont l'exiſtence étoit inconnue; mais ce n'eſt point par ces travaux particuliers qu'il faut juger de ſon génie; c'eſt dans ſes nouvelles

Digitized by Google

méthodes, dans ſes théories générales, qu'il faut apprendre à le connoître & à l'apprécier.

Dans ſes diſſertations ſur l'analyſe des eaux, on le voit ajouter aux réactifs déjà employés, des réactifs nouveaux; faire ſentir l'imperfection de cette méthode, en même temps qu'il enſeigne à la porter à un degré d'exactitude encore inconnu; ajouter à l'analyſe directe de nouveaux moyens de ne laiſſer échapper aucun des produits, de les ſéparer avec plus d'exactitude & d'en déterminer les quantités reſpectives avec une très-grande préciſion. Au lieu de chercher à les obtenir ſeuls pour les peſer enſuite, méthode ſouvent difficile & qui expoſeroit à en perdre une partie, il cherche au contraire le poids d'une des combinaiſons de chacun de ces principes, avec une ſubſtance bien connue qu'il a employée, pour enlever ce principe à ceux auxquels il étoit uni. Des expériences faites à part & plus en grand lui apprennent enſuite à connoître la proportion des ſubſtances qui conſtituent cette combinaiſon nouvelle; cette méthode ingénieuſe & féconde dont il eſt l'auteur rend les réſultats plus préçis & ſouvent même plus aſſurés.

Les pierres précieuſes, connues ſous le nom de *gemmes*, avoient preſque entièrement échappé à tous les efforts de l'analyſe. M. Bergman parvint à les y ſoumettre, briſa l'union qui règne entre leurs parties, & ſépara les terres de différente nature dont elles ſont compoſées. La terre alumineuſe en forme plus de la moitié; la terre quartzeuſe & la terre calcaire, un peu de chaux de fer en ſont les autres principes; & c'eſt avec ces ſubſtances communes & viles en apparence, que la Nature, avec l'aide du temps, & par des moyens qui ſont encore un ſecret pour nous, parvient à former ces pierreries que leur éclat, leur rareté, leur éternelle durée ont rendu dignes de ſervir d'ornement à la beauté, & de parer la tête des rois ou les ſtatues des dieux.

Le diamant qui diffère de toutes les autres pierres, par la propriété qu'il a de brûler, n'a pu même ſe dérober tota-

Digitized by Google

lement à la ſagacité de M. Bergman, qui en a fait aſſez pour prouver que ſi dans ſes recherches ſur le diamant, il n'a pu obtenir un ſuccès également complet, c'eſt ſa fortune & non ſon génie qu'il en faut accuſer.

M. Bergman a prouvé la néceſſité de procéder dans les opérations docimaſtiques par la voie humide, c'eſt-à-dire, par l'analyſe où l'on emploie des menſtrues, ſeule méthode qui puiſſe être rigoureuſe; mais il enſeignoit en même temps à perfectionner les procédés ordinaires, à les ſimplifier: il montroit quelle pouvoit en être la véritable utilité; il apprenoit à exécuter avec un chalumeau, un charbon, une ſimple cuillier & quelques ſubſtances d'épreuve, de premières analyſes aſſez exactes, pour reconnoître les ſubſtances minérales avec certitude & ſe guider dans une analyſe plus complète. M. Bergman entreprit alors de claſſer toutes ces ſubſtances d'après leur compoſition chimique. Cette méthode eſt la ſeule vraiment ſcientifique, puiſque c'eſt la ſeule qui ait pour objet les qualités eſſentielles aux ſubſtances, celles dont dépendent toutes leurs propriétés ſecondaires; mais une difficulté juſqu'à lors inſoluble avoit empêché les naturaliſtes d'adopter cette méthode, l'impoſſibilité d'en faire uſage ailleurs que dans un laboratoire, par des moyens lents, coûteux & pénibles. M. Bergman avoit ſçu vaincre cette difficulté, en inventant cette analyſe au chalumeau; & aujourd'hui le minéralogiſte armé de cet appareil portatif peut, au ſein des mines, ſur le ſommet des montagnes, au fond des ſouterrains creuſés par la nature, tout analyſer & tout reconnoître.

Dans un Mémoire ſur la criſtalliſation, publié en 1773, M. Bergman montra comment d'une forme primitive très-ſimple peuvent naître des formes de criſtaux qui, au premier coup-d'œil, n'ont aucun rapport avec la forme génératrice; & comment la diſſection de ces criſtaux, l'examen des coupes qu'on peut y faire avec plus ou moins de facilité, apprennent à reconnoître cette figure primitive & les loix plus ou moins ſimples, d'après leſquelles elle a déterminé

Digitized by Google

la production des criſtaux différens. Ce Mémoire n'eſt qu'un ſimple eſſai, c'eſt la première eſquiſſe d'une théorie nouvelle, mais cette eſquiſſe eſt l'ouvrage d'un grand maître. M. l'abbé Haüy s'occupoit de ſon côté des mêmes objets à peu-près dans le même temps, mais avec plus de ſuite, & c'eſt à lui que doit appartenir la gloire d'avoir établi cette théorie qui manquoit aux ſciences naturelles.

Un des derniers ouvrages de M. Bergman, eſt un ſavant traité ſur les attractions électives. Nous entrerons dans un détail plus long ſur cette théorie qui eſt à la fois le fondement de la chimie, & le point par lequel elle ſe lie le plus à la phyſique, & doit un jour s'unir aux ſciences mathématiques; union dont les recherches ſur les phénomènes de la criſtalliſation peuvent nous faire eſpérer que l'époque n'eſt pas aujourd'hui très-éloignée.

M. Geoffroi, de cette Académie, paroît être le premier qui ait imaginé de réduire à quelques règles générales les phénomènes obſervés conſtamment dans les opérations chimiques. On appeloit alors *affinité* la force inconnue, en vertu de laquelle deux ſubſtances s'uniſſent & forment une combinaiſon. Si une troiſième ſubſtance détruit cette première combinaiſon pour en former une nouvelle avec un de ſes principes, on diſoit qu'elle avoit avec ce principe une affinité plus grande que le ſecond principe qui en avoit été ſéparé par elle. M. Geoffroi imagina de donner une table qui contenoit, pour les ſubſtances les plus importantes ou les plus connues, l'ordre de la force d'affinité, ſuivant laquelle les autres y adhèrent. C'étoit d'après les obſervations que cette table avoit été formée; elle étoit comme le précis des réſultats que l'on en pouvoit tirer; elle réduiſoit à un petit nombre de faits ſimples & généraux, la maſſe déjà très-grande des faits chimiques: elle pouvoit ſervir à donner l'explication de pluſieurs phénomènes nouveaux, c'eſt-à-dire à montrer leur accord avec les faits déjà connus. Cette table eut le ſuccès que méritoit une idée ſi ingénieuſe, & depuis ce temps il n'eſt preſque pas de chimiſte célèbre qui,

Digitized by Google

qui, dans ſes leçons ou dans ſes ouvrages, n'ait donné la table des affinités de M. Geoffroi, corrigée, augmentée, perfectionnée. M. Bergman avoit porté, dans l'étude de la chimie, des vues trop philoſophiques pour ne pas ſentir l'importance de cette table & ne pas s'occuper de la rendre plus utile. Mais il regardoit ce travail comme devant former le réſultat & le complément de tous les autres, & il avoit calculé le nombre effrayant de trente mille expériences néceſſaires encore pour la rendre auſſi complète que nos connoiſſances le permettent. Auſſi auroit-il retardé encore long-temps la publication de cet ouvrage, ſi le dépériſſement de ſa ſanté ne lui eût fait enviſager une mort prochaine. Alors il ſe crut permis de mettre au jour les matériaux qu'il avoit raſſemblés, les idées qu'il auroit voulu éclaircir, les vues qu'il ſe propoſoit de vérifier; il ne craignit plus le reproche d'avoir publié un ouvrage trop imparfait, de n'avoir fait que deviner ce qu'il auroit fallu prouver. *Il me ſuffit*, diſoit-il, *que mes eſſais puiſſent mettre les autres en état de porter plus loin leurs recherches. Qu'importe que la vérité ſoit trouvée par moi ou par un autre, pourvu qu'elle le ſoit.*

Cependant cet ouvrage ſi imparfait à ſes yeux, ne l'a pas été aux yeux des autres chimiſtes. Sa table incomparablement plus étendue que celle de M. Geoffroi, eſt la première qui contienne les loix des affinités, telles qu'on les obſerve en opérant par la voie sèche. Il a eu de plus l'idée abſolument nouvelle d'exprimer, par des eſpèces de formules, toutes les opérations chimiques, dont les réſultats ſervent de baſe à ſa table. Un ſeul coup-d'œil fait voir les ſubſtances ſur leſquelles on a opéré, la méthode employée & le réſultat de l'opération.

Cette eſpèce de langue nouvelle mérite l'attention des philoſophes; le moment approche où la langue alphabétique ne ſera plus ni aſſez rapide, ni aſſez riche, ni aſſez préciſe, pour répondre aux beſoins des ſciences & ſuivre leurs progrès; elles ſeront forcées de s'arrêter, ou il faudra créer pour chacune une langue dans laquelle des ſignes invariablement déterminés,

expriment les objets de nos connoiſſances, les diverſes combinaiſons de nos idées, les opérations auxquelles nous ſoumettons les productions de la nature, & celles que nous exécutons ſur nos propres idées, qui ſoient enfin pour tous les genres de ſciences, mais avec plus de perfection encore, ce que la langue de l'algèbre eſt pour l'analyſe mathématique.

Perſonne, avant M. Bergman, n'avoit mieux prouvé combien les loix des affinités ſont conſtantes, & comment on peut, par un examen plus approfondi des phénomènes, rappeler à ces loix les faits qui paroiſſent le plus les combattre. Il montre en effet que la même ſubſtance agit tantôt comme n'étant qu'un ſeul principe, & tantôt comme étant elle-même décompoſable, & par l'action ſéparée des différens principes dont elle eſt formée. Ici les principes, au lieu de ſe combiner deux à deux, ſe combinent trois à trois; là, une ſubſtance formée de deux principes eſt capable de conſerver, avec une certaine quantité ſurabondante d'un de ſes principes, une affinité aſſez forte pour enlever ce principe à une autre ſubſtance & la décompoſer. M. Bergman s'eſt borné à la table des affinités ſimples ou regardées comme telles : car peut-être n'en exiſte-t-il pas réellement dans la nature. La table des affinités doubles eût exigé un travail immenſe que la durée trop courte de ſa vie ne lui a point permis de terminer.

Au mot d'*affinité* il ſubſtituoit celui d'*attraction élective;* il employoit le mot *attraction*, parce que cette force, comme l'attraction Newtonienne, peut s'obſerver dans tous les corps de la nature, & tend à rapprocher, à unir les molécules entr'elles; & il y ajoutoit l'épithète *élective*, parce qu'elle n'eſt pas la même dans les molécules égales en maſſe, mais qu'elle varie ſuivant la nature des ſubſtances qui tendent à ſe combiner.

Dans cet ouvrage rempli de tant de vérités, ou neuves, ou éclaircies & mieux prouvées, dans celui où, par la comparaiſon des maſſes de métaux qui ſe précipitent mutuellement, M. Bergman cherche le rapport des quantités de

Digitized by Google

phlogiſtique qu'ils contiennent, on voit qu'il admettoit une théorie différente de celle qui paroît preſque généralement adoptée par les chimiſtes françois. Dans M. Bergman, le ſoufre n'eſt pas une ſubſtance qui, s'uniſſant avec un des principes de l'air vital, forme de l'acide vitriolique; c'eſt une combinaiſon de l'acide vitriolique & du phlogiſtique. Elle ſe change en acide lorſqu'elle perd ce phlogiſtique & qu'elle s'unit à la matière de la chaleur, qui eſt elle-même une combinaiſon du phlogiſtique & de l'air vital. Une terre métallique eſt, ſuivant M. Lavoiſier, le métal uni à l'air vital: ſuivant M. Bergman & M. Schéelle, c'eſt une terre unie à la matière de la chaleur, & le métal étoit la même terre unie avec le phlogiſtique. On voit combien les deux explications qui peuvent paroître oppoſées au premier coup-d'œil, ſe rapprochent lorſqu'on vient à les conſidérer de plus près. Auſſi rendent-elles raiſon des phénomènes avec un ſuccès preſque égal; & juſqu'ici il paroît qu'aucune expérience vraiment déciſive n'a ni confirmé, ni détruit aucun des deux ſyſtèmes. Mais quand M. Bergman ſe ſeroit trompé, la ſincérité avec laquelle il n'a donné ſon opinion que comme la plus vraiſemblable à ſes yeux, la modeſtie avec laquelle il emploie le ſyſtème d'explications propoſé par M. Schéele, lorſqu'il lui eût été ſi facile d'en imaginer un autre, devroient lui faire pardonner cette erreur. D'ailleurs on ne pourroit lui faire, ſans injuſtice, le reproche de n'avoir pas aſſez étudié la nouvelle théorie des gaz, reproche qu'ont mérité peut-être quelques partiſans du phlogiſtique, puiſque indépendamment de ſes travaux ſur le gaz aérien, ſur le gaz hépatique des eaux ſulfureuſes, on lui doit la première explication ſolide de la détonation de l'or fulminant, détonation dûe à la production d'un air alkalin.

Une théorie de la terre fait partie des ouvrages de M. Bergman. Mais dans un diſcours ſur la manière de chercher la vérité, ouvrage digne d'un homme qui avoit commencé par donner de grands exemples, il nous apprend lui-même ce que nous devons penſer de ces hypothèſes

philoſophiques. Il croyoit, comme M. Francklin, qu'il ne peut y avoir dans ces ſyſtèmes d'autre mérite que la facilité de les faire, jointe à celle de les abandonner. Il croyoit en même temps qu'en les enviſageant comme de ſimples plans d'expériences ou d'obſervations, ils peuvent avoir quelque utilité : d'ailleurs ils ſervent de cadre pour arranger les faits ſous un ordre plus frappant ; en parlant à l'imagination, ils ſoutiennent une attention foible que laſſeroit une ſuite non interrompue de diſcuſſions & de faits ; & à cet égard ils ſont en quelque ſorte, dans les ſciences, ce que ſont dans la littérature ces romans de morale ou de politique deſtinés à rendre l'inſtruction plus agréable & plus facile.

Les événemens de la vie de M. Bergman ſont peu variés. Placé comme profeſſeur de chimie à Upſal, il n'en ſortit plus que pour faire quelques courſes ſcientifiques dans les mines, & pour aller prendre les eaux lorſque ſa ſanté lui en avoit rendu le ſecours néceſſaire.

Il eut l'honneur d'être élu recteur de l'Univerſité : cette compagnie n'eſt pas ſeulement un corps littéraire ; propriétaire de grandes terres ſur leſquelles elle exerce une autorité très-étendue, jouiſſant d'une juridiction ſur ſes membres & ſur les écoliers, poſſédant un grand nombre de ces immunités, de ces priviléges, que dans les ſiècles qui nous ont précédés on regardoit comme des encouragemens, & qui ne ſervent qu'à décourager le talent, à rallentir l'activité en détruiſant la concurrence ; l'univerſité d'Upſal eſt au milieu de la Suède une ſorte de république. Les profeſſeurs en ſont les chefs ; & tandis que dans les établiſſemens littéraires, toutes les inſtitutions devroient avoir pour but d'y maintenir la paix, & de diſpenſer leurs membres de toute occupation étrangère aux ſciences, la conſtitution de cette univerſité oblige les profeſſeurs à des ſoins qui peuvent les écarter ou les dégoûter de leurs fonctions, & inſpire aux autres corps de l'état, aux perſonnes puiſſantes le deſir de s'y faire des créatures, d'y avoir de l'influence. Ses membres pourroient être tentés quelquefois d'oublier que ce n'eſt pas leur intérêt, mais l'intérêt commun des citoyens, qui a été l'objet de leur

Digitized by Google

établiſſement; & de ſacrifier leur véritable devoir, le zèle pour le progrès des ſciences, à cet eſprit de corps auſſi mépriſable dans ſon principe, moins raiſonnable dans ſes motifs que l'intérêt perſonnel, mais plus audacieux dans ſes excès, & moins ſuſceptible d'être contenu par l'honneur ou par la crainte. Chef de cette univerſité alors partagée en deux grands partis, celui des théologiens unis aux juriſconſultes & celui des phyſiciens, M. Bergman ne s'occupa que de maintenir entr'eux l'union, l'égalité même, quoiqu'il eût contribué plus que perſonne à faire pencher la balance du côté du parti trop long-temps le plus foible; & l'époque de ſa magiſtrature eſt remarquable dans les faſtes de ce corps, par le petit nombre d'affaires & de délibérations que préſentent les regiſtres. Elle le fut auſſi par la ſageſſe de la conduite des écoliers; ils ſont en grand nombre, preſque tous au-deſſus de l'enfance & dans le premier âge des paſſions: ſouvent ils avoient éludé ou bravé la ſévérité des règlemens, & ils furent ſubjugués par leur reſpect pour la gloire de leur chef & leur admiration pour ſon génie. M. Bergman ſavoit que le premier dans une ſociété ſavante, n'eſt ni le chef de cette ſociété, ni l'homme dont la voix y a le plus d'influence; mais celui qui s'eſt illuſtré par un plus grand nombre de découvertes, ou qui en a fait de plus importantes.

Le roi de Pruſſe deſira d'attacher M. Bergman à ſon Académie. Le ſavant Suédois héſita un moment: ſa ſanté altérée par le double travail de l'enſeignement & des recherches chimiques, pouvoit ſe rétablir dans un climat plus doux; il auroit pu s'y livrer ſans partage à des travaux académiques. Mais le roi de Suède avoit été ſon bienfaiteur particulier; il ſut que ſa retraite affligeroit ce monarque, & il n'y ſongea plus: ſeulement il demanda au roi de ne pas lui faire perdre le mérite de ce ſacrifice en augmentant ſes appointemens; mais ſa demande ne fut point écoutée.

La réputation d'un ſavant illuſtre s'accroît par celle de ſes diſciples. Son nom ſe préſente à la poſtérité entouré des

noms célèbres qui ont dû à ſes ſoins une partie de leur éclat; il conſerve enfin ſur les découvertes faites dans ſon école, une eſpèce de droit de ſuzeraineté. Parmi les chimiſtes formés par M. Bergman, nous citerons ſur-tout M. Schéelle, parce qu'il eſt plus particulièrement ſon ouvrage. Un des auditeurs de M. Bergman découvrit par haſard, chez un apothicaire d'Upſal, un jeune élève à qui l'on reprochoit de négliger les travaux de ſon état en s'abandonnant à ſon goût pour la chimie. Il vit ce jeune homme, fut ſurpris des recherches ingénieuſes auxquelles il avoit pu ſe livrer dans un laboratoire particulier, que, malgré la médiocrité de ſa fortune & la gêne à laquelle il étoit ſoumis, il avoit ſu ſe former: cet élève étoit M. Schéelle. M. Bergman inſtruit de cet événement, voulut voir ce jeune homme, fut étonné de ſes connoiſſances, de ſes diſpoſitions heureuſes: ce génie naiſſant ne put échapper à la ſagacité d'un maître habile; dès ce moment M. Schéelle fut ſon diſciple chéri, bientôt ſon digne émule & toujours ſon ami. Au lieu d'affecter ſur lui cette ſupériorité à laquelle un maître renonce avec tant de peine, M. Bergman ſe trouvoit aſſez grand pour ne vouloir que l'égalité; & loin de chercher à s'arroger quelque droit ſur les travaux de M. Schéele, on lit dans ſes lettres à des chimiſtes étrangers, qu'il voyoit avec une véritable douleur que l'erreur les lui attribuât quelquefois. Sa conduite à cet égard fut la même pour tous ſes diſciples; exact à les citer, ardent & habile à faire valoir leurs travaux, il alloit au-delà même de la juſtice rigoureuſe qui malheureuſement auroit encore été un mérite.

La célébrité de M. Bergman lui avoit fait des diſciples dans toutes les contrées de l'Europe. En France, nous citerons en particulier deux magiſtrats qui honorent la magiſtrature par leurs lumières, par leur zèle ardent & éclairé pour le progrès des ſciences, par le courage avec lequel ils ſe ſont élevés au-deſſus des préjugés, & qui en même temps ont fait honneur aux ſciences par l'eſprit d'humanité, de raiſon, de patriotiſme éclairé qu'ils ont porté dans leurs fonctions. On reconnoîtra ici Mrs de Morveau

Digitized by Google

& de Virli. L'un d'eux, M. de Virli, voulut même aller entendre M. Bergman en Suède, & profiter de ſes leçons; & nous devons à M. de Morveau la traduction de l'ouvrage où, ſous le titre modeſte d'Opuſcules, M. Bergman a raſſemblé les plus importantes de ſes recherches.

L'uſage de l'Académie de Stockolm eſt de partager entre ſes membres le travail des éloges décernés à ceux qu'elle a perdus. M. Bergman ſe chargea de celui de Wallerius qui avoit été conſtamment injuſte envers lui, & même envers la chimie, ſur laquelle ſon averſion s'étoit étendue. Nous ne ſe louerons point d'avoir oublié en ce moment ſon ancienne injure; mais il étoit utile que le mérite réel de Wallerius fût apprécié par un homme fait pour le bien connoître, dont le ſuffrage ne ſeroit pas ſuſpect, & M. Bergman fut aſſez ſûr de lui-même pour ne pas craindre de confondre les limites étroites qui ſéparent la juſtice de la ſévérité, & l'indulgence qu'on doit à un ennemi, d'une généroſité qui ſeroit un outrage.

La paſſion de M. Bergman pour les ſciences, avoit épuiſé ſa conſtitution naturellement ardente & délicate. Il prodiguoit ſa ſanté, non-ſeulement pour les travaux qui pouvoient lui procurer des connoiſſances nouvelles ou lui mériter de la gloire, mais encore pour ceux qui, n'étant utiles qu'à l'inſtruction de ſes diſciples, ne lui offroient d'autre récompenſe que le plaiſir d'avoir rempli ſon devoir. Pendant quelque temps les eaux minérales artificielles ſuſpendirent ſes maux, & ce fruit de ſes travaux répara une partie du mal qu'ils lui avoient fait. Les eaux de Medewi en Suède lui ſauvèrent une fois la vie, mais en 1784 il eut encore beſoin de ce ſecours, elles ne lui firent plus aucun effet, & le 8 Juillet de la même année, il ſuccomba ſous le poids de ſes maux, victime de ſon zèle pour ſes devoirs & pour la chimie. Il n'avoit pas encore cinquante ans, & depuis long-temps ſon nom étoit, dans les ſciences, un des premiers de l'Europe.

ÉLOGE
DE M. MORAND.

JEAN-FRANÇOIS-CLÉMENT MORAND, docteur-régent de la Faculté de médecine de Paris, premier médecin du cardinal de Bavière électeur de Cologne, des Académies des Sciences de Stockholm, de Harlem & de Bruxelles; de la Société Royale de Londres, de l'Académie de médecine de Madrid, de la Société botanique de Florence; de la Société économique de Berne, & de la Société d'émulation de Liége, penſionnaire anatomiſte de l'Académie des Sciences, naquit à Paris le 29 Avril 1726, de Sauveur-François Morand, de cette Académie, & de Marie-Clémence Guerin.

Le père de M. Morand comptoit parmi ſes parens, pluſieurs chirurgiens célèbres; lui-même s'étoit illuſtré dans cette profeſſion, & avoit contribué à lui faire obtenir la juſte conſidération dont elle jouit de nos jours. Il étoit naturel qu'il deſirât d'avoir dans ſon fils un ſucceſſeur qui ſoutînt le nom que ſa famille avoit acquis dans la chirurgie. Mais quoique le jeune Morand eût pris pour l'anatomie le goût qu'il ſeroit difficile qu'un ſi bon maître & un exemple ſi glorieux n'euſſent pas réuſſi à lui donner, il préféra l'état de médecin.

Le goût naturel de M. Morand le portoit à cultiver les ſciences, mais beaucoup moins à en approfondir une en particulier, qu'à les effleurer toutes, & à raſſembler ſur chacune les faits ſinguliers ou importans, les obſervations neuves ou utiles qui s'offroient à ſa curioſité, & qu'il cherchoit avec une activité infatigable. En parcourant ſes obſervations

obſervations répandues dans une foule de recueils différens, on eſt également ſurpris de leur nombre & de leur variété. Des analyſes d'eaux minérales, des obſervations ſur la compoſition ou les effets de remèdes nouveaux, & ſur l'utilité de divers inſtrumens de chirurgie ; l'expoſition de pluſieurs maladies extraordinaires obſervées, ſoit dans l'homme, ſoit dans les animaux, & propres à éclairer ſur les ſecrets de l'économie animale ; des remarques ſur quelques phénomènes de botanique ou de météorologie ; l'hiſtoire d'un inſecte, la deſcription d'une mine ou d'une montagne, des obſervations ſur l'altération que différentes ſubſtances ont éprouvée ou dans la terre, ou dans la mer ; des diſſertations ſur des antiquités, & enfin juſqu'à des recherches ſur le lieu de la ſépulture de cet Hermite Pierre, le premier auteur des croiſades, qui doit ſon immortalité à l'honneur funeſte, mais rare pour un particulier, d'avoir été la première cauſe de la mort de pluſieurs millions d'hommes : tel eſt le tableau très-abrégé & très-incomplet de ce qu'offrent les ouvrages épars de M. Morand.

En 1759, il entra dans l'Académie comme adjoint-anatomiſte ; & on trouve dans les Mémoires de la même année, ſa diſſertation ſur la conſtruction intérieure & l'uſage du thymus. Cet organe ſingulier exiſte dans la poitrine du fœtus des animaux vivipares, croît avec eux, & continue même de croître encore dans les premiers temps qui ſuivent la naiſſance ; bientôt après il diminue, s'oblitère & diſparoît preſque en entier. Il exerce donc, dans les premiers temps de la vie, des fonctions qui deviennent enſuite inutiles à la conſervation de l'individu, & n'entrent plus dans l'ordre des loix d'après leſquelles il doit exiſter. Comme les conjectures des anatomiſtes ſur ces fonctions étoient peu ſatisfaiſantes, M. Morand a cru devoir en former de nouvelles ; & il ſuppoſe que, pendant le temps de la geſtation, le thymus ſépare du ſang la partie laiteuſe que lui fournit le placenta. Elle paſſe du thymus dans le canal thorachique, pour prendre enfin la route que ſuit le chyle dans les

animaux adultes. Lorſque l'animal eſt né & qu'il reſpire, ce même organe peut encore ſervir à la ſécrétion d'une partie du ſang, tant que la nouvelle route que prend alors la circulation n'eſt pas aſſez établie, & que le poumon n'exerce pas ſes fonctions d'une manière complète. La poſition du thymus, ſa conſtruction intérieure, la nature des vaiſſeaux qui le parcourent, tout ſemble concourir à rendre vraiſemblable cette opinion de M. Morand; & c'eſt beaucoup en ce genre, où l'ignorance, peut-être à jamais invincible, du premier principe de la vie, ne permet guère de s'élever au-deſſus de la vraiſemblance.

M. Morand s'occupa bientôt après d'un travail d'un autre genre. Il ſe chargea de donner à l'Académie la deſcription de l'art d'exploiter les mines de charbon de terre; minéral dont la nature ſemble avoir tenu en réſerve des maſſes immenſes pour le temps où l'induſtrie des hommes auroit perfectionné tous les arts ſans leſquels ce minéral ſeroit reſté ou inutile ou même inconnu. Cette précaution eſt d'autant plus bienfaiſante, que les progrès des arts accompagnent néceſſairement ceux de l'agriculture, qui ne peut elle-même ſe perfectionner ſans faire diſparoître de la ſurface de la terre les forêts immenſes qui la couvroient. En effet, la diſette de bois dont on ſe plaint déjà depuis long-temps, n'eſt que la ſuite infaillible des progrès de l'agriculture & du commerce. Les forêts doivent diminuer juſqu'à ce que le bois ait acquis le prix naturel qu'il doit avoir relativement aux autres productions, & que ce prix ſoit aſſez fort pour en rendre la culture avantageuſe. Ainſi, les moyens de multiplier les uſages du charbon de terre & de les répandre, ſont devenus un objet important, non pour ménager le bois, mais pour le rendre moins néceſſaire, laiſſer plus de terreins à d'autres productions, & le réſerver pour des uſages dans leſquels il peut être plus difficilement remplacé.

Les travaux de M. Morand, ſur le charbon de terre,

Digitized by Google

renferment à la fois tout ce que les ſciences peuvent apprendre ſur ſon origine ou ſur ſa nature, & les plus petits détails des travaux néceſſaires pour le tirer de la mine, ou des uſages économiques auxquels il peut être utilement employé. M. Morand prenoit au charbon de terre, aux ouvrages qui en ont traité, aux manufactures qui le conſomment, à tout ce qui a quelque rapport, même éloigné, avec cette ſubſtance, cet intérêt vif, cette eſpèce d'enthouſiaſme que l'objet d'une longue occupation ne manque guère d'inſpirer, dont ceux qui ne le partagent pas ne peuvent s'empêcher de s'étonner, que dans le premier mouvement on ſeroit tenté de trouver ridicule, mais qu'on reſpecte, par réflexion, comme la ſource de preſque tout ce qui ſe fait d'utile.

M. Morand entreprit un grand travail relativement aux états de population, objet important en politique comme en médecine. Il raſſembloit avec ſoin, tous les ans, ce qu'il lui étoit poſſible de recueillir, & il ſe propoſoit de donner chaque dixième année le réſultat de ſes obſervations dans les Mémoires de l'Académie des Sciences; mais il n'a pu exécuter ce projet que pour deux époques, celle de 1770 & celle de 1780. Les recherches de ce genre n'ont encore, parmi nous, ni obtenu toute l'eſtime, ni excité tout l'intérêt qu'elles méritent, ſoit parce que l'art d'en tirer des réſultats eſt encore & peu connu, & peu avancé, ſoit parce qu'elles aſſujettiſſent l'eſprit à une marche trop ſimple & trop régulière, qui conduit à quelques vérités utiles, mais avec beaucoup de travail & très-peu de gloire; au lieu qu'on peut obtenir à peu de frais une renommée plus brillante, en renfermant des demi-vérités ou même des erreurs dans des maximes vagues, mais impoſantes, & en les embelliſſant des formes de l'éloquence.

Quoique M. Morand n'eût preſque jamais pratiqué la Médecine, il n'en étoit pas un membre moins zélé de la Faculté. Il y a ſouvent préſidé à des thèſes, dont quelques-unes avoient pour objets des queſtions curieuſes:

telle eſt celle où il demande ſi les héros produiſent des héros.

Cette queſtion de la reſſemblance des pères aux enfans dans les qualités morales, eſt ſûrement une des plus dignes d'occuper les phyſiciens & les philoſophes; mais il faudroit, pour la réſoudre, avoir raſſemblé un nombre d'obſervations d'autant plus grand, qu'il s'y trouve une ſource particulière d'incertitude à laquelle on ne doit pas ſans doute attacher une importance trop grande, mais qu'il ſeroit imprudent de négliger.

L'humanité, le zèle de M. Morand pour le bien public, ne lui permettoient pas de refuſer ſes ſecours toutes les fois qu'une maladie épidémique ou extraordinaire réclamoit ſon aſſiſtance. Il donnoit ſes ſoins aux malheureux & à quelques amis; il étoit même le médecin de trois communautés religieuſes, qui, par la confiance qu'elles lui avoient montrée, avoient vaincu ſa répugnance pour la pratique. Cette confiance n'a pas été trompée, ſi on en juge par leurs regrets & par le deſir qu'elles m'ont témoigné de rendre ici en leur nom, à M. Morand, un témoignage public de leur reconnoiſſance.

M. Morand, fils d'un ancien Académicien, étoit né, pour ainſi dire, dans le ſein de cette compagnie; il en avoit connu dès l'enfance le régime intérieur, & il l'aima toujours comme ſa patrie. Sévèrement attaché à la règle, même dans les petites choſes, ennemi des innovations, mais ſans avoir l'humeur qui accompagne preſque toujours cette diſpoſition, & qui en trahit alors le motif, ceux mêmes dont il combattoit les opinions, reſpectoient la ſincérité de ſon zèle & la pureté de ſes intentions. Nous l'avons vu remplir, il y a peu d'années, les fonctions de directeur, avec ce mélange d'amour pour la règle & de condeſcendance pour ſes confrères, que doit réunir le chef annuel d'une compagnie où il ne peut voir que des égaux; tandis qu'il ſavoit ſoutenir les intérêts de ſon corps avec cette dignité modeſte

Digitized by Google

ſi convenable au repréſentant d'une Académie qui doit toute ſa conſidération à ſon utilité réelle, & au mérite perſonnel de ceux qui la compoſent.

La ſanté de M. Morand paroiſſoit nous promettre de conſerver encore long-temps un confrère qui nous étoit cher; mais il fut attaqué d'une péripneumonie maligne, le 9 août 1784, & il y ſuccomba le 13 du même mois, laiſſant une femme à laquelle il étoit uni par une amitié très-tendre, & dont il ne lui reſtoit pas d'enfans, & un frère, chanoine de la Sainte-Chapelle.

Digitized by Google

ÉLOGE
DE M. CASSINI.

CÉSAR-FRANÇOIS CASSINI DE THURY, noble Siennois, maître des comptes, directeur de l'Obſervatoire, de la Société royale de Londres, de l'Inſtitut de Bologne, des Académies de Berlin & de Munich, penſionnaire aſtronome de l'Académie des ſciences, naquit à Paris le 17 Juin 1714, de Jacques Caſſini & de Suſanne-Françoiſe Charpentier de Charmoi.

Quoique la famille de M. Caſſini, connue depuis pluſieurs ſiècles en Italie, fût comptée parmi les familles ſénatoriales de Sienne, dès le temps du cardinal Caſſini, archevêque de cette ville en 1426, & qu'il y ait eu un ſecond cardinal de ce nom dans la promotion de 1712, c'eſt aux ſciences qu'elle doit ſa principale illuſtration. Le nom de Dominique Caſſini ſera long-temps cité parmi ceux dont s'honore un ſiècle fécond en hommes de génie; & ce qui eſt ſans exemple dans notre hiſtoire, M. le comte de Caſſini, notre confrère, fils de M. de Thury, eſt le quatrième académicien en ligne directe de cette famille, qui, depuis 1669, a conſtamment & ſans interruption donné des aſtronomes à l'Académie.

Le nom de Caſſini impoſoit, pour ainſi dire, au jeune Thury l'obligation d'étudier l'aſtronomie, & de ſe rendre digne de ſuccéder à ſon père à l'Obſervatoire comme parmi nous. M. Maraldi voulut ſe charger de diriger les premières études du petit-fils de Dominique Caſſini dont il étoit l'élève & le neveu, ſes ſoins, aidés des heureuſes diſpoſitions de M. de Thury, eurent un ſi heureux ſuccès,

Digitized by Google

qu'ayant à peine dix ans le jeune Aſtronome calcula les phaſes de l'éclipſe totale de Soleil, qu'on attendoit pour l'année 1727. En 1735, il fut reçu à l'Académie comme adjoint ſurnuméraire à l'âge de vingt-un ans: ſon père y avoit été admis beaucoup plus jeune, à dix-ſept ans ſeulement. On peut croire que dans ces adoptions, en quelque ſorte prématurées, l'Académie avoit compté pour quelque choſe le nom de Caſſini, & que dans l'empire des ſciences, comme ailleurs, une naiſſance illuſtre peut aplanir tous les chemins; mais ſi, dans cette carrière, ce mérite étranger aide quelquefois au talent, du moins il ne peut diſpenſer d'en avoir; & il ſeroit à deſirer qu'on pût en dire autant des avantages que la naiſſance procure dans d'autres états.

Les premiers travaux de M. Caſſini eurent pour objet la vérification de la méridienne qui paſſe par l'Obſervatoire. Il y travailla d'abord avec ſon père, & enſuite avec M. l'abbé de la Caille. Cette méridienne avoit été tracée par Dominique Caſſini; ſon fils & Picard avoient eu part à ce travail, mais les valeurs qu'ils avoient trouvées pour les degrés du méridien en France & pour le degré de longitude pris à Paris, tendoient à faire regarder la terre comme alongée, tandis que les expériences du pendule, la meſure d'un degré de latitude, faite près du pôle, conduiſoient à ſuppoſer à notre globe une forme aplatie, la ſeule qui pût s'accorder avec la théorie Newtonienne. Il paroiſſoit donc néceſſaire de vérifier de nouveau les anciennes meſures, & ſur-tout celle de la baſe, quoiqu'exécutée par Picard, puiſque toutes les autres en dépendoient. M.rs Caſſini s'en chargèrent, y découvrirent une erreur de quelques toiſes; & Jacques Caſſini, après avoir long-temps combattu contre l'aplatiſſement de la terre, eut le mérite d'avoir contribué à détruire la ſeule objection raiſonnable qu'on pût oppoſer à cette opinion.

En même temps que les aſtronomes vérifioient, corrigeoient toutes ces meſures, ils prolongeoient à l'orient & à l'occident de Paris la perpendiculaire à la méridienne.

Digitized by Google

On avoit auſſi formé le projet de faire une deſcription géométrique de la France. Le jeune Caſſini s'occupa de ces travaux avec toute l'activité de ſon âge. Il conçut le plan plus étendu de ne pas borner cette deſcription à la détermination des points des grands triangles qui devoient embraſſer toute la ſurface du royaume, mais de lever le plan topographique de la France entière, de déterminer par ce moyen la diſtance de tous les lieux à la méridienne de Paris & à la perpendiculaire à cette méridienne. Jamais on n'avoit formé en géographie une entrepriſe plus vaſte & d'une utilité plus générale. C'étoit en effet un préliminaire abſolument néceſſaire pour parvenir à une connoiſſance approfondie & détaillée de la France. On ne ſe bornoit pas à marquer ſur la carte tous les objets, même juſqu'à des chaumières iſolées; on devoit y figurer les terreins, autant qu'il étoit poſſible de le faire, par de ſimples hachures. Ces cartes, ainſi exécutées, devenoient une eſpèce de cadre dans lequel toutes les connoiſſances particulières, tous les détails ſur l'élévation des terreins, la pente & la direction des eaux, ſur l'hiſtoire naturelle, ſur les productions de chaque pays, ſur l'étendue des phénomènes de l'atmoſphère, ſur la population & l'hiſtoire naturelle de l'homme, les limites même des coûtumes, des différentes adminiſtrations, des loix de finance ou de commerce, venoient ſe ranger dans un ordre méthodique qui permettoit d'en mieux ſaiſir l'enſemble, d'en tirer des concluſions plus exactes. Cette baſe une fois donnée, ſi on ſe propoſoit d'acquérir une idée générale & exacte de la France, ou d'une de ſes provinces, la partie du travail la plus pénible, la plus diſpendieuſe, devoit ſe trouver toute préparée.

Une entrepriſe ſi utile, mais en même temps ſi difficile, exigeoit de la part du gouvernement des ſecours extraordinaires, & M. de Caſſini en obtint ſans peine.

Le feu Roi qui avoit appris la géographie, dans ſon enfance, du célèbre Guillaume de l'Iſle, avoit conſervé pour cette ſcience un goût aſſez vif: d'ailleurs il n'en eſt point d'une utilité

Digitized by Google

utilité plus immédiate dans la plupart des opérations du gouvernement, & dont le beſoin ſe faſſe plus ſentir à preſque tous les inſtans. Elle a même encore l'avantage, non moins grand, de rendre plus facile l'acquiſition de toutes les connoiſſances qui peuvent être néceſſaires aux princes. Mais malgré l'intérêt conſtant que le Roi prenoit à cette entrepriſe, M. de Sechelles ſupprima les fonds que ſes prédéceſſeurs avoient accordés. Le Roi, qui aimoit M. Caſſini, voulut ſe charger de lui annoncer lui-même cette nouvelle fâcheuſe. *Sire*, lui dit M. Caſſini, *que Votre Majeſté daigne dire ſeulement qu'Elle voit avec peine la ſuſpenſion de cette entrepriſe & qu'Elle en deſire la continuation, je me charge du reſte.* Le Roi y conſentit, mais en plaiſantant M. Caſſini ſur l'inutilité de cette marque d'intérêt; car ce prince, après plus de trente ans de règne, ne connoiſſoit pas encore toute la force de l'influence que l'opinion du monarque a ſur les courtiſans.

Cependant M. Caſſini forma le plan d'une compagnie qui ſe chargeroit de faire les avances, & qui, devenue propriétaire de l'entrepriſe, retireroit ſes fonds ſur la vente des cartes. Le mérite de rendre l'activité à un travail dont le Roi regrettoit la ſuſpenſion, & l'avantage d'acquérir le droit de lui parler d'un objet qui lui étoit agréable, déterminèrent pluſieurs courtiſans à entrer dans cette compagnie; quelques citoyens ſe joignirent à eux dans la vue de contribuer au ſuccès d'un ouvrage utile. L'entrepriſe ſe continua ſous cette nouvelle forme, avec plus de rapidité & de méthode. Bientôt le gouvernement accorda quelques encouragemens; différentes provinces contribuèrent à la dépenſe, & M. Caſſini a eu la conſolation de voir terminer preſque entièrement un travail ſi étendu, & d'en devoir à lui-même preſque tout le ſuccès.

Les points des triangles avoient été déterminés avec toute la préciſion à laquelle les progrès de la phyſique & ceux de l'art de conſtruire les inſtrumens permettoient d'atteindre. Mais on avoit été obligé de partager entre un

grand nombre de coopérateurs le travail de lever l'intérieur de ces triangles; & malgré les moyens de vérification que M. Caſſini s'étoit procurés, l'exactitude de toutes les cartes ne pouvoit être la même; les coopérateurs ne pouvoient avoir ni la même intelligence, ni le même zèle. On put s'apercevoir auſſi que, dans la manière de repréſenter la forme des terreins, on n'avoit ni formé un plan général avec aſſez de ſoin, ni exécuté avec aſſez d'attention celui auquel on s'étoit arrêté; mais en convenant de ces défauts, on ne peut s'empêcher d'avouer que cette entrepriſe, la plus vaſte qui ait été tentée en géographie, eſt en même temps celle dont l'exécution a été la plus exacte.

M. Caſſini ne vouloit pas qu'elle fût bornée à la France; il profita de la guerre de 1741, pour étendre ſes cartes à la Flandre, & vérifier la meſure du degré faite par Snellius. C'étoit la première que les occidentaux euſſent oſé tenter; & ce travail, joint à la découverte de la loi de la réfraction, avoit immortaliſé avec juſtice le nom du ſavant Hollandois. Cette meſure étoit cependant très-fautive; l'erreur paroiſſoit de près de deux mille toiſes ſur un degré, & il étoit curieux de ſavoir quelle en avoit pu être la cauſe. M. Caſſini trouva qu'il falloit l'attribuer preſque uniquement à l'erreur qui avoit été commiſe dans la détermination de la différence de latitude des deux points dont Snellius avoit meſuré la diſtance.

Il embraſſa uniquement dans ſa carte de Flandre, le terrein que les armées Françoiſes avoient occupé; & comme il le diſoit lui-même, où s'arrêtèrent les conquêtes du Roi, là s'arrêtèrent les opérations de ſon aſtronome. Quelquefois il choiſiſſoit pour ſommet d'un de ſes triangles le clocher, ſoit d'une ville aſſiégée, ſoit d'une place dont on préparoit le ſiége; & cette confiance dans la certitude du ſuccès, étoit une manière de flatter les généraux ou le prince, à laquelle peut-être ils n'étoient pas inſenſibles.

En 1761, M. Caſſini fit un voyage en Allemagne. Il avoit pour objet de prolonger juſqu'à Vienne la perpen-

Digitized by Google

diculaire à la méridienne de Paris, d'unir les triangles de la carte de France à des points pris en Allemagne, de préparer les moyens d'étendre à ce vaſte pays le plan qu'on avoit ſuivi pour la France, & d'établir ainſi ſucceſſivement pour toute l'Europe, une uniformité utile en elle-même, & glorieuſe pour la nation qui avoit donné l'exemple.

L'empereur François, l'impératrice reine, les princes de la maiſon de Bavière, les margraves de Bareith & de Bade, les ſouverains eccléſiaſtiques de cette partie de l'empire, ſentirent tous également l'utilité du projet de M. Caſſini, tous s'empreſsèrent d'y concourir. Il étoit à Vienne, le 6 juin 1761, jour du paſſage de Vénus; le temps ne lui permit d'en obſerver que la ſortie: cependant le Soleil paroiſſoit par intervalle, & M. Caſſini eut la facilité de faire quelques obſervations, d'en expliquer l'objet, & d'en développer la méthode à l'archiduc Joſeph, qui étoit venu de Laxembourg pour aſſiſter à cette obſervation. M. Caſſini ſe rappeloit avec plaiſir, dans ſes dernières années, cette circonſtance de ſa vie. Ce ſouvenir ſembloit lui faire contempler avec un intérêt plus vif les efforts heureux & ſoutenus de ce prince pour rendre à la patrie les hommes & les biens que d'antiques abus lui avoient enlevés, détruire les obſtacles que les préjugés & l'ignorance avoient oppoſés aux progrès de l'induſtrie & des lumières, à l'inſtruction comme au bonheur du peuple, & rétablir les habitans de ſes vaſtes états dans ces droits naturels de l'homme, dont l'intolérance & la tyrannie féodale les avoient privés trop long-temps. Enfin, M. Caſſini, toujours occupé de la perfection de ſon grand ouvrage, profita de la dernière paix pour propoſer de joindre à quelques points pris ſur la côte d'Angleterre, ceux qui avoient été déterminés ſur celle de France, & lier ainſi ſa carte générale de ce royaume à la carte des îles Britanniques, de même qu'il l'avoit déjà liée à celles des Pays-bas & de l'Allemagne. Le roi d'Angleterre a bien voulu approuver ce plan.

Si l'on ſe repréſente les détails immenſes qu'exigeoit la

direction d'une telle entrepriſe, ſi on ſonge aux voyages longs & ſouvent pénibles, qui ſe multiplioient d'autant plus pour M. Caſſini, qu'il ne s'étoit repoſé ſur perſonne des déterminations les plus importantes; ſi on obſerve enfin qu'un travail de ce genre, ſouvent preſque purement mécanique & toujours minutieux, fatigue, dégoûte, & ſemble ne devoir laiſſer à l'eſprit aucune activité pour d'autres travaux, on ſera tenté de croire que la direction de la carte de France a dû occuper toute la vie de M. Caſſini, & on jugera en même temps qu'en ſe bornant à ce ſeul ouvrage, il auroit encore aſſez bien rempli ſa carrière, & mérité la reconnoiſſance de ſon pays comme celle des ſavans. Mais il fut de plus un aſtronome très-laborieux; & en voyant la liſte de ſes travaux aſtronomiques, on ſera encore tenté de croire qu'il s'y eſt appliqué tout entier.

M. Caſſini a publié, dans nos Mémoires, une ſuite preſque complète de ces obſervations que le ciel préſente chaque année, dont chacune priſe en elle-même eſt ſans doute peu utile aux progrès de la ſcience, & n'exige, pour être bien faite, que de l'attention & l'habitude d'obſerver, mais dont l'enſemble eſt néceſſaire à la perfection des théories aſtronomiques, ou peut ſervir de baſe à des théories nouvelles; (c'étoit un devoir que lui impoſoit le titre de directeur de l'Obſervatoire).

Il a traité de plus, ſéparément, pluſieurs des queſtions fondamentales de l'aſtronomie. L'on trouve dans les Mémoires qu'il a donnés, des recherches ſur la parallaxe du Soleil, de la Lune, de Vénus & de Mars; un travail ſuivi ſur les réfractions aſtronomiques & ſur le changement que la température produit dans la quantité ou dans la loi de la réfraction; un grand nombre d'obſervations ſur l'obliquité de l'écliptique, ſur la loi des variations qu'elle éprouve; & un examen des différentes méthodes d'obſerver les hauteurs ſolſticiales, d'après lequel il préfère celle qui conſiſte à prendre la diſtance du Soleil à des étoiles fixes dans leſquelles on ne reconnoît point de mouvement propre qui

Digitized by Google

puiſſe nuire à l'exactitude des déterminations, ou pour leſquelles la loi de ces mouvemens eſt bien connue. Pendant plus de cinquante ans, il a cultivé l'aſtronomie dans un temps que la meſure des degrés du méridien, deux paſſages de Vénus ſur le Soleil, ſi importans pour nous en apprendre la diſtance, une diſparition de l'anneau de Saturne, l'application du calcul aux perturbations des planètes & aux mouvemens de l'axe terreſtre, l'introduction des méthodes analytiques dans les queſtions aſtronomiques, la découverte de plus de comètes qu'on n'en avoit obſervé depuis l'origine des ſciences, enfin celle d'une nouvelle planète, rendent une des époques les plus brillantes de l'aſtronomie, qui, par l'invention des lunettes acromatiques & de pluſieurs inſtrumens, acquéroit dans le même temps des moyens nouveaux d'étendre les obſervations & de les faire avec plus d'exactitude; & il eſt peu de ces objets ſi intéreſſans pour cette ſcience, ſur leſquels M. Caſſini n'ait été utile par ſes obſervations ou par ſes recherches.

Il étoit d'un caractère franc & ouvert; ſon ame paroiſſoit inacceſſible à la haine; mais il étoit très-ſenſible à l'amitié, & ſon penchant ſembloit le porter de préférence vers les hommes dont il ſe ſeroit éloigné s'il avoit pu connoître ce ſentiment pénible que la ſupériorité des talens ou de la réputation réveille trop ſouvent. Il jouiſſoit du ſuccès des autres, non avec cette fierté noble d'un homme qui compte ſur ceux qu'il mérite, ou qui a le courage de s'en paſſer, mais par un ſentiment naturel, par l'effet d'un premier mouvement & ſans aucun retour ſur lui-même. L'exiſtence d'un nouveau talent, une nouvelle couronne qu'un de ſes confrères ajoutoit à ſa gloire, étoit pour lui une jouiſſance nouvelle, & le plaiſir naïf & pur qu'il éprouvoit alors, ſe peignoit dans ſes regards & dans ſa contenance.

M. Caſſini eut des liaiſons dans différentes claſſes de la ſociété, & ne fut déplacé dans aucune. Eſtimé des magiſtrats ſes confrères, par ſa probité, il étoit cher à ſes confrères Académiciens par ſa ſimplicité & ſa douceur; quoiqu'admis

Digitized by Google

dans la familiarité des Grands, il ſut conſerver leur eſtime: On lui a reproché d'avoir trop cherché, peut-être, à s'approcher d'eux. En effet, l'eſpèce de domination qu'ils aiment à exercer ſur les occupations, ſur les ſentimens même de ceux qu'ils nomment leurs amis, ſemble incompatible avec cette liberté & cette indépendance dont la perte enlève au talent la moitié de ſes forces & de ſes reſſources. Plus la raiſon nous a convaincus de l'égalité primitive que la nature a miſe entre les hommes, plus elle nous fait une loi d'éviter l'intimité de ceux que l'opinion a placés au-deſſus de nous. Il eſt d'ailleurs difficile, en formant ces liaiſons, d'échapper au ſoupçon de partager les motifs de vanité ou d'intérêt qui engagent les hommes ordinaires à en braver les inconvéniens & le danger; mais du moins elles n'ont valu à M. Caſſini ni fortune, ni places, ni titres, & cette exception à l'uſage eſt trop rare pour qu'il puiſſe avoir beſoin d'apologie.

On doit ſans doute reſpecter le philoſophe qui ſait éviter ces liaiſons à la fois ſi ſéduiſantes & ſi dangereuſes; cependant, ſi tous ceux qui ont des lumières avoient le courage & la prudence de s'y refuſer, ce ſeroit un malheur & pour les ſciences & pour les grands eux-mêmes, & ſur-tout pour ceux ſur le ſort deſquels les grands ont de l'influence. Il ne faut donc pas blâmer les ſavans qui imiteroient, à cet égard, M. Caſſini, pourvu toutefois qu'ils n'oublient point que pour être exempts de tout reproche, ils doivent imiter auſſi ſon déſintéreſſement & ſa modeſtie.

M. Caſſini étoit né avec une conſtitution très-forte; ſes travaux pour la géographie, l'avoient obligé à des voyages pénibles; graviſſant des montages eſcarpées où il falloit braver, dans une même ſaiſon, tantôt un ſoleil brûlant, tantôt le froid de leurs neiges éternelles, paſſant ſouvent des nuits en plein air ou dans quelques chaumières écartées, obligé de s'y contenter d'une nourriture groſſière ou malſaine, ſon tempérament avoit réſiſté à ces fatigues, & ſem-

Digitized by Google

bloit avoir acquis de nouvelles forces. Mais il fut attaqué d'une rétention d'urine dont les ſuites le condamnèrent, les douze dernières années de ſa vie, à des incommodités habituelles & douloureuſes, ſouvent même à des ſouffrances cruelles. Il ſupporta cet état avec ce courage calme d'une ame forte, unie à des organes vigoureux : ſon activité, ſa douceur, ſa gaieté, n'en étoient pas altérées.

Cette diſpoſition de l'ame eſt un des meilleurs moyens de combattre les maladies & d'y réſiſter ; auſſi M. Caſſini étoit-il reſté dans un état qui laiſſoit l'eſpérance de le conſerver encore long-temps, lorſqu'au mois d'août 1784, il fut attaqué de la petite vérole, à laquelle il ſuccomba le 4 ſeptembre.

Il a laiſſé une fille & un fils, M. le comte de Caſſini, membre de cette compagnie, & directeur de l'Obſervatoire, comme ſes ancêtres, qui, en recueillant cette partie ſi noble de leur héritage, a auſſi ſuccédé à l'attachement de l'Académie pour un nom ſi cher aux ſciences.

Digitized by Google

ÉLOGE

DE M. LE COMTE DE MILLY.

NICOLAS-CHRISTIERN DE THY, comte de Milly, des académies de Madrid & de Harlem, aſſocié-libre de celle des Sciences, naquit le 18 juin 1728.

La famille de M. le comte de Milly eſt établie dans le Beaujolois, depuis plus de quatre ſiècles, & la conformité du nom & des armes ſemble prouver qu'elle eſt une branche de l'ancienne maiſon de Thy, originaire de l'Auxois, connue dès le commencement du onzième ſiècle, & également illuſtrée par ſes alliances & par les grandes charges qu'elle a occupées à la cour des ducs de Bourgogne de la première race.

M. le comte de Milly ſuivit, comme ſes ancêtres, le parti des armes. N'ayant qu'une fortune médiocre & point de parens à la cour, il ne pouvoit porter ſes eſpérances au-deſſus de l'avancement tardif & borné que l'on peut attendre du temps & des ſervices; mais il croyoit remplir un devoir. Il avoit peu d'ambition, & il trouvoit des reſſources contre le dégoût & contre l'ennui, dans ſon penchant pour les plaiſirs de la jeuneſſe, & dans un goût plus vif encore pour les études ſérieuſes.

Dans la guerre de 1741, il ſe trouva aux batailles de Laufeld & de Raucoux; & dans la guerre de 1756, à celles de Roſbac, de Crevelt & de Minden. L'année qui ſuivit cette dernière bataille, il entra au ſervice de M. le duc de Wirtemberg, allié de la France; &, en moins d'un an, il devint colonel, adjudant-général, chambellan & chevalier de

Digitized by Google

l'ordre de l'Aigle-rouge. Mais ce qui fut plus important pour le bonheur du reſte de ſa vie, la fin de la guerre & le loiſir dont jouiſſent ſi paiſiblement dans les cours ceux que l'intrigue n'y occupe pas, permirent à ſon amour pour les ſciences de ſe développer & de s'exercer. Le goût des arts & le deſir de ſervir l'humanité le conduiſirent à l'étude de la chimie. Lorſqu'il revint dans ſa patrie, en 1771, il y rapporta un ouvrage très-détaillé, ſur les procédés employés dans la fabrication de la porcelaine de Saxe; & l'Académie jugea cet ouvrage digne d'entrer dans ſa collection des arts.

Il obtint, à cette époque, l'agrément d'une charge de lieutenant des gardes-ſuiſſes de Monſieur, & le brevet de colonel. Depuis plus de dix ans il avoit mérité & obtenu la croix de Saint-Louis; il ſe crut permis alors d'abandonner la carrière militaire, pour ſe livrer uniquement aux ſciences, & quelques années après, une place d'aſſocié-libre dans l'Académie fut la récompenſe de ce dévouement.

On ne doit pas attendre d'un homme qui, depuis quatorze ans juſqu'à plus de quarante, a vécu dans les garniſons, dans les camps & dans les cours; ces grands ouvrages, qui ne peuvent être que le fruit d'un travail conſtant & ſuivi, & qui exigent qu'on ſoit accoutumé dès l'enfance à ſe rendre maître de ſon temps, à dominer ſes paſſions & ſes goûts, à déployer toutes ſes forces. Auſſi lorſque M. de Milly a donné ſes recherches ſur l'activité des diſſolvans, auxquels on imprime un mouvement rapide & continu; ſur l'application de cette idée aux effets médicinaux des bains; ſur l'acidité de l'air fixe, alors peu connue & même conteſtée; ſur la nature du fluide aériforme qui ſe dégage des pores du corps humain lorſqu'il eſt plongé dans l'eau; ſur l'emploi d'une chaleur graduée &, ſoutenue dans l'analyſe animale & végétale; ſur les couleurs que les préparations de platine peuvent fournir à la peinture; enfin ſur la revification des chaux métalliques par l'électricité, il eût été injuſte de ſe plaindre qu'il ſe bornât à préſenter de ſimples eſſais, &

Digitized by Google

on a dû applaudir aux vues ingénieuſes ou utiles que ces eſſais renferment.

Nous devons à M. le comte de Milly l'art du poêlier. Cet art eſt proprement celui d'employer toute la chaleur que peut donner une certaine maſſe de combuſtible à échauffer l'air d'un appartement ou d'une maiſon, & d'obtenir dans toutes les parties d'une même pièce une chaleur uniforme que l'on puiſſe graduer facilement.

La néceſſité l'a fait naître dans les pays du Nord, dans les forêts de l'Allemagne. C'eſt-là que M. de Milly l'avoit obſervé, & il avoit ſenti combien on devoit deſirer de le voir ſe répandre & ſe perfectionner dans les climats plus tempérés, y rendre les habitations plus ſaines & plus commodes, & donner en même temps les moyens d'épargner une denrée qui devient d'autant plus précieuſe & plus rare, que les pays ſont & plus peuplés & mieux cultivés. Mais malheureuſement les hommes opulens ont encore plus de vanité que de molleſſe, & préfèrent l'agrément ou la magnificence à la commodité réelle; tandis que ceux qui auroient le plus beſoin d'épargner ſur leur dépenſe, ne ſont pas aſſez riches pour ſonger aux moyens d'être économes.

Ce n'eſt pas que dans ces climats plus doux, la rareté réelle ou apparente des combuſtibles ne ſe ſoit fait ſentir plus d'une fois; mais au lieu de chercher dans la phyſique des moyens, ou de ménager ces ſubſtances, ou d'en augmenter la production, on a cru, par une erreur que l'habitude doit en quelque ſorte rendre excuſable, pouvoir réparer, par des règlemens, un mal dont la multiplicité des règlemens inutiles étoit déjà la principale cauſe.

La chimie n'a été pendant long-temps qu'un recueil de procédés preſque tous ſecrets, ou qui du moins avoient commencé par l'être. Il n'eſt donc pas étonnant que ceux qui cultivent cette ſcience ſoient plus diſpoſés que les autres ſavans à croire qu'il en exiſte encore; à s'occuper de pénétrer ceux qu'on annonce, à donner quelque confiance aux

Digitized by Google

hommes qui leur promettent de les initier dans ces myſtères. M. le comte de Milly partagea cette foibleſſe avec des chimiſtes très-célèbres. Mais heureuſement ce goût ne lui avoit pas fait perdre celui des recherches vraiment ſcientifiques, c'étoit pour lui une diverſion à des travaux plus ſérieux, un véritable amuſement beaucoup moins frivole que la plupart de ceux auxquels ſe livrent les hommes même qui paſſent pour les plus ſages auprès de la multitude.

M. le Comte de Milly, avide de connoiſſances, & prompt à embraſſer tous les moyens d'en acquérir, avoit voulu être admis dans toutes les ſociétés où il pouvoit eſpérer de trouver quelques lumières, & ſur-tout dans celles qui, faiſant profeſſion d'avoir une doctrine ſecrète, excitent une curioſité plus vive. Il croyoit d'ailleurs ces aſſociations utiles en général pour réunir entr'eux les hommes qui ont ſecoué le joug des préjugés populaires, & qui, s'ils manquent d'un point de réunion, ſont expoſés à ſe trouver ſans force contre les troupes plus ou moins nombreuſes que l'erreur raſſemble ſous cent drapeaux différens.

Il s'étoit attaché particulièrement à cette ſociété, dont l'origine eſt inconnue, ou du moins obſcurcie par des fables, qui, répandue dans l'Europe depuis pluſieurs ſiècles, tantôt ignorée & tantôt l'objet d'une curioſité inquiète, a eſſuyé ſouvent des perſécutions ſans avoir jamais mérité de reproches; qui, en cherchant à cacher le véritable eſprit de ſon inſtitution ſous un langage bizarre, & ſous une foule de cérémonies burleſques, a cependant toujours compté des ſages parmi ſes membres; qui, enfin, ne ſe faiſant connoître au-dehors que par des actions de bienfaiſance, eût mérité peut-être que la calomnie reſpectât ſes myſtères. S'il arrive un jour qu'ils ſoient dévoilés, on n'y trouvera ſans doute que les précautions néceſſaires, dans les ſiècles d'ignorance, à des hommes réunis par le beſoin d'exercer librement leur raiſon. Eh! qui pourroit encore ſoupçonner l'innocence de ces myſtères, lorſqu'on voit parmi les

noms qu'uniſſoit cette confraternité, celui de ce jeune prince, le ſeul qui depuis les temps hiſtoriques ait ſacrifié ſa vie pour l'humanité, tandis que tant d'autres ne l'ont immolée qu'à l'ambition ou à la gloire *!

M. le comte de Milly vivoit dans le monde, & il y étoit aimé; doux, complaiſant, facile, ayant même autant de galanterie qu'on peut en avoir ſans être frivole, c'étoit ſeulement dans la ſociété des ſavans qu'il laiſſoit apercevoir quelques traces d'une ſuſceptibilité trés-délicate; mais il avoit aſſez d'empire ſur lui même pour revenir ſans peine, & ſoumettre à la raiſon les foibleſſes d'un amour-propre d'autant plus ſenſible, mais auſſi d'autant plus excuſable, que, dans le peu de temps qu'il avoit conſacré aux ſciences, il n'avoit pu acquérir ces titres éclatans qui élèvent au-deſſus de l'opinion une ame avide de renommée. Auſſi dans la ſeule diſcuſſion qu'il ait eue avec ſes confrères, lorſqu'il en vit pluſieurs combattre ce qu'il avoit avancé ſur la revivification des chaux métalliques par l'électricité, il parut d'abord très-ſenſible à cette contradiction, mais il ne fit aucun effort pour ſoutenir ſon opinion, ne répondit pas aux objections, & laiſſa tranquillement à d'autres phiſiciens le ſoin de le défendre.

Né avec un tempérament robuſte, & s'étant aſſujetti au régime pithagoricien dans toute ſa rigueur, M. le comte de Milly paroiſſoit devoir ſe promettre une longue carrière; cependant nous l'avons perdu le 17 Septembre 1784, à l'âge de 56 ans ſeulement. Il avoit appris ou découvert pluſieurs remèdes particuliers; & comme il ne ſe permettoit pas de les donner à d'autres ſans les avoir éprouvés ſur lui-même; on a prétendu que ces eſſais avoit altéré ſa conſtitution. L'enthouſiaſme qu'il montroit pour ces remèdes, dans les premiers momens, a donné lieu à cette opinion; mais il ſavoit bientôt les juger de ſang-froid, & cette

* Le prince Léopold de Brunſwick.

première chaleur n'étoit qu'une preuve de plus de ſa bonne foi & de ſon zèle pour la conſervation des hommes.

Si ceux qui l'ont peu connu étoient tentés de lui faire quelque reproche ſur cet enthouſiaſme, l'eſtime dont il jouiſſoit parmi nous ſuffiroit pour en laver ſa mémoire. On ſait que, depuis ſon inſtitution, l'Académie n'a ceſſé d'oppoſer un zèle infatigable à toutes ces merveilles ſi ſagement couvertes par leurs premiers inventeurs, des voiles du myſtère, & qu'elle a regardé conſtamment le ſoin de s'élever contre elles & d'en détromper le public, comme un de ſes premiers devoirs, comme un moyen de ſervir à la fois les ſciences & l'humanité.

Digitized by Google

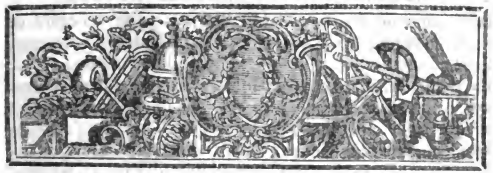
Digitized by Google

MÉMOIRES
DE
MATHÉMATIQUE
ET
DE PHYSIQUE.

Digitized by Google

MÉMOIRES

Digitized by Google



MÉMOIRES
DE
MATHÉMATIQUE
ET
DE PHYSIQUE,
TIRÉS DES REGISTRES
de l'Académie Royale des Sciences.
Année M. DCCLXXXIV.

MÉMOIRE
Sur les Inégalités séculaires des Planètes & des Satellites.

Par M. DE LA PLACE.

I.

LES Planètes ſont aſſujetties, en vertu de leur action mutuelle, à des inégalités qui troublent l'ellipticité de leurs orbites. Les unes ſont périodiques & dépendent de

Digitized by Google

la position de ces corps, soit entr'eux, soit à l'égard de leurs aphélies; elles sont peu considérables relativement à l'équation du centre, & se rétablissent d'elles-mêmes, après un petit nombre d'années; les autres altèrent les élémens des orbites par des nuances presque insensibles à chaque révolution des Planètes; mais ces altérations, en s'accumulant sans cesse, finissent par changer entièrement la nature & la position des orbites: comme la suite des siècles les rend très-remarquables, on les a nommées *inégalités séculaires.*

On peut considérer les inégalités périodiques, comme autant d'oscillations très-petites que fait chaque Planète autour d'un point en mouvement sur l'ellipse qu'elle décriroit par l'action seule du Soleil; & si l'on imagine que les élémens de cette ellipse subissent en même-temps des variations très-lentes, & dont les périodes embrassent un grand nombre de siècles, on aura une juste idée des inégalités séculaires.

Parmi ces inégalités, la plus intéressante est celle qui peut altérer les moyens mouvemens des Planètes. La plupart des Astronomes ont admis une équation séculaire proportionnelle aux carrés des temps, dans les moyens mouvemens de Jupiter & de Saturne. Les Géomètres qui se sont occupés avec le plus de succès de la théorie de ces Planètes, M.rs Euler & de la Grange avoient cru en trouver la cause dans l'action mutuelle de ces deux corps; mais leurs résultats différoient tellement entr'eux, qu'il y avoit lieu d'y soupçonner quelque erreur; c'est ce qui me détermina à reprendre cette matière, & à la traiter avec tout le soin que mérite son importance. En portant la précision jusqu'aux troisièmes puissances inclusivement des excentricités & des inclinaisons des orbites, je trouvai que la théorie ne donne aucunes inégalités séculaires dans les moyens mouvemens & dans les moyennes distances des Planètes au Soleil; d'où je conclus que ces inégalités sont nulles ou du moins insensibles, depuis l'époque des observations les plus anciennes jusqu'à nos jours.

Ce résultat suffit aux besoins de l'Astronomie dont les

Digitized by Google

plus anciennes obſervations qui nous ſoient parvenues avec quelque vraiſemblance, ne remontent pas au-de-là de cinq mille ans. M. de la Grange l'a étendu depuis à un temps illimité, en faiſant voir par une analyſe ingénieuſe & ſimple, que les moyennes diſtances des Planètes au Soleil ſont immuables, & leurs moyens mouvemens uniformes, ce qui eſt également vrai pour les Satellites, puiſqu'ils forment autour de leurs Planètes principales, des ſyſtèmes ſemblables à celui des Planètes autour du Soleil. Ainſi les Planètes & les Satellites conſervent toujours les mêmes diſtances moyennes aux foyers des forces principales qui les animent, du moins lorſque l'on n'a égard qu'à leur action mutuelle, & lorſque l'on ſuppoſe leurs moyens mouvemens incommenſurables entr'eux, comme cela exiſte pour les Planètes de notre ſyſtème.

Il eſt cependant impoſſible de ne pas reconnoître des variations très-ſenſibles dans les révolutions de Jupiter & de Saturne. Si l'on compare entr'elles, les obſervations de ces deux Planètes, faites depuis le renouvellement de l'Aſtronomie; on trouve conſtamment le mouvement de Jupiter plus rapide, & celui de Saturne plus lent, que par la comparaiſon des obſervations modernes avec les anciennes. Halley, dans ſes Tables de Jupiter, emploie une équation ſéculaire, additive au moyen mouvement, proportionnelle au carré du temps, & de $3^{d}\,49'$, en deux mille ans. Cela ſuppoſe qu'en comparant les obſervations modernes entr'elles, il a trouvé le mouvement annuel de Jupiter, plus grand de $6'',9$, que par leur comparaiſon avec les anciennes obſervations. Ce grand Aſtronome emploie pareillement dans ſes Tables de Saturne, une équation ſéculaire, ſouſtractive du moyen mouvement, & de $9^{d}\,16'$, en deux mille ans; ce qui indique que la comparaiſon des obſervations modernes entr'elles, lui a donné le mouvement annuel de Saturne, moindre de $16'',7$, que celui qui réſulte de leur comparaiſon avec les anciennes. En effet, les oppoſitions de Saturne de 1594, 1595,

1596 & 1597, comparées à celles de 1713, 1714, 1715, 1716 & 1717, donnent un mouvement annuel plus petit de 16″, que les oppoſitions de 1714 & de 1715, comparées à celle de l'an 228 avant notre Ere.

Dans l'impoſſibilité d'expliquer ces variations par l'action ſeule des Planètes, je ſoupçonnai d'abord que l'action des Comètes en étoit la cauſe ; mais en les conſidérant enſuite avec attention, leur marche me parut s'accorder ſi bien avec le réſultat de l'action des Planètes, que j'abandonnai cette hypothèſe. Une propriété générale de l'action des Planètes entr'elles, eſt que ſi l'on n'a égard qu'aux quantités qui ont de très-longues périodes, la ſomme des maſſes de chaque Planète, diviſées reſpectivement par les grands axes de leurs orbites, reſte toujours à très-peu-près conſtante; d'où il ſuit que les carrés des moyens mouvemens étant réciproques aux cubes de ces axes, ſi le mouvement de Saturne ſe rallentit par l'action de Jupiter, celui de Jupiter doit s'accélérer par l'action de Saturne, ce qui eſt conforme à ce que l'on obſerve. De plus, en ſuppoſant avec M. de la Grange, que la maſſe du Soleil étant l'unité, celle de Jupiter eſt $\frac{1}{1067,195}$, & celle de Saturne eſt $\frac{1}{3358,40}$; on trouve que le retardement de Saturne doit être à l'accélération de Jupiter, à très-peu-près, comme 7 eſt à 3; ainſi l'équation ſéculaire de Saturne étant ſuppoſée de $9^d\ 16'$, celle de Jupiter doit être de $3^d\ 58'$, ce qui ne diffère que de 9 minutes du réſultat de Halley. Il eſt donc fort probable que les variations obſervées dans les mouvemens de Jupiter & de Saturne, ſont un effet de leur action mutuelle ; & puiſqu'il eſt conſtant que cette action ne peut y produire aucunes inégalités, ſoit conſtamment croiſſantes, ſoit périodiques, mais d'une période très-longue & indépendante de la ſituation de ces Planètes, & qu'elle n'y cauſe que des inégalités dépendantes de leur configuration entre elles ;

Digitized by Google

il eſt naturel de penſer qu'il exiſte dans leur théorie, une inégalité conſidérable de ce genre, dont la période eſt fort longue, & d'où réſultent ces variations.

En examinant les circonſtances du mouvement de Jupiter & de Saturne, on aperçoit aiſément que leurs moyens mouvemens approchent beaucoup d'être commenſurables, & que cinq fois le moyen mouvement de Saturne eſt à très-peu-près égal à deux fois celui de Jupiter; d'où j'ai conclu que les termes qui, dans les équations différentielles du mouvement de ces Planètes, ont pour argument, cinq fois la longitude moyenne de Saturne, moins deux fois celle de Jupiter, pouvoient devenir ſenſibles par les intégrations, quoique multipliés par les cubes & les produits de trois dimenſions des excentricités & des inclinaiſons des orbites. J'ai regardé conſéquemment ces inégalités, comme une cauſe très-vraiſemblable des variations obſervées dans les mouvemens de Jupiter & de Saturne. La probabilité de cette cauſe & l'importance de cet objet, m'ont déterminé à entreprendre le calcul long & pénible, néceſſaire pour m'en aſſurer. Le réſultat de ce calcul a pleinement confirmé ma conjecture, en me faiſant voir, 1.° qu'il exiſte dans la théorie de Saturne, une grande équation d'environ $47'$, dont la période eſt à peu-près de huit cents ſoixante-dix-ſept ans, & dépend de cinq fois le moyen mouvement de Saturne, moins deux fois celui de Jupiter; 2.° que dans la théorie de Jupiter, il exiſte une équation d'un ſigne contraire, d'environ $20'$, & dont la période eſt la même.

Si l'on nomme nt le moyen mouvement ſyderal de Jupiter, depuis 1700; $n't$ celui de Saturne: je trouve qu'en n'ayant égard qu'aux inégalités précédentes, la longitude comptée de l'équinoxe de 1700, eſt pour Jupiter

$$nt + \varepsilon + 20'' . \text{ſin.} (5n't - 2nt + 49^d\,8'\,40'')$$

& que pour Saturne elle eſt

$$n't + \varepsilon' - 46'\,50'' . \text{ſin.} (5n't - 2nt + 49^d\,8'\,40'').$$

Digitized by Google

ε & ε' étant deux conſtantes qui dépendent de la longitude des deux Planètes au commencement de 1700.

J'ai déterminé ces valeurs d'après les élémens des Tables de Halley, & en adoptant les déterminations précédentes des maſſes de Jupiter & de Saturne; j'ai ſeulement augmenté le mouvement annuel de Saturne donné par ces Tables, de 16″,7, & j'ai diminué celui de Jupiter de 6″,9, pour ramener ces mouvemens à ceux que Halley auroit trouvés par la comparaiſon des obſervations modernes avec les anciennes. Les coéfficiens numériques de ces valeurs ceſſent d'avoir lieu après un temps conſidérable, à cauſe de la variabilité des élémens des orbites; mais ils peuvent ſervir ſans erreur ſenſible depuis Tycho juſqu'à nous, ce qui ſuffit pour la comparaiſon des obſervations modernes: il eſt facile d'ailleurs de les étendre à un temps quelconque. On peut obſerver que le coéfficient relatif au mouvement de Jupiter, a un ſigne contraire à celui du coéfficient de Saturne, & qu'il eſt à ce dernier, à très-peu-près, dans le rapport de 3 à 7.

Si l'on compare les formules précédentes aux obſervations, on trouve entre les unes & les autres un accord très-ſatisfaiſant, & qui fournit une nouvelle preuve de l'admirable théorie de la peſanteur univerſelle. Ainſi, par exemple, l'oppoſition de Saturne de l'an 228 avant notre Ere, comparée à celles de 1714 & de 1715, doit donner, à peu-près, le moyen mouvement de Saturne, parce que l'inégalité précédente eſt peu ſenſible dans le grand intervalle qui ſépare ces oppoſitions; mais en comparant l'oppoſition de 1595 avec celle de 1715, le mouvement annuel de Saturne doit, ſuivant nos formules, paroître plus petit que le véritable, de 16″,8; les obſervations donnent 16″; l'imperfection des obſervations du ſeizième ſiècle ne permet pas un plus parfait accord. Le mouvement annuel de Saturne doit donc paroître maintenant ſe ralentir de 16 à 17″; & comme, par les formules précédentes, l'accélération apparente de Jupiter eſt au ralentiſſement apparent de Saturne, dans le rapport de 3 à 7;

Digitized by Google

le mouvement annuel de Jupiter doit paroître s'accélérer d'environ 7", ce qui eſt entièrement conforme aux déterminations de Halley. Ces deux Phénomènes ont été à leur *maximum* vers 1580; depuis cette époque, les moyens mouvemens apparens ſe ſont rapprochés ſans ceſſe, des véritables moyens mouvemens.

M. Lambert a publié dans les Mémoires de Berlin pour l'année 1773, un travail intéreſſant ſur les inégalités de Jupiter & de Saturne. Il a cherché à déterminer empyriquement la loi des erreurs des Tables de Hallei, & il a trouvé qu'il falloit corriger les moyens mouvemens des Tables de Saturne, en leur ajoutant, à partir de 1640, une équation ſéculaire proportionnelle au carré des temps, & de 6',5 pour le premier ſiècle; & comme Hallei emploie pour cette Planète, une équation ſéculaire ſouſtractive du moyen mouvement, & de 1',4 pour le premier ſiècle; il eſt clair que la correction de M. Lambert revient à ajouter depuis 1640, au moyen mouvement de Saturne, ſuppoſé uniforme, une équation ſéculaire de 5',1 pour le premier ſiècle. Cet illuſtre Géomètre applique pareillement aux mouvemens des Tables de Jupiter, une équation ſéculaire ſouſtractive, & de 3',2 pour le premier ſiècle, à partir de 1657. Ces corrections ont été publiées dans le ſecond volume du recueil des Tables aſtronomiques de l'Académie de Berlin: elles ont une marche contraire à celle des équations ſéculaires de Halley, & d'ailleurs elles ſont incompatibles avec les obſervations anciennes; mais les Savans Editeurs de ces Tables, obſervent « que ſelon toute apparence, l'équation empyrique de M. Lambert n'augmente pas toujours dans « le rapport des carrés des temps; car il ſemble qu'elle « varie, que ces variations ſont périodiques & qu'il faudra « une longue ſuite d'années pour en découvrir la loi; par « conſéquent cette équation ne ſervira pour les temps à venir, « que juſqu'à ce qu'on puiſſe déterminer par les obſervations « qu'on fera dans la ſuite, quelle eſt ſa propriété ».

Si l'on tranſporte à l'époque de 1640, la formule

Digitized by Google

précédente relative à Saturne, & que l'on en réduiſe le ſinus dans une ſuite ordonnée par rapport aux puiſſances du temps écoulé depuis cette époque; on trouve que le terme proportionnel au carré du temps eſt poſitif & de 5′,0 pour le premier ſiècle, ce qui s'accorde quant au ſigne, avec le réſultat de M. Lambert, & ce qui n'en diffère que de 0′,1 pour la quantité. La formule relative à Jupiter, tranſportée à l'époque de 1657, & réduite en ſérie, donne pour le terme proportionnel au carré du temps, une quantité négative & de 2′,7 pour le premier ſiècle, ce qui s'accorde quant au ſigne, avec le réſultat de M. Lambert, & ce qui n'en diffère que de 0′,5 pour la quantité. Il n'eſt donc pas douteux que la vraie loi de l'équation empyrique de cet Auteur, ne ſoit renfermée dans nos formules, & il eſt aſſez remarquable qu'il ait approché auſſi près des réſultats de la théorie, par la comparaiſon ſeule de cent douze ans d'obſervations. Au reſte la réduction des ſinus en ſérie, en rejetant les puiſſances du temps ſupérieures au carré, ne peut être employée que dans un intervalle de ſoixante ans.

Les expreſſions de la longitude de Jupiter & de Saturne, renferment encore des termes très-ſenſibles, qui coincideroient avec les termes dûs au mouvement elliptique, ſi l'on avoit exactement $5\,n' = 2\,n$.

Ces termes ſont pour Jupiter

$$2'\,39''.\text{ſin.}\,(3\,nt - 5\,n't - 41^d\,56') + 58''.\text{ſin.}\,(5\,n't - nt - 34^d\,31'\,33''),$$

& pour Saturne,

$$-13'\,16''.\text{ſin.}\,(2\,nt - 4\,n't - 2^d\,27'\,4'') - 2'\,40''.\text{ſin.}\,(6\,n't - 2\,nt - 60^d\,30'\,16'').$$

On peut les conſidérer comme le réſultat de variations dans les excentricités des orbites & dans la poſition des abſides, & dont la période eſt de huit cens ſoixante-dix-ſept ans. Ils expliquent pourquoi dans le dernier ſiècle & dans celui-ci, l'accroiſſement de l'équation du centre de Jupiter

Jupiter, la diminution de celle de Saturne, & les mouvemens de leurs aphélies ont paru plus grands qu'ils n'ont dû l'être en vertu des seules inégalités séculaires.

Pour avoir la longitude vraie de Jupiter & de Saturne, il faut ajouter aux termes précédens, ceux qui appartiennent au mouvement elliptique, & ceux que produisent les perturbations, en ayant égard aux premières puissances des excentricités des orbites. Les Géomètres ont déjà considéré ces derniers termes; mais les différences que présentent leurs résultats, en rend la vérification indispensable. J'ai rempli cet objet dans une nouvelle théorie de ces deux Planètes, qui paroîtra dans le volume suivant de ces Mémoires. Il résulte de cette théorie, que toutes les oppositions anciennes & modernes de Jupiter & de Saturne, peuvent être représentées avec la précision dont elles sont susceptibles, au moyen des inégalités précédentes auxquelles il faut par conséquent attribuer les dérangemens singuliers observés dans le mouvement de Saturne, & dont on ignoroit les loix & la cause. Il auroit fallu plusieurs siècles d'observations suivies, pour déterminer empyriquement ces inégalités, à cause de la longueur de leur période; ainsi sur ce point, la théorie de la pesanteur a devancé l'observation.

Je reviens présentement à la Loi générale de l'uniformité des moyens mouvemens célestes. Ceux des trois premiers Satellites de Jupiter offrent un rapport remarquable, & qui peut donner lieu de craindre que cette loi ne soit pas observée à leur égard. La discussion de ce rapport, de la cause qui le produit, & de son influence sur les mouvemens des Satellites, m'a paru mériter l'attention des Géomètres & des Astronomes.

Les observations nous aprennent que le moyen mouvement du premier satellite de Jupiter, est environ deux fois plus grand que celui du second, qui lui-même est à-peu-près le double de celui du troisième satellite; & la théorie de la pesanteur universelle fait voir que ces rapports sont la source des principales inégalités de ces Astres. Il suit

de-là que la différence des moyens mouvemens du premier & du ſecond Satellite, eſt égale à deux fois la différence des moyens mouvemens du ſecond & du troiſième; mais ce rapport eſt incomparablement plus exact que les précédens, & les moyens mouvemens des Tables en approchent tellement, qu'il faut un très-long intervalle pour que la petite quantité dont elles s'en éloignent, puiſſe devenir ſenſible. De-là naiſſent pluſieurs phénomènes conſtans dans la configuration des trois premiers Satellites; tel eſt, entr'autres, l'impoſſibilité de les voir s'éclipſer à la fois, d'ici à un grand nombre de ſiècles, & ſi l'on part des moyens mouvemens & des époques que M. Wargentin a employées dans ſes Tables, on trouve que cela ne peut arriver qu'après 1,317,900 ans *(Mémoires d'Upſal, année 1743, page 41)*. Une différence de ſix tierces dans le mouvement annuel du ſecond Satellite, ſuffiroit pour rendre ce phénomène à jamais impoſſible, & M. Wargentin ne répond qu'à une ou deux ſecondes près, des mouvemens annuels dont il a fait uſage.

Maintenant on peut établir comme une règle générale, que ſi le réſultat d'une longue ſuite d'obſervations préciſes, approche d'un rapport ſimple, de manière que la différence ſoit inappréciable par les obſervations, & puiſſe être attribuée aux erreurs dont elles ſont ſuſceptibles; ce rapport eſt probablement celui de la Nature. Ainſi les obſervations n'ayant fait apercevoir aucune différence entre les moyens mouvemens de révolution de la Lune ſur elle-même & autour de la Terre, on eſt fondé à ſuppoſer que ces deux mouvemens ſont rigoureuſement les mêmes. En appliquant cette règle aux mouvemens des trois premiers ſatellites de Jupiter, nous pouvons en conclure avec une grande probabilité, que la différence des moyens mouvemens du premier & du ſecond, eſt exactement égale au double de la différence des moyens mouvemens du ſecond & du troiſième. Cette égalité n'eſt pas l'effet du haſard, & il eſt contre toute vraiſemblance de ſuppoſer que ces trois corps

Digitized by Google

ont été placés primitivement aux distances qu'elle exige ; il est donc naturel de penser que leur attraction mutuelle en est la véritable cause. C'est ainsi que l'action de la Terre sur la Lune, établit entre les moyens mouvemens de rotation & de révolution de ce Satellite, une égalité rigoureuse ; quoiqu'à l'origine ces deux mouvemens aient pu différer entr'eux. Je me propose dans ce Mémoire, de discuter ce point important du système du monde, & d'examiner si le rapport que présentent les moyens mouvemens des trois premiers satellites de Jupiter, doit se maintenir sans cesse en vertu des Loix de la pesanteur universelle. Cette recherche est très-intéressante pour la théorie du second Satellite ; les principales inégalités qu'il éprouve, dépendent des actions du premier & du troisième ; mais le rapport précédent donne à ces inégalités la même période, & les fond en une seule qui, dans les Tables, forme la grande équation de ce Satellite ; si ce rapport n'étoit pas rigoureux, ces deux inégalités se sépareroient dans la suite des siècles, & les Tables du second Satellite cesseroient de représenter son mouvement. Voici maintenant ce qui résulte de mon analyse.

J'observe d'abord que les termes proportionnels aux premières puissances des masses perturbatrices, ne pouvant pas donner l'explication du rapport dont je viens de parler, il faut la chercher dans les termes qui dépendent des carrés & des produits de ces masses ; je discute en conséquence les termes de cet ordre qui peuvent produire ce rapport. En nommant t le temps, nt, $n't$, $n''t$, les moyens mouvemens du premier, du second & du troisième Satellite ; en désignant par s, la quantité $n - 3n' + 2n''$, & par V, la longitude moyenne du premier Satellite, comptée d'un point fixe sur l'orbite de Jupiter, moins trois fois celle du second, plus deux fois celle du troisième ; je trouve que les termes multipliés par les produits deux à deux, des masses de ces Satellites, introduisent dans les valeurs de s & de V, des quantités proportionnelles au temps. En les

faisant ensuite disparoître par la méthode que j'ai donnée ailleurs pour cet objet, je parviens à deux équations différentielles du premier ordre entre s, V & t. Leurs intégrales comparées aux observations, donnent une explication complète du phénomène dont il s'agit, & présentent en même-temps plusieurs conséquences intéressantes.

La première est que s & V sont des quantités périodiques, & qu'ainsi en faisant abstraction des quantités de cette nature, on a rigoureusement $n + 2n'' = 3n'$. On est donc assuré par-là que la différence des moyens mouvemens du premier & du second Sattellite, est rigoureusement égale à deux fois la différence des moyens mouvemens du second & du troisième. C'est une condition à laquelle les moyens mouvemens des Tables doivent satisfaire, & comme ceux dont M. Wargentin a fait usage, la rempliſſent à très-peu-près, on doit en conclure qu'ils sont fort approchés, & qu'ils n'ont besoin que de très-légères corrections.

La seconde conséquence est que la condition précédente n'exige point qu'à l'origine, les trois Satellites aient été exactement placés aux distances respectives qui, par les loix de Képler, donnent l'équation $n + 2n'' = 3n'$; il suffit qu'ils en aient été peu éloignés, & alors leur attraction mutuelle établit entre leurs moyens mouvemens, cette égalité rigoureuse.

Une troisième conséquence est que l'on ne doit point craindre que dans la suite des siècles, les Tables du second Satellite cessent d'être exactes, du moins relativement à leur équation principale.

Enfin, la quatrième conséquence que je tire de mon analyse, est que si l'on fait abstraction des quantités périodiques, l'angle V est de six signes; c'est-à-dire, que la longitude moyenne du premier Satellite, moins trois fois celle du second, plus deux fois celle du troisième, est égale à 180^d; c'est une nouvelle condition que les Tables doivent remplir exactement. Celles de M. Wargentin donnent au commencement de 1760, $V = 180^d + 30'$, ce qui

Digitized by Google

s'éloigne peu de 180^d; suivant les Tables de M. Bailli, la valeur moyenne de V ne s'en éloignoit que de $12'$ à la même époque; ces écarts sont une imperfection des Tables, & doivent être comptés parmi les causes des erreurs dont elles sont encore susceptibles.

L'angle V est soumis à une inégalité périodique analogue aux oscillations d'un pendule; elle affecte inégalement les mouvemens des trois Satellites, suivant des rapports dépendans de leurs masses & de leurs distances au centre de Jupiter; la durée de sa période dépend des mêmes quantités. La masse du second Satellite est assez bien déterminée par les inégalités qu'elle produit dans le mouvement du premier; mais les masses du premier & du troisième Satellite sont encore inconnues: il existe seulement entr'elles un rapport que donnent les inégalités du second Satellite, & c'est par son moyen que j'ai trouvé que le temps de la libration de V est compris entre quatre ans un huitième & onze ans un tiers. L'instant où cette libration est nulle & son étendue sont des arbitraires que l'observation peut seule déterminer. Si l'on ne considère que l'action des trois premiers satellites de Jupiter, leur mouvement dépend de neuf équations différentielles du second ordre, dont les intégrales finies renferment dix-huit constantes arbitraires. Les excentricités & les inclinaisons des orbites, les positions des nœuds & des aphélies déterminent douze de ces constantes; les moyens mouvemens & leurs époques formeroient les six autres, sans les deux conditions auxquelles ces six arbitraires sont assujetties, & qui les réduisent à quatre: c'est pour y suppléer que l'expression de V renferme deux arbitraires.

Puisque les Tables représentent assez bien les observations, sans avoir égard à l'inégalité précédente, elle doit être peu considérable; mais l'incertitude qui règne encore sur la plupart des élémens de la théorie des satellites de Jupiter, rend sa détermination très-difficile. C'est un point que je laisse à discuter aux Astronomes; il me suffit ici de leur indiquer cette inégalité, comme un objet digne de

Digitized by Google

leur attention, & d'établir que les moyens mouvemens & les époques des Tables doivent remplir exactement les deux conditions ſuivantes :

1.° Le moyen mouvement du premier Satellite, plus deux fois celui du troiſième, eſt égal à trois fois celui du ſecond.

2.° La longitude moyenne du premier Satellite, moins trois fois celle du ſecond, plus deux fois celle du troiſième, eſt conſtamment égale à 180^d.

Ces conditions ſubſiſteroient encore, en ſuppoſant dans les moyens mouvemens des Satellites, des accélérations ſemblables à celle que les obſervations paroiſſent indiquer dans le moyen mouvement de la Lune. L'action mutuelle des trois premiers Satellites les maintiendroit ſans ceſſe, en ſorte que le ſyſtème de ces corps, en deſcendant inſenſiblement vers Jupiter, en vertu de ces accélérations, conſerveroit toujours les rapports néceſſaires à l'exiſtence des conditions précédentes. Ainſi l'action de la Terre ſur la Lune maintient l'égalité rigoureuſe des deux mouvemens de rotation & de révolution de ce Satellite, malgré l'accélération continuelle du ſecond de ces deux mouvemens; parce que le premier devient en même raiſon plus rapide. De-là réſulte cette conſéquence, ſavoir, que ſi pour mieux repréſenter les obſervations, on admet une équation ſéculaire dans le moyen mouvement de l'un des trois premiers Satellites de Jupiter, ainſi que M. Bailli l'a fait dans ſes Tables du premier Satellite; il faut en ſuppoſer de ſemblables dans les moyens mouvemens des deux autres, & les ordonner de manière que l'équation du premier, plus deux fois celle du troiſième, ſoit égale à trois fois l'équation du ſecond Satellite.

On voit, par ce que nous venons de dire, que l'action mutuelle des ſatellites de Jupiter ne produit dans leurs mouvemens, que des inégalités périodiques; & nous pouvons généralement en conclure que ſi l'on n'a égard qu'aux loix de la gravitation univerſelle, les moyennes diſtances des corps céleſtes aux foyers de leurs forces principales, ſont immuables. Il n'en eſt pas ainſi des autres élémens de

Digitized by Google

leurs orbites : on ſait que leurs excentricités, leurs inclinaiſons, les poſitions de leurs nœuds & de leurs aphélies varient ſans ceſſe ; & il exiſte des méthodes fort ſimples pour déterminer ces variations, en ſuppoſant les orbites peu excentriques & peu inclinées les unes aux autres. Mais les excentricités & les inclinaiſons ſont-elles renfermées conſtamment dans d'étroites limites ? C'eſt un point important du Syſtème du Monde qui reſte encore à éclaircir, & dont la diſcuſſion eſt la ſeule choſe que laiſſe maintenant à deſirer, la théorie des inégalités ſéculaires. J'ai prouvé dans la ſeconde partie de nos Mémoires pour l'année 1772, que ſi l'on ne conſidère que l'action de deux Planètes, les excentricités & les inclinaiſons de leurs orbites ſont toujours très-petites ; & M. de la Grange a fait voir dans les Mémoires de Berlin, pour l'année 1782, que cela eſt également vrai pour les orbites des Planètes de notre Syſtème, en partant des ſuppoſitions les plus vraiſemblables ſur leurs maſſes. Cependant l'incertitude où l'on eſt encore à l'égard de pluſieurs de ces maſſes, peut laiſſer quelques doutes ſur ce réſultat, & il eſt néceſſaire de s'aſſurer par une méthode indépendante de toute hypothèſe, qu'en vertu de l'action mutuelle des Planètes, les excentricités & les inclinaiſons de leurs orbites ſont toujours peu conſidérables. Je me propoſe encore de remplir cet objet dans ce Mémoire, en établiſſant d'une manière générale, que les inégalités ſéculaires des excentricités & des inclinaiſons des orbites des Planètes, ne renferment ni arcs-de-cercle, ni exponentielles ; d'où il ſuit qu'en vertu de l'action de ces corps, leurs orbites s'aplatiſſent plus ou moins, mais en ne s'écartant que très-peu de la forme circulaire, & en conſervant toujours les mêmes grands axes ; les poſitions reſpectives de leurs plans & de leurs aphélies varient ſans ceſſe, elles s'inclinent plus ou moins les unes aux autres, mais elles ſont toujours renfermées dans une zône d'un petit nombre de degrés.

Digitized by Google

II.

Équations générales du mouvement d'un système de Corps qui s'attirent mutuellement.

CONSIDÉRONS le mouvement d'un système de corps m, m', m'', &c. autour d'un corps M dont nous prendrons la masse pour unité de masse. Soient x, y, z, les trois coordonnées rectangles de m, & r, sa distance à M, ou son rayon vecteur, l'origine des coordonnées étant au centre de M. Marquons d'un trait, de deux traits, &c, les mêmes lettres relatives à m', m'', &c. & nommons λ, la fonction

$$\frac{m.m'}{\sqrt{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]}}+\frac{m.m''}{\sqrt{[(x''-x)^2+(y''-y)^2+(z''-z)^2]}}+\frac{m'.m''}{\sqrt{[(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2]}}+\text{ &c.}$$

cette fonction étant la somme des produits des masses m, m' m'', &c. prises deux à deux, divisés par les distances mutuelles de ces masses; cela posé :

Si l'on transporte en sens contraire, au corps m, la force dont M est animé par l'action du système; on trouvera facilement que dans son mouvement relatif autour de M, il sera animé parallèlement aux axes des x, des y, & des z, par les trois forces suivantes

$$-\frac{(1+m).x}{r^3}-\frac{m'.x'}{r'^3}-\frac{m''.x''}{r''^3}-\text{ &c.}+\frac{1}{m}.\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right);$$

$$-\frac{(1+m).y}{r^3}-\frac{m'.y'}{r'^3}-\frac{m''.y''}{r''^3}-\text{ &c.}+\frac{1}{m}.\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right);$$

$$-\frac{(1+m).z}{r^3}-\frac{m'.z'}{r'^3}-\frac{m''.z''}{r''^3}-\text{ &c.}+\frac{1}{m}.\left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right).$$

Ces trois forces tendent à augmenter les coordonnées

x,

Digitized by Google

x, y, z; en désignant donc par ∂t, l'élément du temps, supposé constant, on aura par les principes connus de Dynamique, les trois équations différentielles

$$0 = \frac{\partial\partial x}{\partial t^2} + \frac{(1+m)\cdot x}{r^3} + \frac{m'\cdot x'}{r'^3} + \&c. - \frac{1}{m}\cdot\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right); (1)$$

$$0 = \frac{\partial\partial y}{\partial t^2} + \frac{(1+m)\cdot y}{r^3} + \frac{m'\cdot y'}{r'^3} + \&c. - \frac{1}{m}\cdot\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right); (2)$$

$$0 = \frac{\partial\partial z}{\partial t^2} + \frac{(1+m)\cdot z}{r^3} + \frac{m'\cdot z'}{r'^3} + \&c. - \frac{1}{m}\cdot\left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right); (3)$$

En changeant successivement dans ces équations, m, x, y, z, r, dans m', x', y', z', r'; m'', x'', y'', z'', r'', &c, & réciproquement; on aura les équations différentielles relatives à m', m'', &c.

III.

Si l'on multiplie l'équation (1) par

$$2m\partial x - \frac{2m\cdot(m\partial x + m'\partial x' + \&c.)}{1+m+m'+\&c.},$$

l'équation (2) par

$$2m\partial y - \frac{2m\cdot(m\partial y + m'\partial y' + \&c.)}{1+m+m'+\&c.},$$

& l'équation (3) par

$$2m\partial z - \frac{2m\cdot(m\partial z + m'\partial z' + \&c.)}{1+m+m'+\&c.};$$

si l'on multiplie pareillement la première des équations différentielles relatives à m', par

$$2m'\partial x' - \frac{2m'\cdot(m\partial x + m'\partial x' + \&c.)}{1+m+m'+\&c.},$$

la seconde par

$$2m'\partial y' - \frac{2m'\cdot(m\partial y + m'\partial y' + \&c.)}{1+m+m'+\&c.},$$

& la troiſième par

$$2\,m'\,\partial\zeta' \;-\!-\; \frac{2\,m'.(m\partial\zeta + m'\partial\zeta' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.},$$

& ainſi du reſte ; ſi l'on ajoute enſuite toutes ces équations, & ſi l'on obſerve que

$$0 = \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x'}\right) + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x''}\right) + \&c;$$

$$0 = \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y'}\right) + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y''}\right) + \&c;$$

$$0 = \left(\frac{\partial\lambda}{\partial\zeta}\right) + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial\zeta'}\right) + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial\zeta''}\right) + \&c;$$

$$r = \sqrt{(x^2 + y^2 + \zeta^2)};$$

$$r' = \sqrt{(x'^2 + y'^2 + \zeta'^2)};$$

&c.

on formera l'équation ſuivante,

$$0 = 2\,m.\frac{(\partial x.\partial\partial x + \partial y.\partial\partial y + \partial\zeta.\partial\partial\zeta)}{\partial t^2} + 2\,m'.\frac{(\partial x'.\partial\partial x' + \partial y'.\partial\partial y' + \partial\zeta'.\partial\partial\zeta')}{\partial t^2} + \&c.$$

$$- 2.\frac{(m\partial x + m'\partial x' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.}.\frac{(m\partial\partial x + m'\partial\partial x' + \&c.)}{\partial t^2}$$

$$- 2.\frac{(m\partial y + m'\partial y' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.}.\frac{(m\partial\partial y + m'\partial\partial y' + \&c.)}{\partial t^2}$$

$$- 2.\frac{(m\partial\zeta + m'\partial\zeta' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.}.\frac{(m\partial\partial\zeta + m'\partial\partial\zeta' + \&c.)}{\partial t^2}$$

$$+ 2.\left(\frac{m\partial r}{r^2} + \frac{m'\partial r'}{r'^2} + \&c.\right) - 2\,\partial\lambda.$$

Cette équation donne, en l'intégrant,

$$\left.\begin{aligned} 0 = f + m.\frac{(\partial x^2 + \partial y^2 + \partial\zeta^2)}{\partial t^2} + m'.\frac{(\partial x'^2 + \partial y'^2 + \partial\zeta'^2)}{\partial t^2} + \&c. \\ - \frac{(m\partial x + m'\partial x' \&c.)^2}{(1 + m + m' + \&c.)\partial t^2} - \frac{(m\partial y + m'\partial y' + \&c.)^2}{(1 + m + m' + \&c.)\partial t^2} \\ - \frac{(m\partial\zeta + m'\partial\zeta' + \&c.)^2}{(1 + m + m' + \&c.)\partial t^2} - 2.\left(\frac{m}{r} + \frac{m'}{r'} + \&c.\right) - 2\lambda \end{aligned}\right\}; \quad (4)$$

f étant une conſtante arbitraire.

On peut encore obtenir trois intégrales des équations différentielles du mouvement du ſyſtème, de la maniere ſuivante.

Si l'on multiplie l'équation (1) par

$$-my + \frac{m.(my + m'y' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.},$$

& l'équation (2) par

$$mx - \frac{m.(mx + m'x' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.};$$

ſi l'on multiplie pareillement, la première des équations relatives à m', par

$$-m'y' + \frac{m'.(my + m'y' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.},$$

& la ſeconde par

$$m'x' - \frac{m'.(mx + m'x' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.};$$

& ainſi du reſte; ſi l'on ajoute enſuite toutes ces équations, en obſervant que

$$0 = x\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right) - y\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right) + x'\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y'}\right) - y'\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x'}\right) + \&c.$$

$$0 = \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x'}\right) + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y'}\right) + \&c.$$

on aura

$$0 = m.\frac{(x\partial\partial y - y\partial\partial x)}{\partial t^2} + m'.\frac{(x'\partial\partial y' - y'\partial\partial x')}{\partial t^2} + \&c.$$

$$- \frac{(mx + m'x' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.}.\frac{(m\partial\partial y + m'\partial\partial y' + \&c.)}{\partial t^2}$$

$$+ \frac{(my + m'y' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.}.\frac{(m\partial\partial x + m'\partial\partial x' + \&c.)}{\partial t^2};$$

Digitized by Google

équation dont l'intégrale eſt

$$\left.\begin{aligned} c = {} & m \cdot \frac{(x\,\partial y - y\,\partial x)}{\partial t} + m' \cdot \frac{(x'\,\partial y' - y'\,\partial x')}{\partial t} + \&c. \\ & - \frac{(mx + m'x' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.} \cdot \frac{(m\,\partial y + m'\,\partial y' + \&c.)}{\partial t} \\ & + \frac{(my + m'y' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.} \cdot \frac{(m\,\partial x + m'\,\partial x' + \&c.)}{\partial t} \end{aligned}\right\} ; \quad (5)$$

c étant une conſtante arbitraire.

On parviendra de la même maniere aux deux intégrales ſuivantes,

$$\left.\begin{aligned} c' = {} & m \cdot \frac{(x\,\partial z - z\,\partial x)}{\partial t} + m' \cdot \frac{(x'\,\partial z' - z'\,\partial x')}{\partial t} + \&c. \\ & - \frac{(mx + m'x' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.} \cdot \frac{(m\,\partial z + m'\,\partial z' + \&c.)}{\partial t} \\ & + \frac{(mz + m'z' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.} \cdot \frac{(m\,\partial x + m'\,\partial x' + \&c.)}{\partial t} \end{aligned}\right\} ; \quad (6)$$

$$\left.\begin{aligned} c'' = {} & m \cdot \frac{(y\,\partial z - z\,\partial y)}{\partial t} + m' \cdot \frac{(y'\,\partial z' - z'\,\partial y')}{\partial t} + \&c. \\ & - \frac{(my + m'y' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.} \cdot \frac{(m\,\partial z + m'\,\partial z' + \&c.)}{\partial t} \\ & + \frac{(mz + m'z' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.} \cdot \frac{(m\,\partial y + m'\,\partial y' + \&c.)}{\partial t} \end{aligned}\right\} ; \quad (7)$$

c' & c'' étant deux arbitraires. Ces quatre intégrales ſont les ſeules que l'on peut obtenir dans l'état actuel de l'analyſe.

IV.

Si l'on ſuppoſe les maſſes m, m', &c. extrêmement petites; chacune d'elles décrira à très-peu-près à chaque révolution, une ellipſe autour de M. En vertu des inégalités ſéculaires, les élémens de ces ellipſes varieront par des nuances imperceptibles; mais la ſuite des ſiècles rendra ces variations

très-ſenſibles. Les intégrales précédentes établiſſent entre elles, des rapports conſtans que nous allons déterminer.

Soit a, le demi-grand axe de l'ellipſe que m décriroit autour de M, ſi l'on ne conſidéroit que l'action de ces deux corps; on aura, comme l'on ſait

$$\frac{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}{\partial t^2} = \frac{2.(1+m)}{r} - \frac{1+m}{a}.$$

Cette équation n'aura plus lieu, ſi l'on a égard à l'action des autres corps m', m'', &c; cependant, ſi l'on obſerve que l'orbite de m peut toujours être conſidérée à chaque révolution, comme une ellipſe, aux quantités périodiques près, qui troublent le mouvement de ce corps; on verra que cette équation eſt encore à très-peu-près exacte après un temps quelconque; mais le demi-grand axe a pourra n'être plus le même qu'à l'origine.

Il ſuit de-là qu'en ayant égard à l'action de tous les corps du ſyſtème, on a

$$\frac{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}{\partial t^2} = \frac{2.(1+m)}{r} - \frac{1+m}{a} + \psi,$$

ψ étant une fonction périodique de l'ordre des maſſes perturbatrices.

Si l'on nomme pareillement a', a'', &c, les demi-grands axes des orbites que m', m'', &c, décriroient à chaque révolution, ſans les perturbations qu'ils éprouvent, on aura

$$\frac{\partial x'^2 + \partial y'^2 + \partial z'^2}{\partial t^2} = \frac{2.(1+m')}{r'} - \frac{1+m'}{a'} + \psi',$$

$$\frac{\partial x''^2 + \partial y''^2 + \partial z''^2}{\partial t^2} = \frac{2.(1+m'')}{r''} - \frac{1+m''}{a''} + \psi'';$$

&c.

ψ', ψ'', &c, étant des quantités périodiques de l'ordre m,

En substituant ces valeurs dans l'équation (4) de l'*article précédent*, elle deviendra

$$f = \frac{m}{a} + \frac{m'}{a'} + \frac{m''}{a''} + \&c.$$

$$- \frac{m'.(m' + m'' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.} \cdot \left(\frac{a}{r} - \frac{r}{a'}\right)$$

$$- \frac{m'.(m + m'' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.} \cdot \left(\frac{z}{r'} - \frac{r}{a'}\right)$$

$$- \&c.$$

$$- \frac{(2\,m\,m'.\partial x.\partial x' + 2\,m\,m''.\partial x.\partial x'' + 2\,m'.m''.\partial x'.\partial x'' + \&c.)}{(1 + m + m' + \&c.).\partial t^2}$$

$$- \frac{(2\,m\,m'.\partial y.\partial y' + 2\,m\,m''.\partial y.\partial y'' + 2\,m'.m''.\partial y'.\partial y'' + \&c.)}{(1 + m + m' + \&c.).\partial t^2}$$

$$- \frac{(2\,m\,m'.\partial z.\partial z' + 2\,m\,m''.\partial z.\partial z'' + 2\,m'.m''.\partial z'.\partial z'' + \&c.)}{(1 + m + m' + \&c.).\partial t^2}$$

$$- 2\lambda - \frac{m.(1 + m' + m'' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.} \cdot \psi - \frac{m'.(1 + m + m'' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.} \times$$

$$\psi' - \&c.$$

Les quantités

$$\frac{m\,m'\,\partial x\,\partial x'}{\partial t^2}, \quad \frac{m\,m''.\partial x\,\partial x''}{\partial t^2}, \quad \frac{m\,m'.\partial y.\partial y'}{\partial t^2}, \quad \&c.$$

sont périodiques, dans la supposition du mouvement elliptique, & les termes que les perturbations y introduiroient, seroient de l'ordre m^3 ; en négligeant donc les quantités de cet ordre, & celles de l'ordre m^2, qui ne sont que périodiques ou constantes, l'équation précédente prendra cette forme très-simple,

$$f = \frac{m}{a} + \frac{m'}{a'} + \frac{m''}{a''} + \&c; \quad (8)$$

ainsi, en supposant que la suite des siècles amène des changemens remarquables dans les demi-grands axes a,

Digitized by Google

a', &c. des orbites ; ils doivent toujours satisfaire à l'équation précédente dans laquelle la constante f est invariable.

On voit par-là que pour avoir entre les élémens des orbites supposées elliptiques, les relations que donnent les intégrales précédentes des équations différentielles du mouvement du système, il suffit de substituer dans ces intégrales, les valeurs des coordonnées relatives au mouvement elliptique ; en négligeant ensuite les quantités constantes ou périodiques de l'ordre m^2, on aura entre les élémens des ellipses, autant d'équations qu'il y a d'intégrales.

Déterminons d'après ce principe, les relations entre les élémens qui résultent des integrales (5), (6) & (7) de l'*article précédent*. Si l'on nomme $e.a$ l'excentricité de l'orbite de m, & si l'on néglige m vis-à-vis de l'unité ; l'aire que son rayon vecteur trace autour de M, durant l'instant ∂t, sera par la théorie du mouvement elliptique, $\frac{1}{2}\partial t.\sqrt{}[a.(1-e^2)]$. Cette aire projetée sur le plan des x & des y, est diminuée dans le rapport du cosinus de l'inclinaison de l'orbite de m sur ce plan, au rayon. Soit θ, la tangente de cette inclinaison ; l'aire projetée sera $\frac{1}{2}\partial t.\sqrt{}\left[\frac{a.(1-e^2)}{1+\theta^2}\right]$; ce sera dans l'hypothèse elliptique, la valeur de $\frac{1}{2}.(x\partial y - y\partial x)$.

Si l'on nomme pareillement, $e'.a'$, $e''.a''$, &c, les excentricités des orbites de m', m'', &c ; θ, θ', θ'', &c, les tangentes des inclinaisons de leurs orbites ;

$$\frac{1}{2}\partial t.\sqrt{}\left[\frac{a'(1-e'^2)}{1+\theta'^2}\right], \frac{1}{2}\partial t.\sqrt{}\left[\frac{a''.(1-e''^2)}{1+\theta''^2}\right], \text{ &c.}$$

seront dans l'hypothèse elliptique, les valeurs de

$$\frac{1}{2}.(x'\partial y' - y'\partial x'), \frac{1}{2}.(x''\partial y'' - y''\partial x''), \text{ &c.}$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (5) de l'*article*

précédent, & en négligeant les quantités conſtantes ou périodiques de l'ordre m^2, on aura

$$\left.\begin{array}{l} c = m.\sqrt{\left[\frac{a.(1-e^2)}{1+\theta^2}\right]} + m'.\sqrt{\left[\frac{a'.(1-e'^2)}{1+\theta'^2}\right]} \\ \qquad + m''.\sqrt{\left[\frac{a''.(1-e''^2)}{1+\theta''^2}\right]} + \&c. \end{array}\right\}; \quad (9)$$

en ſuppoſant donc qu'après un temps conſidérable, les excentricités & les inclinaiſons des orbites ſubiſſent des changemens remarquables, elles doivent toujours ſatisfaire à l'équation précédente dans laquelle la conſtante c eſt invariable.

Les équations (6) & (7) de l'*article précédent* fourniſſent encore deux relations entre les élémens des orbites; mais il eſt plus facile de les tirer immédiatement de l'équation (9), en y ſubſtituant ſucceſſivement, au lieu de θ, θ', &c, les tangentes des inclinaiſons des orbites ſur le plan des x & des z, & ſur celui des y & des z. Nommons I, l'angle que forme avec l'axe des x, l'interſection du plan de l'orbite de m, & du plan des x & des y. Il eſt aiſé de voir par la trigonométrie ſphérique, que la tangente de l'inclinaiſon de cette orbite ſur le plan des x & des z, ſera $\sqrt{\left(\frac{1+\theta^2.\text{ſin. }I^2}{\theta^2.\text{cof. }I^2}\right)}$, & que la tangente de l'inclinaiſon de la même orbite ſur le plan des y & des z, ſera $\sqrt{\left(\frac{1+\theta^2.\text{cof. }I^2}{\theta^2.\text{ſin. }I^2}\right)}$; ſoit donc

$$\theta.\text{ſin. }I = p; \quad \theta.\text{cof. }I = q;$$

ces tangentes ſeront $\frac{1}{q}.\sqrt{(1+p^2)}$, $\frac{1}{p}.\sqrt{(1+q^2)}$.

En marquant d'un trait, de deux traits, &c. les lettres I, p, q, relatives à m'. m''. &c, on aura les tangentes des inclinaiſons des orbites de ces corps ſur le plan des x & des z, & ſur celui des y & des z. En ſubſtituant enſuite

enſuite ces tangentes, au lieu de θ, θ', &c, dans l'équation (9), on aura les deux équations ſuivantes,

$$c' = m\,q\,.\,V\left[\frac{a\,.\,(1-e^2)}{1+\theta^2}\right] + m''\,q''\,.\,V\left[\frac{a''\,.\,(1-e''^2)}{1+\theta''^2}\right] + m'''\,.\,q'''\,.\,V\left[\frac{a'''\,.\,(1-e'''^2)}{1+\theta'''^2}\right] + \&c. \quad (10)$$

$$c'' = m\,p\,.\,V\left[\frac{a\,.\,(1-e^2)}{1+\theta^2}\right] + m''\,p''\,.\,V\left[\frac{a''\,.\,(1-e''^2)}{1+\theta''^2}\right] + m'''\,.\,p'''\,.\,V\left[\frac{a'''\,.\,(1-e'''^2)}{1+\theta'''^2}\right] + \&c. \quad (11)$$

dans leſquelles les conſtantes c' & c'', ſont invariables.

V.

Sur les moyens mouvemens des trois premiers ſatellites de Jupiter.

Considérons préſentement les mouvemens des trois premiers ſatellites de Jupiter. Nous obſerverons d'abord que le mouvement du quatrième, n'offrant aucun rapport de commenſurabilité avec ceux des trois autres, on peut négliger ici ſon action. On peut, par la même raiſon, négliger l'action du Soleil; enfin, on peut faire abſtraction de la figure de Jupiter, dont l'influence ſur les variations des grands axes eſt nulle. Soient donc m, m', m'', les maſſes du premier, du ſecond & du troiſième ſatellite de Jupiter dont nous prendrons la maſſe M pour unité de maſſe. Suppoſons qu'après un temps conſidérable, les demi-grands axes a, a', a'', &c, ſe changent dans

$$a + \delta a,\ a' + \delta a',\ a'' + \delta a'';$$

ſi l'on prend pour le plan des x & des y, celui de l'orbite de Jupiter, & que l'on néglige les carrés des excentricités

& des inclinaisons des orbites, & ceux de δa, $\delta a'$, $\delta a''$; les équations (8) & (9) de l'*article précédent*, donneront, en les différenciant par rapport à la caractéristique δ,

$$0 = \frac{m.\delta a}{a^{\frac{1}{2}}} + \frac{m'.\delta a'}{a'^{\frac{1}{2}}} + \frac{m''.\delta a''}{a''^{\frac{1}{2}}};$$

$$0 = \frac{m.\delta a}{\sqrt{(a)}} + \frac{m'.\delta a'}{\sqrt{(a')}} + \frac{m''.\delta a''}{\sqrt{(a'')}};$$

d'où l'on tire

$$\delta a' = \frac{-m.\delta a}{m'} \cdot \frac{a'^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(\frac{a^{\frac{1}{2}} - a''^{\frac{1}{2}}}{a'^{\frac{1}{2}} - a''^{\frac{1}{2}}}\right);$$

$$\delta a'' = \frac{m.\delta a}{m''} \cdot \frac{a''^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(\frac{a^{\frac{1}{2}} - a'^{\frac{1}{2}}}{a'^{\frac{1}{2}} - a''^{\frac{1}{2}}}\right).$$

Soient nt, $n't$, $n''t$, les moyens mouvemens des Satellites m, m', m''; on aura, comme l'on sait,

$$n^2 = \frac{1}{a^3}; \quad n'^2 = \frac{1}{a'^3}; \quad n''^2 = \frac{1}{a''^3};$$

partant

$$\delta n = -\frac{3}{2} \cdot n \cdot \frac{\delta a}{a}$$

$$\delta n' = -\frac{m}{m'} \cdot \delta n \cdot \frac{n'^{\frac{4}{3}} \cdot (n - n'')}{n^{\frac{4}{3}} \cdot (n' - n'')}$$

$$\delta n'' = \frac{m}{m''} \cdot \delta n \cdot \frac{n''^{\frac{4}{3}} \cdot (n - n')}{n^{\frac{4}{3}} \cdot (n' - n'')};$$

ainsi pour avoir les variations séculaires des moyens mouvemens des trois Satellites, il ne s'agit que de déterminer δa, ou ce qui revient au même, le terme pro-

Digitized by Google

portionnel au temps, qui entre dans l'expreſſion du demi-grand axe a, du premier Satellite.

VI.

Si l'on ajoute enſemble les équations (1), (2) & (3) de l'*article II*, après avoir multiplié la premiere par ∂x, la ſeconde par ∂y, & la troiſième par ∂z; & que pour abréger, on ſuppoſe,

$$R = \frac{m'.(x x' + y y' + z z')}{r'^3} + \frac{m''.(x x'' + y y'' + z z'')}{r''^3} - \frac{k}{m};$$

enfin, ſi l'on déſigne par la caractériſtique d, les différences priſes en ne faiſant varier que les coordonnées relatives au Satellite m; on aura

$$0 = \frac{\partial x.\partial\partial x + \partial y.\partial\partial y + \partial z.\partial\partial z}{\partial t^2} + (1+m).\frac{\partial r}{r^2} + dR;$$

d'où l'on tire en intégrant

$$0 = \frac{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}{\partial t^2} - \frac{2.(1+m)}{r} + \frac{1+m}{a} + 2\int dR.$$

Si la différentielle $2\,dR$ renferme un terme conſtant $k\,\partial t$, l'intégrale $2\int dR$ renfermera le terme $k\,t$ proportionnel au temps; on aura donc après le temps t, en négligeant les quantités périodiques de l'ordre m,

$$0 = \frac{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}{\partial t^2} - \frac{2.(1+m)}{r} + \frac{1+m}{a} + k.t;$$

mais ſi l'on nomme $a + \partial a$, ce que devient le demi-grand axe a, après ce temps, on a

$$0 = \frac{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}{\partial t^2} - \frac{2.(1+m)}{r} + \frac{1+m}{a+\partial a};$$

partant

$$\frac{1+m}{a+\partial a} = \frac{1+m}{a} + k\,t,$$

Digitized by Google

ce qui donne, en négligeant le carré de δa, & m vis-à-vis de l'unité,

$$\delta a = - a^2 k t :$$

la question se réduit ainsi à déterminer k.

Pour y parvenir, nous observerons que si l'on n'a égard qu'aux quantités de l'ordre des masses perturbatrices, la différentielle $d R$ ne renferme aucun terme constant; *(Voyez sur cela les Mémoires de Berlin pour l'année 1776, page 210).* Il faut conséquemment, pour y trouver des termes semblables, avoir égard aux produits de ces masses. Si l'on nomme v, v', v'', les angles formés par l'axe des x, & par les projections des rayons recteurs r, r', r'', sur le plan de l'orbite de Jupiter; si l'on nomme de plus, $nt + \varepsilon$, $n't + \varepsilon'$, $n''t + \varepsilon''$, les longitudes moyennes des trois Satellites, rapportées au même plan, & comptées de l'axe des x; l'angle

$$(2n'' - 3n' + n).t + 2\varepsilon'' - 3\varepsilon' + \varepsilon,$$

sera à très-peu-près constant suivant les observations, en vertu du rapport qu'elles indiquent entre les moyens mouvemens des trois premiers Satellites, comme on l'a vu dans l'*article premier*. Soit V cet angle; on doit donc chercher les termes constans de $d R$, parmi ceux qui sont multipliés par les sinus de V, & de ses multiples; & il est clair que l'angle V étant composé des mouvemens des trois Satellites, il ne peut se rencontrer que parmi les termes de $d R$, affectés du produit $m' . m''$.

Nous négligerons les excentricités & les inclinaisons des orbites; nous aurons ainsi

$$x = r . \text{cos. } v \; ; \; y = r . \text{sin. } v \; ; \; z = 0 ;$$
$$x' = r' . \text{cos. } v' ; \; y' = r' . \text{sin. } v' ; \; z' = 0 ;$$
$$x'' = r'' . \text{cos. } v'' ; \; y'' = r'' . \text{sin. } v'' ; \; z'' = 0 ;$$

Digitized by Google

& par conſéquent

$$R = \frac{m' \cdot r \cdot \text{cof.}\,(v' - v)}{r'^2} + \frac{m'' \cdot r \cdot \text{cof.}\,(v'' - v)}{r''^2}$$

$$\frac{m'}{\sqrt{[r^2 - 2rr' \cdot \text{cof.}\,(v' - v) + r'^2]}} \qquad \frac{m''}{\sqrt{[r^2 - 2rr' \cdot \text{cof.}\,(v'' - v) + r''^2]}}.$$

Suppoſons qu'en réduiſant R dans une ſuite ordonnée par rapport aux coſinus de $v' - v$, $v'' - v$, & de leurs multiples, on ait

$$R = m' \cdot [A^{(0)} + A^{(1)} \cdot \text{cof.}\,(v' - v) + A^{(2)} \times \text{cof.}\,2\,(v' - v) + \&c.]$$
$$+ m'' \cdot [B^{(0)} + B^{(1)} \cdot \text{cof.}\,(v' - v) + B^{(2)} \times \text{cof.}\,2\,(v'' - v) + \&c.];$$

on aura dR, en différenciant R, uniquement par rapport à r & v, ce qui donne

$$dR = m' \partial v \cdot \{A^{(1)} \cdot \text{ſin.}\,(v' - v) + 2A^{(2)} \cdot \text{ſin.}\,2\,(v' - v) + \&c.\}$$
$$+ m' \partial r \cdot \{\left(\frac{\partial A^{(0)}}{\partial r}\right) + \left(\frac{\partial A^{(1)}}{\partial r}\right) \cdot \text{cof.}\,(v' - v) + \left(\frac{\partial A^{(2)}}{\partial r}\right) \cdot \text{cof.}\,2\,(v' - v) + \&c.\}$$
$$+ m'' \partial v \cdot \{B^{(1)} \cdot \text{ſin.}\,(v'' - v) + 2B^{(2)} \cdot \text{ſin.}\,2\,(v'' - v) + \&c.\}$$
$$+ m'' \partial r \cdot \{\left(\frac{\partial B^{(0)}}{\partial r}\right) + \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial r}\right) \cdot \text{ſin.}\,(v'' - v) + \left(\frac{\partial B^{(2)}}{\partial r}\right) \cdot \text{ſin.}\,2\,(v'' - v) + \&c.\}.$$

Il faut maintenant ſubſtituer dans cette expreſſion de dR, au lieu de r, r', r'', v, v', v'', leurs valeurs approchées juſqu'aux premières puiſſances incluſivement de m, m', m'', en diſtinguant avec ſoin, les termes conſtans, de ceux qui ne ſont que périodiques.

Digitized by Google

VII.

POUR cela, nous allons rappeler ici quelques résultats de la théorie des perturbations des satellites de Jupiter; nous les tirerons de l'excellente pièce de M. de la Grange, qui a remporté le Prix de l'Académie pour l'année 1766, & qui est imprimée dans le tome IX du recueil des Prix de l'Académie.

Si l'on désigne par l'unité, le demi-diamètre de Jupiter; on aura, en n'ayant égard qu'à l'action des trois premiers Satellites,

$$r = 5{,}67 + m' \cdot \begin{cases} 4{,}19 \cdot \text{cos.}\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) - 1014{,}93'' \\ \text{cos.}\ 2 \cdot (n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) - 3{,}87 \cdot \text{cos.} \\ 3 \cdot (n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) - 1{,}02 \cdot \text{cos.}\, 4 \cdot (n't - nt \\ + \varepsilon' - \varepsilon) - \&c. \end{cases}$$

$$+ m'' \cdot \begin{cases} 0{,}75 \cdot \text{cos.}\,(n''t - nt + \varepsilon'' - \varepsilon) - 1{,}06'' \\ \text{cos.}\ 2 \cdot (n''t - nt + \varepsilon'' - \varepsilon) - 0{,}13 \cdot \text{cos.} \\ 3 \cdot (n''t - nt + \varepsilon'' - \varepsilon) - 0{,}02 \cdot \text{cos.}\, 4 \cdot (n''t - nt \\ + \varepsilon'' - \varepsilon) - \&c. \end{cases}$$

$$r' = 9{,}00 + m \cdot \begin{cases} 518{,}78 \cdot \text{cos.}\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 5{,}73'' \\ \text{cos.}\ 2 \cdot (n't - nt + \varepsilon'' - \varepsilon) + 1{,}36 \cdot \text{cos.} \\ 3 \cdot (n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 0{,}49 \cdot \text{cos.}\, 4 \cdot (n't - nt \\ + \varepsilon' - \varepsilon) + \&c. \end{cases}$$

$$+ m'' \cdot \begin{cases} 7{,}16 \cdot \text{cos.}\,(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') - 824{,}07'' \\ \text{cos.}\ 2 \cdot (n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') - 6{,}29 \cdot \text{cos.} \\ 3 \cdot (n''t - nt + \varepsilon'' - \varepsilon') - 1{,}66 \cdot \text{cos.}\, 4 \cdot (n''t - n't \\ + \varepsilon'' - \varepsilon') - \&c. \end{cases}$$

$$r'' = 14{,}38 + m \cdot \begin{cases} 5{,}88 \cdot \text{cos.}\,(n''t - nt + \varepsilon'' - \varepsilon) + 0{,}19'' \\ \text{cos.}\ 2 \cdot (n''t - nt + \varepsilon'' - \varepsilon) + 0{,}03 \cdot \text{cos.} \\ 3 \cdot (n''t - nt + \varepsilon'' - \varepsilon) + 0{,}00 \cdot \text{cos.}\, 4 \cdot (n''t - nt \\ + \varepsilon'' - \varepsilon) + \&c. \end{cases}$$

$$+ m' \cdot \begin{cases} 452{,}98 \cdot \text{cos.}\,(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') + 9{,}13'' \\ \text{cos.}\ 2 \cdot (n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') + 2{,}16 \cdot \text{cos.} \\ 3 \cdot (n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') + 0{,}59 \cdot \text{cos.}\, 4 \cdot (n''t - n't \\ + \varepsilon'' - \varepsilon') + \&c. \end{cases}$$

Digitized by Google

$$v = nt + \varepsilon + m' \cdot \begin{Bmatrix} 9300'' \cdot \sin.\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) - 1227214''x \\ \sin.\,2\cdot(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) - 3526''\cdot\sin. \\ 3\cdot(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) - 705''\cdot\sin.\,4\cdot(n't - nt \\ + \varepsilon' - \varepsilon) + \&c. \end{Bmatrix}$$

$$+ m'' \cdot \begin{Bmatrix} 1158''\cdot\sin.\,(n''t - nt + \varepsilon'' - \varepsilon) - 1007''x \\ \sin.\,2\cdot(n''t - nt + \varepsilon'' - \varepsilon) - 101''\cdot\sin. \\ 3\cdot(n''t - nt + \varepsilon'' - \varepsilon) - 18''\cdot\sin.\,4\cdot(n''t - nt \\ + \varepsilon'' - \varepsilon) + \&c. \end{Bmatrix}$$

$$v' = n't + \varepsilon' + m \cdot \begin{Bmatrix} 387482''\cdot\sin.\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2727''x \\ \sin.\,2\cdot(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 509''\cdot\sin. \\ 3\cdot(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 12''\cdot\sin.\,4\cdot(n't - nt \\ + \varepsilon' - \varepsilon) + \&c. \end{Bmatrix}$$

$$+ m'' \cdot \begin{Bmatrix} 10067''\cdot\sin.\,(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') - 626246''x \\ \sin.\,2\cdot(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') - 3717''\cdot\sin. \\ 3\cdot(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') - 825''\cdot\sin.\,4\cdot(n''t - n't \\ + \varepsilon'' - \varepsilon') - \&c. \end{Bmatrix}$$

$$v'' = n''t + \varepsilon'' + m \cdot \begin{Bmatrix} -1306''\cdot\sin.\,(n''t - nt + \varepsilon'' - \varepsilon) + 38''\cdot\sin.\,2\times \\ (n''t - nt + \varepsilon'' - \varepsilon) + 8''\cdot\sin.\,3\cdot(n''t - n't \\ + \varepsilon'' - \varepsilon) + 1''\cdot\sin.\,4\cdot(n''t - nt + \varepsilon'' - \varepsilon) \\ + \&c. \end{Bmatrix}$$

$$+ m' \cdot \begin{Bmatrix} 207375''\cdot\sin.\,(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') + 2760''x \\ \sin.\,2\cdot(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') + 559''\cdot\sin. \\ 3\cdot(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') + 142''\cdot\sin.\,4\cdot(n''t - nt \\ + \varepsilon'' - \varepsilon') + \&c. \end{Bmatrix}$$

(*Voyez la pièce citée*, pages 63 & suivantes); cela posé.

Considérons d'abord le terme $m'\,\partial v.A^{(1)}.\sin.(v' - v)$, de l'expression de dR. Si l'on y substitue au lieu de v, sa valeur précédente; il est aisé de voir qu'il n'en peut résulter aucun terme constant ou proportionnel à $\sin.V$. Il n'en est pas ainsi de la substitution de la valeur de v', & l'on voit facilement que le terme

$$-m''.626246''.\sin.\,2\cdot(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon),$$

de cette valeur, produira dans $m' \partial v . A^{(1)} . \text{sin.} (v' - v)$, le suivant

$$- m' m'' . 626246' . A^{(1)} . n \partial t . \text{cos.} (n' t - n t + \varepsilon' - \varepsilon) \times \text{sin.} 2 . (n'' t - n' t + \varepsilon'' - \varepsilon'),$$

& par conſéquent celui-ci,

$$- \frac{m' m''}{2} . 626246' A^{(1)} . n dt . \text{sin.} V.$$

pour réduire en parties du rayon le coéfficient $626246''$, il faut le diviſer par $57^{d}\ 17'\ 44''$; en déſignant donc par h, le quotient de cette diviſion, le terme précédent deviendra

$$- \frac{m' m''}{2} . h A^{(1)} . n \partial t . \text{sin.} V ;$$

& il produira dans $2 d R$, le terme conſtant

$$- m' m'' . h A^{(1)} . n \partial t . \text{sin.} V.$$

$A^{(1)}$ étant une fonction de r & de r', la ſubſtitution de leurs valeurs peut produire encore des termes conſtans dans $m' . \partial v . A^{(1)} \text{sin.} (v' - v)$; or il eſt facile de s'aſſurer que la valeur de r ne produira aucun terme ſemblable, & que la valeur de r' produira le terme

$$- m' . m'' . n \partial t . \left(\frac{\partial A^{(1)}}{\partial r'}\right) . 824,07 . \text{cos.} 2 (n'' t - n' t + \varepsilon'' - \varepsilon') \times \text{sin.} (n' t - n t + \varepsilon' - \varepsilon),$$

ce qui donne le terme conſtant

$$\frac{m' m''}{2} . n \partial t . \left(\frac{\partial A^{(1)}}{\partial r'}\right) . 824,07 . \text{sin.} V ;$$

en déſignant donc par l, le coéfficient numérique 824,07, il en réſultera dans $2 d R$, le terme conſtant

$$m' m'' . n \partial t . \left(\frac{\partial A^{(1)}}{\partial r'}\right) . l . \text{sin.} V.$$

On voit ainſi que le terme $m' \partial v . A^{(1)} . \text{sin.} (v' - v)$, de

de l'expreſſion de dR, produit dans $2dR$, la quantité conſtante

$$m'.m''.n\,\partial t.\text{ſin. }V.\left[l\left(\frac{\partial A^{(i)}}{\partial r'}\right) - hA^{(i)}\right].$$

Si l'on analyſe de la même manière, les autres termes de l'expreſſion de dR; on verra que les termes conſtans qui en réſultent, ſont inſenſibles par rapport à la quantité précédente, à cauſe de la grandeur des coéfficiens numériques h & l, qui multiplient ſes deux termes. On peut donc ſuppoſer que la partie conſtante de $2dR$, ſe réduit à cette quantité, & qu'ainſi l'on a

$$k = m'm''.n.\text{ſin. }V.\left[l\left(\frac{\partial A^{(i)}}{\partial r'}\right) - hA^{(i)}\right];$$

d'où l'on tire par l'*article précédent*,

$$\partial a = -m'm''.a^2 n\,\tau.\text{ſin. }V.\left[l\left(\frac{\partial A^{(i)}}{\partial r'}\right) - hA^{(i)}\right];$$

& par conſéquent

$$\partial n = \tfrac{3}{2}.m'm''.a.n^2 t.\text{ſin. }V.\left[l\left(\frac{\partial A^{(i)}}{\partial r'}\right) - hA^{(i)}\right].$$

De-là il eſt aiſé de conclure par l'*article V*,

$$2\partial n'' - 3\partial n' + \partial n$$

$$= \tfrac{3}{2}.an^2 t.\text{ſin. }V.\left[l\left(\frac{\partial A^{(i)}}{\partial r'}\right) - hA^{(i)}\right].\left\{\begin{array}{c}\dfrac{m'm''}{\quad}\\ +3\,m\,m''.\dfrac{n'^{\frac{1}{3}}.(n-n'')}{n^{\frac{1}{3}}.(n'-n'')}\\ +2\,m\,m'.\dfrac{n''^{\frac{1}{3}}.(n-n')}{n^{\frac{1}{3}}.(n'-n'')}\end{array}\right\}$$

Soit α, la fonction qui, dans le ſecond membre de cette équation, multiplie $n^2 t.\text{ſin. }V$; & que l'on déſigne par s, la quantité $2n'' - 3n' + n$; on aura

$$\partial s = \alpha\, n^2 t.\text{ſin. }V.$$

VIII.

L'ÉQUATION précédente donne la variation δs, correspondante au temps t; mais elle ne peut servir que pour un intervalle dans lequel $\alpha n^2 t . \text{sin.} V$ est peu considérable; on peut cependant en tirer la valeur de s, pour un temps illimité, au moyen de la méthode que j'ai donnée dans la seconde partie de nos Mémoires pour l'année 1772. Suivant cette méthode, on doit considérer s, comme une fonction de αt, qui réduite dans une série ordonnée par rapport aux puissances de αt, est de cette forme

$$s + \alpha t . \frac{\partial s}{\alpha \partial t} + \frac{\alpha^2 t^2}{1.2} . \frac{\partial^2 s}{\alpha^2 \partial t^2} + \&c.$$

les quantités s, $\frac{\partial s}{\alpha \partial t}$, $\frac{\partial^2 s}{\alpha^2 \partial t^2}$, &c. étant relatives à l'instant que l'on choisit pour époque. Le second terme de cette série exprime la variation δs, lorsque αt est très-petit; en comparant donc cette variation à celle-ci, $\alpha n^2 t . \text{sin.} V$, on aura

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \alpha n^2 . \text{sin.} V,$$

& comme l'instant de l'époque est arbitraire, cette équation différentielle a lieu pour un instant quelconque.

Maintenant, V étant par *l'article VI*, égal à

$$2 n'' t - 3 n' t + n t + 2 \varepsilon'' - 3 \varepsilon' + \varepsilon,$$

on a

$$\partial V = \partial t . (2 n'' - 3 n' + n) = s \partial t;$$

on aura ainsi entre s, V & t, deux équations différentielles du premier ordre, dont les intégrales donneront les valeurs de s & V, pour un temps quelconque.

Digitized by Google

De ces équations, on tire la ſuivante,

$$\frac{\partial\partial V}{\partial t^2} = \alpha n^2 . \text{ſin. } V;$$

en la multipliant par ∂V, & en l'intégrant, on aura

$$\frac{\pm \partial V}{\sqrt{(\lambda - 2\alpha n^2 . \text{cof. } V)}} = \partial t; \quad (a)$$

λ étant une conſtante arbitraire. Les différentes valeurs que l'on peut ſuppoſer à cette conſtante, donnent lieu aux trois cas ſuivans.

Premier cas.

Si λ eſt poſitif & plus grand que $\pm 2\alpha n^2$; il eſt viſible que l'angle $\pm V$ croîtra ſans ceſſe, & cela doit arriver, ſi à l'origine du mouvement, $2n'' - 3n' + n$, eſt poſitif ou négatif, & d'un ordre ſupérieur à $n\sqrt{(\pm\alpha)}$.

Second cas.

Si α eſt poſitif, & λ moindre que $2\alpha n^2$; le radical

$$\sqrt{(\lambda - 2\alpha n^2 . \text{cof. } V)}$$

devient imaginaire, dans la ſuppoſition de $V = 0$; l'angle V ſera donc alors périodique, & ne pourra jamais être nul; il ne fera qu'oſciller de part & d'autre de 180^d, en ſorte que ſa valeur moyenne ſera de ſix ſignes.

Troiſième cas.

Si α eſt négatif, & λ moindre que $-2\alpha n^2$; le radical

$$\sqrt{(\lambda - 2\alpha n^2 . \text{cof. } V)}$$

devient imaginaire, dans la ſuppoſition de $V = 180^d$; l'angle V ne peut donc jamais dans ce cas atteindre 180^d; il ne fera qu'oſciller de part & d'autre de zéro, en devenant alternativement poſitif & négatif, & ſa valeur moyenne ſera nulle.

Digitized by Google

Voyons lequel de ces trois cas a lieu dans la Nature.

IX.

En prenant pour unité, le demi-diamètre de Jupiter, les observations donnent

$$a = 5{,}67\,;\ a' = 9{,}00\,;\ a'' = 14{,}38.$$

De-là j'ai conclu

$$A^{(1)} = -\frac{0{,}0952}{a'}\,;\ \left(\frac{\partial A^{(1)}}{\partial r'}\right) = \frac{0{,}594}{a'^2}\,;$$

Mais on a par l'*article VII*,

$$h = \frac{626246''}{57^d\ 17'\ 44''}\,;\ l = 824{,}07\,;$$

on aura par conséquent

$$l.\left(\frac{\partial A^{(1)}}{\partial r'}\right) - h\,A^{(1)} = \frac{71{,}731}{a'^2},$$

ce qui donne

$$\alpha = 67{,}786.\left\{\begin{array}{l} m'\,m'' + 3\,m\,m''.\dfrac{a''^{\frac{1}{2}}.(a-a'')}{a^{\frac{1}{2}}.(a'-a'')} \\ \qquad + 2\,m\,m'.\dfrac{a''^{\frac{1}{2}}.(a-a')}{a^{\frac{1}{2}}.(a''-a')} \end{array}\right\}.$$

Nous sommes ainsi assurés que α est positif; d'où il suit que le dernier des trois cas précédens, ne peut pas exister. Il faut donc, ou que l'angle $\pm V$ croisse sans cesse, ou si sa valeur est périodique, qu'il ne puisse qu'osciller de part & d'autre de 180^d.

X.

Si l'angle $\pm V$ croît indéfiniment, λ est positif & plus grand que $2\,\alpha\,n^2$; or, si l'on suppose $V = 180^d \pm \varpi$,

Digitized by Google

le ſigne de ϖ étant le même que celui de ∂V, dans l'équation différentielle *(a)* de l'*article VIII*, cette équation donnera

$$\partial\varpi = \partial t.\sqrt{(\lambda + 2\alpha n^2.\text{cof. }\varpi)};$$

on aura donc dans l'intervalle compris depuis $\varpi = 0$, juſqu'à $\varpi = 90^d$, $\varpi > t.\sqrt{(\lambda)}$, & par conſéquent $\varpi > n\,t.\sqrt{(2\alpha)}$; ainſi le temps t que ϖ emploira à parvenir de 0^d à 90^d, ſera moindre que $\frac{90^d}{n\sqrt{(2\alpha)}}$. Si l'on nomme T le temps de la révolution du premier Satellite, on aura $nT = 360^d$; ce qui donne $n = \frac{360^d}{T}$; donc le temps t que ϖ emploira à parvenir de 0^d à 90^d, ſera moindre que $\frac{T}{4.\sqrt{(2\alpha)}}$.

La valeur de α dépend des maſſes des trois premiers Satellites de Jupiter; la maſſe m' du ſecond paroît aſſez bien déterminée par l'inégalité du premier Satellite, & ſi l'on prend pour unité, la maſſe de Jupiter, on a

$$m' = 0{,}00002417.$$

Quant aux maſſes m & m'' du premier & du troiſième Satellite, la théorie des inégalités du ſecond eſt inſuffiſante pour les déterminer; mais elle donne entr'elles, la relation ſuivante

$$91810.m + 148383.m'' = 16{,}5.$$

(Voyez la pièce citée de M. de la Grange, pages 74 & 78). En ſuppoſant donc $m = \mu\, m'$, on aura

$$m'' = 0{,}000111199 - 0{,}000014955.\mu.$$

Les temps des révolutions des trois premiers Satellites ſont

$$1^j\,18^h\,28'\,36''; \quad 3^j\,13^h\,17'\,54''; \quad 7^j\,3^h\,59'\,36'';$$

& il eſt clair que les valeurs de n, n', n'', ſont réciproques

à ces temps; d'où il suit que ces valeurs sont entr'elles comme les nombres

$$1 ; 0{,}497978 ; 0{,}246967 ;$$

on aura ainsi

$$\frac{3\,n''^{\frac{5}{3}}\cdot(n-n'')}{n^{\frac{5}{3}}\cdot(n'-n'')} = 3{,}55242 ;$$

$$\frac{2\,n''^{\frac{5}{3}}\cdot(n-n')}{n^{\frac{5}{3}}\cdot(n'-n'')} = 0{,}619791 ;$$

d'où l'on tire

$$\alpha = 0{,}000000182187 . \left\{ \begin{matrix} 1 + 3{,}55263\cdot\mu \\ - 0{,}477756\cdot\mu^2 \end{matrix} \right\}$$

La valeur de μ est comprise entre les deux limites $\mu = 0$ & $\mu = \frac{211199}{44955}$, dont la première répond à $m = 0$, & dont la seconde répond à $m'' = 0$; or il est aisé de voir que la plus petite valeur dont α est susceptible, répond à $\mu = 0$; ainsi le temps t que l'angle ϖ doit employer dans le cas que nous discutons ici, à parvenir de 0^d à 90^d, est nécessairement moindre que

$$\frac{T}{4\cdot\sqrt{(0{,}000000364374)}} ;$$

& comme T réduit en décimales de jours, est égal à $1^j{,}76986$, il en résulte que t est moindre que $733^j{,}002$, ou au-dessous de deux ans.

Maintenant, si l'on compare ce résultat aux observations, on verra qu'il leur est entièrement contraire; car les Tables des trois premiers Satellites, qui satisfont assez bien aux observations depuis plus d'un siècle, donnent à toutes les époques, V peu différent de 180 degrés, & par conséquent ϖ peu considérable. Suivnat celles que M. Bailli a insérées à la fin de son Ouvrage sur les Satellites de Jupiter, les

Digitized by Google

quantités dont V surpaſſoit 180 degrés, aux époques de 1671 & 1763, étoient de 9′ 31″, & de 12′ 23″; dans toutes les époques intermédiaires, elles étoient compriſes entre ces limites. Il eſt donc certain que depuis la découverte des Satellites de Jupiter, ϖ ne s'eſt jamais élevé à 90 degrés; ainſi la ſuppoſition de l'angle ϖ croiſſant ſans ceſſe, eſt entièrement contraire aux obſervations. Le ſecond des trois cas de l'*article VIII*, eſt donc le ſeul qui puiſſe avoir lieu dans la Nature; c'eſt-à-dire que l'angle V eſt néceſſairement périodique, & ne fait qu'oſciller de part & d'autre de 180 degrés, en ſorte que ſa valeur moyenne eſt de ſix ſignes.

X I.

REPRENONS l'équation différentielle de l'*article précédent*.

$$\frac{\partial \varpi}{\sqrt{(\lambda + 2\alpha n^2 . \text{cof.}\varpi)}} = \partial t.$$

Si l'on nomme g, l'eſpace que la peſanteur terreſtre fait parcourir dans la première ſeconde; ſi l'on imagine enſuite un pendule dont la longueur ſoit $\frac{2g}{\alpha i^2}$, i étant le nombre de ſecondes que renferme le temps de la révolution du premier Satellite; enfin ſi l'on ſuppoſe à l'origine du mouvement, ce pendule éloigné de la verticale, d'un angle dont le coſinus ſoit $\frac{-\lambda}{2\alpha i^2}$; ſes oſcillations repréſenteront les variations de l'angle ϖ.

Puiſque les Tables des Satellites ſatisfont aſſez bien aux obſervations, ſans avoir égard aux variations de cet angle, il doit être peu conſidérable: on peut donc ſuppoſer $\text{cof.}\varpi = 1 - \frac{\varpi^2}{2}$; ainſi en faiſant $\frac{\lambda + 2\alpha n^2}{\alpha n^2} = C$, on aura

$$\frac{\partial \varpi}{\sqrt{(C - \varpi^2)}} = n\partial t . \sqrt{(\alpha)}.$$

Digitized by Google

Cette équation donne, en l'intégrant,

$$\varpi = \mathfrak{C}.\text{sin.}\{nt\sqrt{(\alpha)} + \gamma\},$$

$\mathfrak{C}$ & γ étant deux conſtantes arbitraires que l'obſervation peut ſeule déterminer. L'équation $\frac{\partial V}{\partial t} = \partial s$, donne

$$s = \pm n\mathfrak{C}.\sqrt{(\alpha)}.\text{cof.}\{nt\sqrt{(\alpha)} + \gamma\},$$

d'où l'on voit que s eſt, ainſi que ϖ, une quantité périodique: en faiſant donc abſtraction de ces quantités, c'eſt-à-dire, en ſuppoſant que nt, $n't$, $n''t$, repréſentent les vrais moyens mouvemens des Satellites, on a rigoureuſement $s = 0$, ou

$$n + 2n'' = 3n'.$$

On voit encore que cette équation n'exige point qu'à l'origine du mouvement, s ou $n + 2n'' - 3n'$, ait été rigoureuſement nul; il ſuffit qu'il ait été compris dans les limites $-n\mathfrak{C}.\sqrt{(\alpha)}$, & $+n\mathfrak{C}.\sqrt{(\alpha)}$.

On aura le temps t de la période des variations de s & de ϖ, au moyen de l'équation $nt.\sqrt{(\alpha)} = 360^d$, ce qui donne $t = \frac{360^d}{n.\sqrt{(\alpha)}}$; mais T étant le temps de la révolution du premier Satellite, on a $nT = 360^d$; on aura donc

$$t = \frac{T}{\sqrt{(\alpha)}};$$

les deux limites de t, répondent conſéquemment aux deux limites de α; or la plus petite valeur de α eſt

$$\alpha = 0{,}000000182187,$$

& ſa plus grande valeur eſt

$$\alpha = 0{,}000001385\,42;$$

ainſi

ainſi les deux limites de t, ſont

$$1503^{\text{jours}},5 \text{ ; \& } 4146^{\text{jours}},5 \text{ ;}$$

c'eſt-à-dire, que le temps de la période des valeurs de s & de θ, eſt compris entre 4 ans $\frac{1}{6}$, & 11 ans $\frac{1}{3}$.

Les mouvemens des trois Satellites ont des variations analogues à celles de l'angle ϖ; ces variations ſont dans le rapport des quantités δn, δn, δn, qui par l'*article V*, ſont entr'elles comme les quantités

$$1 \text{ ; } -\frac{m}{m'}\cdot\frac{n'^{\frac{4}{3}}\cdot(n-n'')}{n^{\frac{4}{3}}\cdot(n'-n'')} \text{ ; } \frac{m}{m''}\cdot\frac{n''^{\frac{4}{3}}\cdot(n-n')}{n^{\frac{4}{3}}\cdot(n'-n'')}.$$

En nommant donc, k ſin. $\{nt\sqrt{(\alpha)} + \gamma\}$, l'équation qui en réſulte dans le mouvement du premier Satellite; les équations correſpondantes du ſecond & du troiſième Satellite, ſeront

$$-1{,}18414\cdot\frac{m}{m'}\cdot k\cdot\text{ſin.}\{nt\sqrt{(\alpha)} + \gamma\};$$

$$0{,}309895\cdot\frac{m}{m''}\cdot k\cdot\text{ſin.}\{nt\sqrt{(\alpha)} + \gamma\};$$

& l'on aura

$$\mathfrak{C} = (1 + 3{,}55242\cdot\frac{m}{m'} + 0{,}619791\cdot\frac{m}{m''})\cdot k.$$

Il eſt impoſſible dans l'état actuel de la théorie des Satellites de Jupiter, de prononcer ſur la véritable valeur de $\mathfrak{C}$; on voit ſeulement par l'inſpection des erreurs des meilleures Tables, qu'il n'eſt pas impoſſible que cette valeur excède 40′; mais c'eſt un point que je laiſſe à diſcuter aux Aſtronomes qui cherchent à perfectionner cette théorie.

XII.

Il ſuit de ce qui précède, que ſi l'on néglige les quantités périodiques, & que l'on n'ait égard qu'aux moyens

mouvemens & à leurs époques; on a les deux équations ſuivantes,

$$\epsilon - 3\epsilon' + 2\epsilon'' = 0; \quad n - 3n' + 2n'' = 0.$$

Ces équations ſubſiſteroient encore dans le cas où par des cauſes inconnues, telles que la réſiſtance d'un milieu, les moyens mouvemens des Satellites de Jupiter ſeroient aſſujettis à des équations ſéculaires. En vertu de ces cauſes, les expreſſions des grands axes des orbites, & par conſéquent les valeurs de n, n', n'', renfermeroient des termes proportionnels au temps; ſoient it, $i't$, $i''t$, ces termes; i, i', i'', étant des coéfficiens conſtans, ou du moins que l'on peut traiter comme tels, pendant un très-long intervalle. Si l'on nomme, pour abréger, q la quantité

$$\tfrac{3}{2} \cdot m' \, m'' \cdot a \cdot \left[I \left(\frac{\partial A^{(i)}}{\partial r^i} \right) - h A^{(i)} \right];$$

on aura par les *art. V* & *VI.*

$$\delta n = q n^2 t . \text{ſin. } V + i t;$$

$$\delta n' = - \frac{m}{m'} \cdot \frac{n'^{\frac{4}{3}} . (n - n'')}{n^{\frac{4}{3}} . (n' - n'')} \cdot q . n^2 t . \text{ſin. } V + i' t,$$

$$\delta n'' = \frac{m}{m''} \cdot \frac{n''^{\frac{4}{3}} . (n - n')}{n^{\frac{4}{3}} . (n' - n'')} \cdot q \, n^2 t . \text{ſin. } V + i'' t;$$

d'où l'on tire par l'*art. VIII*, les équations

$$\frac{\partial n}{\partial t} = q n^2 . \text{ſin. } V + i;$$

$$\frac{\partial n'}{\partial t} = - \frac{m}{m'} \cdot \frac{n'^{\frac{4}{3}} . (n - n'')}{n^{\frac{4}{3}} . (n' - n'')} \cdot q \, n^2 . \text{ſin. } V + i';$$

$$\frac{\partial n''}{\partial t} = \frac{m}{m''} \cdot \frac{n''^{\frac{4}{3}} . (n - n')}{n^{\frac{4}{3}} . (n' - n'')} \cdot q \, n^2 . \text{ſin. } V + i''.$$

Digitized by Google

En ſuppoſant donc, comme dans l'*article VII*,

$$s = n - 3n' + 2n'';$$

$$\alpha = q.\left[1 + \frac{3m}{m'}.\frac{n^{\frac{4}{3}}.(n-n'')}{n'^{\frac{4}{3}}.(n'-n'')} + \frac{2m}{m''}.\frac{n''^{\frac{4}{3}}.(n-n')}{n^{\frac{4}{3}}.(n'-n'')}\right];$$

on aura

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \alpha n^2.\text{sin.}\, V + i - 3i' + 2i'',$$

on a enſuite $\frac{\partial V}{\partial t} = s$; partant

$$\frac{\partial\partial V}{\partial t^2} = \alpha n^2.\text{sin.}\, V + i - 3i' + 2i''.$$

Suppoſons $V = 180^d + \varpi$, ϖ étant peu conſidérable; l'équation précédente donnera

$$\frac{\partial\partial\varpi}{\partial t^2} + \alpha n^2 \varpi = i - 3i' + 2i'';$$

d'où l'on tire en intégrant,

$$\varpi = \mathcal{C}.\text{sin.}\,[nt\sqrt{(\alpha)} + \gamma] + \frac{i - 3i' + 2i''}{\alpha n^2},$$

$\mathcal{C}$ & γ étant deux conſtantes arbitraires; & comme on a $s = \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial\varpi}{\partial t}$; on aura

$$n - 3n' + 2n'' = n\mathcal{C}.\text{cos.}\,[nt\sqrt{(\alpha)} + \gamma];$$

ainſi en négligeant les quantités périodiques, on aura

$$n - 3n' + 2n'' = 0.$$

On voit par-là que les cauſes qui peuvent altérer les moyens mouvemens des trois premiers ſatellites de Jupiter, ne troublent point le rapport précédent entre ces mouvemens; d'où il ſuit que ſi ces corps ſont aſſujettis à des équations ſéculaires, celle du premier plus deux fois celle du troiſième doit être égale à trois fois l'équation ſéculaire du ſecond.

Digitized by Google

Pour déterminer ces équations, nous obſerverons que l'on a par ce qui précède,

$$q n^2 . \text{ſin. } V = \frac{q}{\alpha} \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{q}{\alpha} . (i - 3 i' + 2 i'') ;$$

on aura donc en rejetant la quantité périodique $\frac{\partial s}{\partial t}$,

$$\frac{\partial n}{\partial t} = i - \frac{q}{\alpha} . (i - 3 i' + 2 i''),$$

$$\frac{\partial n'}{\partial t} = i' + \frac{q m}{\alpha m'} . (i - 3 i' + 2 i'') . \frac{n'^{\frac{4}{3}} . (n - n'')}{n^{\frac{4}{3}} . (n' - n'')},$$

$$\frac{\partial n''}{\partial t} = i'' - \frac{q m}{\alpha m''} . (i - 3 i' + 2 i'') . \frac{n''^{\frac{4}{3}} . (n - n')}{n^{\frac{4}{3}} . (n' - n'')} .$$

Si l'on intègre deux fois de ſuite, ces valeurs de ∂n, $\partial n'$, $\partial n''$; les termes proportionnels au carré du temps t, ſeront les équations ſéculaires des Satellites; les valeurs de ces équations ſeront par conſéquent

$$\frac{1}{2} . t^2 . [i - \frac{q}{\alpha} . (i - 3 i' + 2 i'')],$$

$$\frac{1}{2} . t^2 . [i' + \frac{q m}{\alpha m'} . (i - 3 i' + 2 i'') . \frac{n'^{\frac{4}{3}} . (n - n'')}{n^{\frac{4}{3}} . (n' - n'')}],$$

$$\frac{1}{2} . t^2 . [i'' - \frac{q m}{\alpha m''} . (i - 3 i' + 2 i'') . \frac{n''^{\frac{4}{3}} . (n - n')}{n^{\frac{4}{3}} . (n' - n'')}].$$

La valeur moyenne de V, eſt $180^d + \frac{i - 3 i' + 2 i''}{\alpha n^2}$;

ainſi en ſuppoſant $i - 3 i' + 2 i''$ poſitif, V ſeroit plus grand que 180 degrés, & l'on pourroit expliquer par-là, pourquoi toutes les Tables des ſatellites de Jupiter donnent $V > 180$ degrés: mais on doit obſerver que les quantités i, i', i'', doivent être inſenſibles relativement à αn^2, puiſqu'autrement elles produiroient dans les moyens mouvemens des Satellites, des équations ſéculaires que

Digitized by Google

l'intervalle de temps écoulé depuis leur découverte jusqu'à nos jours, auroit rendues très-sensibles. On pourroit à la vérité diminuer ces équations par différentes suppositions sur les valeurs de m, m', m'', i, i', i''; supposons, par exemple, le Satellite m extrêmement petit relativement à m' & à m'', & qu'il se meuve dans un milieu résistant qui ne s'étende pas jusqu'à l'orbite du second Satellite; on aura $q = \alpha$, $i' = 0$, $i'' = 0$; les équations séculaires des trois Satellites seront nulles, & V sera égal à $180^d + \frac{l}{\alpha\pi'}$. On pourra donc supposer $\frac{l}{\alpha\pi'}$ égal à plusieurs minutes, sans qu'il en résulte aucune équation séculaire sensible dans les mouvemens des Satellites; car si d'un côté, le milieu dans lequel se meut le premier Satellite, tend à accélérer son mouvement, en l'approchant de Jupiter; d'un autre côté, l'action des deux autres Satellites, détruit l'effet de ce milieu, & conserve au premier Satellite son moyen mouvement & sa moyenne distance. Mais ces hypothèses & toutes celles du même genre, sont trop peu vraisemblables pour être admises; on doit donc regarder l'équation

$$\varepsilon - 3\varepsilon' + 2\varepsilon'' = 0,$$

comme une condition à laquelle les époques des Tables doivent nécessairement satisfaire.

XIII.

Sur les Excentricités & les Inclinaisons des orbites des Planètes.

CONSIDÉRONS présentement le second objet que nous nous sommes proposés de traiter dans ce Mémoire, & cherchons à établir d'une manière générale, que les excentricités & les inclinaisons des orbites des Planètes, sont constamment renfermées dans d'étroites limites; pour cela

nous allons rappeler ici les principaux réſultats de la théorie connue des inégalités ſéculaires.

Si l'on prend pour plan fixe, celui de l'Écliptique à une époque donnée, & que l'on compte les longitudes, de l'équinoxe correſpondant ſuppoſé invariable; ſi l'on nomme enſuite m, m', m'', &c. les maſſes des Planètes, celle du Soleil étant priſe pour l'unité; a, a', a'', les demi-grands axes de leurs orbites; ea, $e'a'$, $e''a''$, &c. leurs excentricités; V, V', V''. &c. les longitudes de leurs aphélies; θ, θ', θ'', &c. les tangentes des inclinaiſons de leurs orbites ſur le plan fixe; enfin I, I', I'', les longitudes de leurs nœuds aſcendans; les quantités $e.\text{ſin.}\ V$, $e.\text{cof.}\ V$; $e'.\text{ſin.}\ V'$, $e'.\text{cof.}\ V'$, &c; $\theta.\text{ſin.}\ I$, $\theta.\text{cof.}\ I$; $\theta'.\text{ſin.}\ I'$, $\theta'.\text{cof.}\ I'$, &c. ſeront données par des équations différentielles linéaires du premier ordre, dont les coéfficiens ſont conſtans. Les excentricités & les inclinaiſons étant fort petites, le ſyſtème des équations relatives aux excentricités, eſt indépendant du ſyſtème des équations relatives aux inclinaiſons; en ſorte que le premier ſyſtème eſt le même que ſi les orbites étoient dans le même plan, & le ſecond eſt le même que ſi les orbites étoient circulaires.

En intégrant le premier ſyſtème, chacune des quantités $e.\text{ſin.}\ V$, $e.\text{cof.}\ V$, $e'.\text{ſin.}\ V'$, $e'.\text{cof.}\ V'$, &c. eſt exprimée par la ſomme d'un nombre fini de ſinus & de coſinus d'angles proportionnels au temps t; les nombres par leſquels il faut multiplier ce temps, pour former ces angles, étant les racines d'une équation algébrique, d'un degré égal au nombre des Planètes; nous repréſenterons cette équation par *(k)*. La même choſe a lieu relativement aux équations du ſecond ſyſtème; mais l'équation dont dépend la formation des angles, n'eſt pas la même que pour le premier ſyſtème; nous la repréſenterons par *(k')*. On peut conſulter ſur cet objet, les Mémoires de cette Académie, pour l'année 1772, *II.e Partie, page 361*; & les Mémoires de l'Académie de Berlin, pour l'année 1782, *pages 243 & 262.*

Digitized by Google

Si toutes les racines des équations *(k)* & *(k')* ſont réelles & inégales, les valeurs des quantités précédentes, ne renfermeront ni arcs-de-cercle ni exponentielles, & par conſéquent elles reſteront toujours fort petites; il n'en ſera pas de même ſi quelques-unes de ces racines ſont égales ou imaginaires, car on ſait qu'alors les ſinus & les coſinus ſe changent en arcs-de-cercle ou en exponentielles: mais quelle que ſoit la nature des racines de ces équations, les valeurs de $e.\text{ſin. } V$, $e.\text{coſ. } V$, $e'.\text{ſin. } V'$, $e'.\text{coſ. } V'$, &c. ſeront toujours compriſes dans les formes ſuivantes:

$$\begin{aligned}
e.\text{ſin. } V &= \alpha f^{it} + \mathcal{C}.f^{i't} + \&c. \\
&\quad + \gamma t^r + \lambda.t^{r-1} + \&c. + h; \\
e.\text{coſ. } V &= \mu.f^{it} + \epsilon.f^{i't} + \&c. \\
&\quad + \Phi t^r + \psi.t^{r-1} + \&c. + l; \\
e'.\text{ſin. } V' &= \alpha' f^{it} + \mathcal{C}'.f^{i't} + \&c. \\
&\quad + \gamma' t^r + \lambda'.t^{r-1} + \&c. + h'; \\
e'.\text{coſ. } V' &= \mu'.f^{it} + \epsilon'.f^{i't} + \&c. \\
&\quad + \Phi'.t^r + \psi'.t^{r-1} + \&c. + l';
\end{aligned}$$

&c.

f étant le nombre dont le logarithme hyperbolique eſt l'unité. Les coëfficiens $\alpha, \mathcal{C}, \mu, \epsilon$, &c, $\alpha', \mathcal{C}', \mu', \epsilon'$, &c. des exponentielles, ſont des quantités réelles ſans exponentielles, mais qui peuvent être fonctions de l'arc t, & de ſinus & de coſinus d'angles proportionnels à cet arc: les quantités $\gamma, \lambda, \Phi, \psi$, &c, $h, l, \gamma', \lambda', \Phi', \psi'$, &c, h', l', &c. ſont réelles, ſans arcs-de-cercle ni exponentielles, & par conſéquent conſtantes ou périodiques.

Suppoſons qu'abſtraction faite du ſigne, on ait $i > i'$, $i' > i''$, &c. e étant égal a $(e.\text{ſin. } V)^2 + (e.\text{coſ. } V)^2$, on aura

$$\begin{aligned}
e^2 &= (\alpha^2 + \mu^2).f^{2it} + \&c. \\
&\quad + (\gamma^2 + \Phi^2).t^{2r} + \&c. + h^2 + l^2.
\end{aligned}$$

On aura pareillement

$$e'^2 = (\alpha'^2 + \mu'^2).f^{2i'} + \&c.$$
$$+ (\gamma'^2 + \Phi'^2).t^{2r'} + \&c. + h'^2 + l'^2.$$

& ainſi de ſuite; on aura donc ainſi les valeurs des excentricités des orbites.

Ces valeurs ne peuvent ſervir que pour un temps limité, après lequel les excentricités devenant fort grandes, la ſuppoſition qu'elles ſont peu conſidérables, & d'après laquelle elles ont été trouvées, ceſſe d'être exacte: on ne peut donc étendre à un temps quelconque, les réſultats obtenus dans cette ſuppoſition, qu'autant que l'on eſt aſſuré que les racines de l'équation *(k)*, ſont toutes réelles & inégales; mais il ſeroit très-difficile d'y parvenir par la conſidération directe de cette équation. Voici un moyen fort ſimple de prouver que ni les exponentielles f^{it}, $f^{it'}$, &c, ni l'arc t & ſes puiſſances ne ſe rencontrent point dans les valeurs de $e.\text{ſin. } V$, $e.\text{cof. } V$; $e'.\text{ſin. } V'$, $e'.\text{cof. } V'$, &c.

XIV.

REPRENONS l'équation (9) de l'*article IV:* ſi l'on ſuppoſe e & θ très-petits, & que l'on néglige les quantités des ordres e^4, $e^2\theta^2$, & θ^4, elle donnera

$$e = m\sqrt{(a)} + m'\sqrt{(a')} + \&c.$$
$$- \tfrac{1}{2}.m.(e^2 + \theta^2).\sqrt{(a)} - \tfrac{1}{2}m'.(e'^2 + \theta'^2).\sqrt{(a')} - \&c.$$

mais les moyennes diſtances des Planètes au Soleil ne ſont point troublées par leur action mutuelle; on aura donc

$$m.(e^2 + \theta^2).\sqrt{(a)} + m'.(e'^2 + \theta'^2).\sqrt{(a')} + \&c. = \text{conſtante.}$$

Nous avons obſervé dans l'*article précédent*, que les valeurs de e, e', e'', ſont données par des équations indépendantes de celles qui donnent les valeurs de θ, θ', θ'', &c. en ſorte qu'elles

qu'elles ſont les mêmes que ſi θ, θ', θ'', &c. étoient nuls; mais l'équation précédente devient dans cette hypothèſe,

$$\text{Conſt.} = m.e^{a}.V(a) + m'.e'^{a'}.V(a') + \&c.$$

les valeurs de e, e', &c. doivent donc ſatisfaire à cette équation, après un temps quelconque.

Si l'on y ſubſtitue les expreſſions générales de ces quantités, que nous avons données dans l'*article précédent*; on aura

$$\left.\begin{aligned}\text{Conſt.} = {} & [m.V(a).(\alpha^{2}+\mu^{2}) + m'.V(a').(\alpha'^{2}+\mu'^{2}) + \&c.].f^{2\theta t} + \&c.\\ & + [m.V(a).(\gamma^{2}+\varphi^{2}) + m'.V(a').(\gamma'^{2}+\varphi'^{2}) + \&c.].t^{2r} + \&c.\\ & + m.V(a).(h^{2}+l^{2}) + m'.V(a').(h'^{2}+l'^{2}) + \&c.\end{aligned}\right\}; \ (b)$$

cette équation devant avoir lieu quel que ſoit t, il eſt néceſſaire que les coéfficiens des exponentielles & des puiſſances ſemblables de t, diſparoiſſent d'eux-mêmes; en égalant donc à zéro, le coéfficient de $f^{2\theta t}$, on aura

$$0 = m.V(a).(\alpha^{2}+\mu^{2}) + m'.V(a').(\alpha'^{2}+\mu'^{2}) + \&c.$$

mais $m.V(a)$, $m'.V(a')$, &c. ſont des quantités poſitives, & α, μ, α', μ', &c. ſont des quantités réelles; l'équation précédente ne peut conſéquemment ſubſiſter, qu'en ſuppoſant $\alpha = 0$, $\mu = 0$, $\alpha' = 0$, $\mu' = 0$, &c. d'où il ſuit que les exponentielles ne ſe rencontrent point dans les valeurs de e, e', &c.

L'équation (b) donne encore, en égalant à zéro, le coéfficient de t^{r},

$$0 = m.V(a).(\gamma^{2}+\varphi^{2}) + m'.V(a').(\gamma'^{2}+\varphi'^{2}) + \&c.$$

d'où l'on tire

$$\gamma = 0, \ \varphi = 0, \ \gamma' = 0, \ \varphi' = 0; \ \&c.$$

Ainſi les valeurs de e, e', &c. ne renferment point d'arcs

de-cercle ; elles ſe réduiſent par conſéquent aux quantités périodiques,

$$V(h^2 + l^2),\ V(h'^2 + l'^2),\ \&c.$$

& ces quantités ont entr'elles, en vertu de l'équation *(b)*, la relation ſuivante

$$\text{Conſt.} = m.V(a).(h^2 + l^2) + m'.V(a').(h'^2 + l'^2) + \&c.$$

de manière que dans le développement du ſecond membre de cette équation, en ſinus & en coſinus, les coéfficiens de chaque ſinus & de chaque coſinus doivent diſparoître d'eux-mêmes.

Si l'on applique les mêmes raiſonnemens aux expreſſions de θ, θ', θ'', &c. on s'aſſurera qu'elles ne renferment ni exponentielles ni arcs-de-cercle, & qu'elles ſe réduiſent à des quantités périodiques. En ſuppoſant comme dans *l'art. IV*,

$$\theta.\text{ſin.}\ I = p\ ;\ \theta.\text{coſ.}\ I = q\ ;$$
$$\theta'.\text{ſin.}\ I' = p'\ ;\ \theta'.\text{coſ.}\ I' = q'\ ;\ \&c.$$

on trouvera que les quantités p, q, p', q', &c. ont entre elles la relation,

$$\text{Conſt.} = m.V(a).(p^2 + q^2) + m'.V(a').(p'^2 + q'^2) + \&c.$$

les équations (10) & (11) de l'*art. IV*, donnent encore dans la ſuppoſition de p, q, p', q', &c. très-petits, les relations ſuivantes entre ces quantités,

$$\text{Conſt.} = m\,q.V(a) + m'.q'.V(a') + \&c.$$
$$\text{Conſt.} = m\,p.V(a) + m'.p'.V(a') + \&c.$$

De-là nous pouvons généralement conclure que les expreſſions des excentricités & des inclinaiſons des orbites des Planètes, ne renferment ni arcs-de-cercle, ni exponentielles; & qu'ainſi le ſyſtème des Planètes eſt renfermé dans des limites invariables, du moins lorſque l'on n'a égard qu'à leur action mutuelle.

Digitized by Google

OBSERVATIONS
SUR DES MORTS SUBITES
Occasionnées par la rupture du ventricule gauche du Cœur.

Par M. PORTAL.

ON ne pourroit croire, si les observations ne l'avoient appris, que le cœur, cet organe musculeux, dont les parois sont si épaisses, pût se rompre, & occasionner ainsi la mort la plus prompte : Harvée en a rapporté un exemple, dans son immortel Ouvrage sur la circulation du sang ; & les Anatomistes en ont depuis recueilli d'autres dont ils ont fait mention dans leurs Écrits.

Il suffit de lire les Ouvrages de M.rs Morgagni, Senac & Lieutaud, pour se convaincre que les oreillettes & les ventricules du cœur ont donné lieu, par leur rupture, à un épanchement de sang dans le péricarde. Ce qui doit le plus surprendre, c'est qu'il est prouvé par les observations de ces grands Médecins, que ce ne sont pas les oreillettes, dont les parois sont très-minces, qui s'ouvrent toujours, mais que c'est dans les ventricules, dont les parois sont prodigieusement épaisses & fortes, que ces fortes de ruptures sont les plus fréquentes; encore peut-on conclure qu'elles sont plus communes dans le ventricule gauche que dans le ventricule droit, quoique les parois de celui-ci soient très-souples si on les compare avec celles du ventricule gauche. Ce point de doctrine est du moins confirmé par mes observations & par celles des Anatomistes qui les ont recueillies, & que j'ai eu soin de consulter; ce qui est bien différent des simples dilatations qui sont plus communes dans les oreillettes que dans les

ventricules, de même qu'il eſt plus ordinaire de voir les oreillettes dilatées au-delà de leur calibre, que les artères, leſquelles s'ouvrent au contraire plus ſouvent que les veines.

Les Anatomiſtes ont rendu compte de toutes ces différences; mais comme ils n'ont pas également fixé leur opinion ſur les ruptures du ventricule gauche, & ſur les cauſes qui les produiſent, j'ai cru devoir communiquer à l'Académie mes obſervations & mes remarques ſur cette matière; ſi elles ne ſont pas entièrement nouvelles, elles concourront du moins à confirmer celles que divers Auteurs ont rapportées, entr'autres M.rs Morgagni, Senac, Haller & Lieutaud.

Ce fut en 1768, que j'eus occaſion de faire la première ouverture de ce genre, madame de Chabanes, qui demeuroit dans la rue des Jeûneurs, avoit joui juſqu'à l'âge de ſoixante ans, d'une aſſez bonne ſanté; elle commença alors de reſſentir de la difficulté de reſpirer; cette incommodité augmenta de plus en plus, elle étoit extrême, lorſqu'elle montoit un eſcalier ou dans ſa voiture; ſon pouls devenoit très-irrégulier, même intermittent, & ce n'étoit qu'après un certain temps qu'elle ſe remettoit dans ſon état naturel; ce qu'il y a de ſingulier, c'eſt que cette Dame étoit moins fatiguée par les voitures rudes, que par celles qui étoient le mieux ſuſpendues: elle vécut avec cette incommodité juſqu'à l'âge d'environ ſoixante-cinq ans. Elle avoit obſervé que la ſaignée étoit ſon meilleur remède, auſſi ſe faiſoit-elle ſaigner ordinairement deux ou trois fois l'année, & quelquefois davantage. Les plus légères inquiétudes lui occaſionnoient des palpitations; elle ſe mit un jour dans une violente colère pour une petite contrariété; les palpitations furent plus fortes que jamais, elle ne put plus reſpirer qu'avec une peine extrême, ſon viſage pâlit, ſes extrémités devinrent auſſi froides que de la glace, & elle périt.

J'aſſiſtai à l'ouverture du cadavre, avec M.r de Vernage

& Malouin, qui avoient été ſes Médecins; voici ce que l'on trouva.

Il y avoit dans le bas-ventre un médiocre épanchement d'une ſéroſité rougeâtre; le foie étoit engorgé & très-dur, la véſicule du fiel étoit remplie par quatre pierres; elle s'étoit rétrécie & avoit la forme d'un canal, d'un diamètre preſque égal dans toute ſa longueur: il n'y avoit dans le bas-ventre aucune autre altération remarquable.

Ce fut dans la poitrine qu'on vit les cauſes de la mort; le péricarde étoit prodigieuſement diſtendu, & plein de ſang qui s'écoula en grande partie lorſqu'on l'ouvrit; les oreillettes du cœur étoient d'une grandeur énorme, le ventricule droit étoit au moins deux fois plus ample que le gauche, & leurs parois que cette diſtenſion avoit ſemblé devoir rendre plus minces, étoient au contraire plus épaiſſes, mais mollaſſes, elles étoient percées de pluſieurs déchirures; le ventricule gauche même, malgré la grande épaiſſeur de ſes parois, l'étoit en trois endroits; l'une de ces ouvertures étoit à la partie antérieure du cœur, proche la baſe, à côté du cordon tendineux qui lie l'aorte au cœur; les deux autres étoient dans le corps du même ventricule gauche, preſque parallèles à l'autre, & à un travers de doigt de diſtance; le ventricule droit étoit percé près la pointe, vers le bord ſupérieur de la cloiſon du cœur,

Les valvules ſigmoïdes de l'aorte, étoient endurcies & hériſſées de concrétions oſſeuſes; un amas de même nature, placé derrière elles, ne leur permettoit de donner au ſang qu'une iſſue très-étroite, & ce paſſage étoit encore gêné par des oſſifications dont l'aorte étoit incruſtée.

L'artère pulmonaire étoit oſſifiée en divers endroits proche de ſon orifice dans le ventricule droit; le corps annulaire ligamenteux qui l'attache avec ce ventricule, & qui ſoutient les valvules, étoit très-dur, inégal, & ſi gonflé que l'ouverture étoit ſingulièrement rétrécie; les valvules avoient la conſiſtance d'un cartilage, & les corpuſcules de Vidusvidius, ou ſi l'on veut, d'Arantius, qui les termi-

Digitized by Google

noient, étoient auſſi gros qu'un petit pois, au moins ſept ou huit fois plus qu'ils ne le ſont naturellement.

Vidusvidius a connu ces tubercules avant Arantius, auquel M. Morgagni fait honneur de la découverte: on peut voir, ſi l'on veut, à ce ſujet, notre hiſtoire de l'Anatomie.

Ce ſont ſans doute ces obſtacles qui ont empêché le cœur de ſe vider dans la ſiſtole; la réſiſtance que le ſang a oppoſée aux contractions de ſes ventricules, a déterminé peu-à-peu leur dilatation, la circulation du ſang dans les vaiſſeaux coronaires a été ralentie, le ſang qu'ils contenoient s'eſt extravaſé entre les fibres du cœur qui s'en ſont abreuvées, leur tiſſu a été relâché, gonflé, & elles ſe ſont déchirées par leurs propres contractions.

On a trouvé dans quelques ſujets morts ſubitement par la rupture du cœur, & dont M. Morgagni nous a tranſmis l'hiſtoire, des altérations dans le cœur, à peu-près ſemblables à celles dont nous venons de parler; mais je ne connois aucun exemple de rupture des deux ventricules dans la même perſonne. Je n'ai pas non plus connoiſſance qu'on ait trouvé les tubercules des valvules auſſi gonflés qu'ils l'étoient dans celle qui a été l'objet de cette obſervation: ſans doute que le ramolliſſement extrême des parois du cœur, aura facilité leurs déchirures, dont la dernière cauſe aura été l'effort que le ſang aura fait ſur elles, ne pouvant ſortir librement.

Madame la Comteſſe de Nevron étoit d'un embonpoint extrême; elle éprouvoit depuis long-temps de la difficulté de reſpirer lorſqu'elle ſe livroit à quelques exercices un peu fatigans. Elle vint de Nanci à Paris ſans s'arrêter; le ſoir de ſon arrivée, elle éprouva une grande difficulté de reſpirer, avec des douleurs de coliques aſſez vives. Un Médecin qui fut appelé trouva ſon pouls extrêmement plein & d'une inégalité ſingulière; cet état lui parut indiquer un vomiſſement prochain: il s'étoit propoſé de la purger le lendemain matin avec un ou deux grains d'émétique, ſi la Nature ne produiſoit d'elle-même auparavant quelqu'heureux changement.

Digitized by Google

Cet état ſe termina d'une manière plus tragique: M.me la Comteſſe de Nevron ſentit vers le milieu de la nuit que ſa reſpiration devenoit plus difficile; elle appelle du ſecours, on l'entend, on vole vers elle, & on la trouve expirante; ſon viſage étoit pâle, ſes mains & ſes pieds étoient froids; elle étoit ſans pouls, & l'on ne put entendre quelques foibles ſons qu'elle proféroit: on ne la vit que pour être témoin de ſa mort, qui fut très-précipitée.

Son corps conſerva long-temps la chaleur, ſur-tout la partie de la poitrine qui correſpond au cœur, ce qui fut cauſe qu'on en retarda l'ouverture au-delà du temps qu'on a coutume d'attendre pour une pareille opération. Ce corps étoit tellement ſurchargé de graiſſe, qu'il étoit d'un volume énorme; il y en avoit ſous la peau plus de quatre travers de doigt, les muſcles en étoient comme pénétrés; leur texture avoit cependant la ſolidité ordinaire; l'épiploon contenoit une quantité de graiſſe ſi prodigieuſe, qu'il occupoit la plus grande partie de la cavité abdominale; il y en avoit auſſi beaucoup entre les lames du méſentère, autour des reins; le foie étoit un peu plus volumineux, & renitent qu'il ne l'eſt ordinairement, & il y avoit cinq calculs biliaires dans la véſicule du fiel.

Il y avoit une ſi grande quantité de graiſſe entre les lames du médiaſtin, qu'elles étoient conſidérablement écartées, ce qui rétréciſſoit la capacité de la poitrine, & donnoit lieu à la compreſſion. Le cœur, qui étoit couvert d'une couche de graiſſe de plus de deux travers de doigt d'épaiſſeur, baignoit dans le ſang, dont le péricarde étoit plein; ce ſang s'étoit épanché dans le ſac membraneux par une ouverture qu'on découvrit à la baſe du cœur, près de l'artère-aorte; le rebord ligamenteux qui fixe cette artère avec le cœur, en étoit détaché dans la partie antérieure de ſa circonférence, au point qu'il en réſultoit un trou dans lequel je pus facilement introduire le petit doigt; du reſte, la ſubſtance du cœur étoit ſolide & compacte, comme elle l'eſt ordinairement. Les ventricules, même celui qui s'étoit

Digitized by Google

déchiré, n'étoient pas plus grands que de coutume, & il n'y avoit aucune marque d'éroſion en aucun endroit de ſa texture; les vaiſſeaux qui portent ou qui reçoivent le ſang de ce viſcère, n'étoient point altérés, de ſorte qu'on ne pouvoit attribuer cet accident à aucun vice qui leur fût propre, ni à aucune affection contre nature des fibres muſculeuſes du cœur.

Malgré la grande quantité de ſang épanché dans le péricarde, il y en avoit encore beaucoup dans les vaiſſeaux, ſoit dans les artères, ſoit dans les veines; & n'eſt-ce pas à un excès de ce liquide, ou à l'énorme quantité de graiſſe, qu'on doit attribuer la cauſe de cette rupture du cœur?

L'endroit où cette crevaſſe s'eſt faite, mérite d'être conſidéré; ce n'eſt pas à la pointe du cœur, qui eſt la partie la plus mince, & où ces ſortes de ruptures ſe font le plus ſouvent, au rapport de M.rs Morgagni & Senac, mais à la baſe, dans l'endroit où le cœur paroît le plus fort par ſa ſtructure tendineuſe.

Le ventricule du cœur, dans lequel cette ouverture contre nature, s'eſt faite, n'étoit pas plus dilaté qu'il ne l'eſt ordinairement, & ſes parois n'étoient point ramollies, comme M.rs Senac & Morgagni l'ont trouvé dans des cœurs couverts de graiſſe, & qui s'étoient rompus, ce qui fait même une exception à ce qu'ils ont avancé; car ces célèbres Anatomiſtes ont cherché à attribuer à quelque altération dans la texture du cœur, la cauſe diſpoſante de ſa rupture. Ils croyoient que la graiſſe ramaſſée ſur le cœur, en ramolliſſoit conſidérablement les fibres, ce qui faiſoit que le ſang, en le diſtendant pendant la diaſtole, terminoit par le rompre; ils ont auſſi attribué quelquefois la première cauſe de cette rupture à un ulcère qui avoit rongé le cœur, lequel, tellement aminci, n'avoit enfin pu réſiſter à l'impulſion du ſang, ou même que l'ulcère avoit terminé par faire une ouverture complète au cœur, ce qui avoit donné lieu à une irruption du ſang dans le péricarde.

Toutes

Digitized by Google

Toutes ces cauſes ont eu lieu, & leur exiſtence a été confirmée par les obſervations que les Médecins que nous avons cités, ont rapportées & ſavamment diſcutées; mais dans le cœur dont il s'agit, il n'y avoit ni ramolliſſement, ni aucune trace d'ulcère, il paroît au contraire qu'il jouiſſoit de toute ſa force, & que c'eſt moins par un défaut de ſolidité dans ſes parois, que par un ſurcroît de réſiſtance qu'elles n'ont pu vaincre, qu'elles ont crevé, ce qui aura eu lieu lors de la contraction, ou pendant la ſyſtole du cœur.

On ne peut raiſonnablement admettre que la rupture du cœur ſe faſſe pendant la diaſtole, comme M.rs Senac & Morgagni le croyoient, ſans admettre, comme ils l'ont fait, une extenſion plus ou moins grande des fibres du ventricule, avant la rupture qui en augmente plus ou moins la capacité; mais comme dans ce cas, & dans quelques autres que je pourrois citer, le ventricule où l'on a trouvé la déchirure n'étoit pas plus ample, on doit conclure que ce n'eſt pas par une forte extenſion qu'elle s'eſt faite.

Si cette opinion étoit fondée, le cœur s'ouvriroit toujours à la poitrine des ventricules, où la paroi eſt auſſi mince entre quelques trouſſeaux du réſeau muſculeux, que la plus fine membrane; or, ces obſervations démontrent le contraire.

Tous les trouſſeaux muſculeux ſe rapprochent fortement pendant la contraction de cet organe; les vides qu'ils laiſſent pendant la dilatation du cœur, diſparoiſſent, & ils forment une paroi infiniment plus ſolide que celle qu'on voit dans le cadavre; auſſi arrive-t-il rarement que ce ſoit dans cet endroit que le cœur ſe déchire, ainſi qu'on peut le voir en liſant mes Obſervations & celles qui ont été recueillies par les Anatomiſtes. Les ruptures qui ſurviennent aux autres muſcles, peuvent donner un ſurcroît de preuves à mon opinion; on en a vu pluſieurs ſe rompre à la ſuite de violentes convulſions, ou de leurs exceſſives contractions; M. de Haller en cite des exemples mémorables.

D'ailleurs, quelles ſeroient les puiſſances qui pourroient pouſſer le ſang dans les ventricules, avec aſſez de force

pour en faire crever les parois? ce ne pourroit être que les veines-caves & les oreillettes; mais leur tiſſu étant encore infiniment plus foible que celui des ventricules, on ne peut leur attribuer un pareil effet, à moins qu'on ne ſuppoſat que le tiſſu des ventricules fut extrêmement relâché, ce qui n'avoit point lieu dans la circonſtance préſente.

Une Dame, âgée de ſoixante-cinq ans, maigre, & d'une ſenſibilité extrême, éprouvant depuis long-temps des palpitations de cœur, qu'on croyoit ſpaſmodiques, faiſoit un grand uſage des bains tièdes; on lui conſeilla de les prendre froids, & bientôt on lui dit d'y joindre de la glace, & même d'en mettre ſur la tête, dans une grande veſſie, ce qu'elle exécuta fidèlement. Cependant la ſaiſon étant devenue très-froide, cette Dame crut devoir continuer de pareils bains, mais ils lui furent ſi funeſtes qu'elle y tomba en ſyncope. On la retira promptement de l'eau pour la mettre dans ſon lit, on tâcha de l'échauffer par divers cordiaux: vains ſecours, cette Dame ne put être rappelée à la vie. J'aſſiſtai à l'ouverture du corps, qui fut faite par M. Leduc mon Prévôt; & voici ce qu'elle nous apprit d'intéreſſant: le péricarde étoit tellement dilaté qu'il comprimoit le poumon gauche qui étoit refoulé vers la partie ſupérieure de la poitrine; il étoit plein de ſang, en partie liquide, & en partie grumelé; on découvrit un caillot conſidérable qui adhéroit à la partie poſtérieure & ſupérieure du cœur. Ce caillot ôté, on vit une ouverture d'environ huit lignes de longueur, laquelle aboutiſſoit dans le ventricule gauche qui étoit plein de ſang; l'ouverture de l'aorte étoit très-rétrécie, les valvules étoient auſſi dures qu'un cartilage, renverſées vers le cœur; deux colonnes charnues longitudinales avoient été déchirées, quelques-unes de leurs extrémités tendineuſes étoient adhérentes aux bords de la crevaſſe; ces bords étoient frangés, inégaux, comme ſeroient ceux d'un morceau de drap qu'on auroit déchiré par une forte extenſion. Il n'y

Digitized by Google

avoit aucune trace d'ulcère ; les parois du cœur avoient auſſi leur ſolidité à peu-près naturelle ; & ce qu'il y a de remarquable, c'eſt qu'auprès de cette ouverture, contre nature, il y avoit une foſſette bouchée par une membrane très-mince, qui n'étoit point percée. L'oreillette gauche, les vaiſſeaux pulmonaires & le ventricule droit étoient très-dilatés, & les parois de celui-ci étoient extrêmement minces ; il n'y avoit d'ailleurs aucune altération dans les valvules de l'artère pulmonaire, ni dans le reſte de l'étendue de ce canal.

Les oſſifications qui ſe ſont formées à l'embouchure de l'aorte dans le ventricule gauche, ont été ſans doute la première cauſe de la rupture du cœur. En rétréciſſant le canal de l'aorte, elles ont oppoſé un obſtacle à l'iſſue du ſang, l'oreillette gauche n'a pu ſe vider avec la même facilité ; les veines pulmonaires ont été ſi fort engorgées, que l'artère pulmonaire n'a pu verſer en elles le ſang qu'elle avoit reçu du ventricule droit : ainſi de proche en proche il s'eſt fait un engorgement qui a donné lieu à la dilatation des vaiſſaux pulmonaires, à celle des cavités du cœur ; & comme le ventricule droit a ſes parois beaucoup plus foibles que le ventricule gauche, il eſt arrivé qu'elles ſe ſont dilatées davantage que celles-ci, leſquelles au contraire ſe ſont déchirées les premières.

Les bains d'eau à la glace auront occaſionné un reflux de ſang dans l'intérieur du corps ; le cœur en aura été ſurchargé, & le ventricule gauche ne pouvant s'en délivrer par ſes contractions, ſe ſera enfin ouvert. Nous avons vu d'autres dilatations du ventricule droit, occaſionnées par des oſſifications des valvules de l'aorte, ou par d'autres obſtacles qui s'oppoſoient à l'iſſue du ſang du ventricule gauche par l'aorte ; ce qui fait voir qu'il faut quelquefois chercher du côté gauche du cœur, les cauſes des altérations qu'on trouve du côté droit.

Il n'en eſt pas de même à l'égard des dilatations du ventricule gauche du cœur ; les cauſes qui les produiſent

exiſtent toujours en lui, & celles qui ont leur ſiége dans le ventricule droit, ne peuvent les occaſionner. J'ai vu pluſieurs fois des dilatations du ventricule droit dans des ſujets chez leſquels, non-ſeulement le ventricule gauche n'étoit pas plus ample que de coutume, mais même étoit plus rétréci: j'en ai cherché la cauſe, & j'ai conſtamment trouvé un obſtacle qui s'oppoſoit à la circulation du ſang dans l'artère pulmonaire. Je puis citer, entr'autres, une obſervation de ce genre, que j'ai faite il y a une quinzaine d'années, dans la rue Mazarine : le ſieur Maſſon aimoit paſſionnément à donner du cor de chaſſe; il paſſoit à cet exercice les matinées, & ſouvent une bonne partie des après-dînées. Il éprouva de la difficulté de reſpirer & des crachemens de ſang; on lui preſcrivit divers remèdes, & on lui conſeilla ſur-tout d'abandonner l'uſage du cor de chaſſe. Ces conſeils furent inutiles; à peine fut-il un peu mieux, qu'il reprit le même inſtrument; il ſentit des palpitations de cœur, d'abord légères & paſſagères, mais elles devinrent en peu de temps très-vives & conſtantes. Il éprouvoit une ſuffocation continuelle, & ſe plaignoit ſur-tout d'une douleur vers le ſternum; la reſpiration devint difficile de plus en plus, ſon pouls d'une inégalité extrême, les jambes s'enflèrent: la ſituation la plus commode pour lui, étoit d'être debout ou aſſis ſur un ſiége très-haut. On remarqua que lorſqu'il étoit couché, il ſentoit quelque ſoulagement lorſqu'on lui comprimoit la poitrine légèrement à diverſes repriſes; malgré cela il ne pouvoit reſter long-temps dans cette ſituation; il eut des foibleſſes, ou plutôt des ſyncopes fréquentes; ſes extrémités reſtèrent, les deux derniers jours de ſa vie, froides comme du marbre: ce malheureux périt dans une eſpèce de ſuffocation.

Je me ſuis convaincu, par l'ouverture du corps, que cette mort avoit été occaſionnée par la dilatation du ventricule droit du cœur, qui étoit énorme & plein de ſang concret; le ſang n'a pu ſortir du ventricule droit auſſi facilement & en égale quantité qu'il y entroit par l'oreillette

Digitized by Google

qui lui correſpond, ce qui a donné lieu peu-à-peu à la dilatation de ſes parois; le ventricule gauche s'eſt trouvé rétréci, ce qui arrive toutes les fois que les dilatations du ventricule droit proviennent de quelque embarras dans l'ouverture ou dans le trajet des vaiſſeaux pulmonaires.

Telles ſont les obſervations que je m'étois propoſé de donner à l'Académie, elles prouvent:

1.° Que les ruptures du ventricule gauche du cœur ſont plus fréquentes qu'on ne croit généralement:

2.° Qu'elles peuvent ſurvenir ſans aucune altération, qui ait préalablement affoibli le tiſſu de ce viſcère:

3.° Qu'elles ſont ſouvent l'effet de la contraction, & non de la dilatation du cœur, produite par l'influx du ſang:

4.° Qu'ordinairement, lorſque le ventricule gauche eſt dilaté, le ventricule droit l'eſt auſſi; tandis au contraire que le ventricule droit eſt ſouvent dilaté ſans que le ventricule gauche le ſoit, lequel même eſt alors ſouvent rétréci.

La plupart de ces conſidérations m'ont paru intéreſſantes, ce qui m'a déterminé de les préſenter dans ce Mémoire; perſuadé d'ailleurs que, s'il eſt utile de connoître les moyens induſtrieux que la Nature emploie pour ſa conſervation, il ne l'eſt pas moins de ſavoir comment elle tend à ſa ruine, tant pour lui oppoſer les remèdes convenables lorſqu'il eſt poſſible, que pour s'en abſtenir lorſqu'ils ſont dangereux, ou même inutiles.

Je joindrai à ce Mémoire quelques obſervations ſur la rupture du ventricule & de l'oreillette gauches du cœur, qui m'ont été communiquées par M. Chauſſier, habile Chirurgien de Dijon; elles m'ont paru intéreſſantes & dignes d'être connues de l'Académie.

Le 14 Novembre 1769, M. Chauſſier fut chargé de faire la viſite juridique du cadavre du nommé Étienne Grappin, Laboureur de Saulon. Ce jeune homme, fort & vigoureux, conduiſoit une voiture chargée de pierres; ayant voulu s'aſſeoir ſur un des chevaux, le pied lui gliſſa,

Digitized by Google

il tomba, & la roue lui paſſa lentement ſur la clavicule gauche près du ſternum, & continua ſon trajet obliquement ſur le côté gauche de la poitrine : ce malheureux reſta ſur la place, ſans donner aucun ſigne de vie.

Après avoir enlevé les tégumens & les muſcles, M. Chauſſier trouva l'articulation ſternale de la clavicule relâchée, & ſur tout le côté gauche du thorax une ſuite de fractures qui s'étendoit obliquement de la partie antérieure à la partie poſtérieure.

La première côte étoit fracturée près le ſternum ; mais cette fracture étoit incomplète, car il y avoit encore à la face externe quelques lames oſſeuſes qui maintenoient la continuité de cette côte ; de ſorte que l'on voyoit aiſément qu'elle avoit ſouffert une preſſion graduée & très-forte. La ſeconde côte étoit fracturée plus obliquement en dehors ; & il y avoit au corps de cet os deux fractures diſtantes l'une de l'autre de près de trois pouces, ce qui étoit à peu près la largeur des jantes de la roue. Les autres vraies côtes & la première des fauſſes étoient également fracturées en deux endroits ; la ſeconde des fauſſes l'étoit ſeulement en un.

Les tégumens ne préſentoient aucun veſtige de contuſion ; il n'y avoit pas une goutte de ſang infiltrée dans le tiſſu cellulaire ; la plèvre étoit entière, le poumon ſans altération ; mais le péricarde étoit fort diſtendu, plein de ſang coagulé, l'oreillette gauche étoit déchirée à ſa baſe près le ventricule ; & le déchirement étoit ſi conſidérable, que l'on pouvoit facilement porter par cette ouverture deux doigts dans le ventricule gauche.

Il paroît évident à M. Chauſſier que la rupture de l'oreillette gauche a été déterminée par la preſſion exercée ſur la croſſe de l'aorte ; on ne pourra en douter, ſi l'on ſe rappelle la direction & le trajet de la roue ; ſi l'on conſidère la ſituation de la clavicule, le relâchement de ſon articulation ſternale, le poids énorme de la voiture, la lenteur de ſa marche. Tandis que la roue cheminoit lentement ſur la poitrine, la croſſe de l'aorte comprimée

Digitized by Google

refuſoit le paſſage au ſang ; l'oreillette gauche devoit en regorger ; & la force contractive du cœur augmentant par la réſiſtance qu'il éprouvoit, a déterminé la rupture dans l'endroit le plus foible de l'oreillette. C'eſt ainſi, ajoute ce célèbre Chirurgien, que nous voyons la matrice ſouffrir une rupture à ſon fond, par la force de ſa propre contraction, toutes les fois qu'il y aura à ſon col ou au baſſin un obſtacle aſſez puiſſant pour réſiſter à la ſortie de l'enfant, &c.

Dans une ſuite d'expériences que M. Chauſſier a faites ſur l'irritabilité & la ſenſibilité des animaux, il a vu les cavités du cœur ſe dilater, ſe rompre preſque dans l'inſtant, toutes les fois qu'il arrêtoit la circulation dans les groſſes artères.

Si ſur un animal vivant on ſerre par une ligature (ou ce qui eſt encore plus ſimple & plus commode) avec une pince le tronc de l'aorte, le ventricule & l'oreillette gauches ſe déchirent ; mais ſi on exerce cette preſſion ſur le tronc de l'artère pulmonaire, le ventricule, l'oreillette droite, ſe diſtendent, ſe dilatent conſidérablement ; les contractions du cœur redoublent, chaque fibre frémit & palpite ; mais M. Chaſſier n'a point vu les cavités droites ſouffrir une rupture.

Deux autres obſervations, fournies par l'ouverture des cadavres, confirmeront que tout ce qui diminue le diamètre de l'aorte, détermine la dilatation & la rupture des cavités gauches du cœur ; elles appartiennent encore à M. Chauſſier.

En Janvier 1771, un homme enfermé à la maiſon de force, périt ſubitement dans une violente diſpute qu'il eut avec un de ſes camarades : ſon cadavre ſervit aux démonſtrations publiques d'Anatomie que M. Chauſſier fait chaque année. Les parois du ventricule étoient amincies, étendues, & il y avoit à ſa pointe une rupture oblongue d'environ un pouce.

Dans la diſſection de la poitrine, ce Chirurgien trouva près la croſſe de l'aorte une tumeur de la groſſeur du poing, d'une nature preſque cartilagineuſe, qui enveloppoit le tronc de l'aorte, un peu au-deſſous de la naiſſance des artères ſouclavières & carotides.

Digitized by Google

Cette tumeur avoit dans cet endroit tellement rétréci le diamètre de l'aorte, qu'à peine pouvoit-on y paſſer l'extrémité du petit doigt.

Depuis la répercuſſion d'une humeur dartreuſe, une jeune fille avoit été ſujette à une infinité de maux très-différens. Tantôt elle éprouvoit des douleurs vagues dans les membres, tantôt des douleurs de tête très-vives, des vertiges, des éblouiſſemens, mais toujours une peſanteur à la région du cœur, un état de langueur habituel, une gêne dans la reſpiration, ſouvent des oppreſſions, quelquefois des palpitations très-fatigantes: la ſuſpenſion des règles fut regardée comme la cauſe de ces maux; tous les remèdes furent inutiles. Enfin, le 4 Juillet 1774, après trois ans de douleurs, cette fille périt tout-à-coup dans l'effort d'une toux, & en rendant quelques crachats ſanglans: elle étoit alors âgée de vingt-un ans.

M. Chauſſier fit l'ouverture du cadavre, & il trouva la cavité gauche de la poitrine pleine de ſang, le cœur d'un volume extraordinaire; le péricarde tellement adhérent à ce viſcère, qu'il ne put l'en détacher; l'oreillette & le ventricule gauches étoient tellement dilatés, qu'on pouvoit aiſément y mettre les deux poings; leurs parois tellement amincies, qu'à peine pouvoit-on les diſtinguer de la ſubſtance même du péricarde; mais la dilatation anévriſmale ne ſe bornoit pas aux cavités du cœur: les veines pulmonaires étoient également diſtendues, & il y avoit une rupture à la veine pulmonaire qui revient du lobe gauche. Cette rupture avoit près de neuf lignes, & étoit près l'entrée de la veine dans le poumon: l'aorte avoit ſon diamètre naturel; mais les valvules ſigmoïdes étoient dures, épaiſſes, avoient la groſſeur d'une petite amande, & renfermoient dans leur tiſſu une ſubſtance blanche & épaiſſe comme du plâtre, ce qui empêchoit la liberté du paſſage du ſang, & avoit produit par degrés le vice d'organiſation que M. Chauſſier obſerva aux cavités gauches du cœur.

OBSERVATIONS

Digitized by Google

OBSERVATION

SUR LA NATURE ET SUR LE TRAITEMENT D'UNE MALADIE SINGULIÈRE.

Par M. PORTAL.

S'IL n'y a qu'une ſeule manière de ſe bien porter & de vivre, il y en a une multitude d'être malade & de mourir *. Depuis long-temps les Grands Anatomiſtes ſe ſont occupés à les connoître; mais il s'en faut de beaucoup que cette importante partie de la Médecine ſoit portée à ſon dernier degré de perfection.

A proportion qu'on ſe livre à l'étude des cauſes de nos maux, il ſemble qu'on en voit augmenter le nombre; cependant comme on ne parviendra jamais à les traiter avec ſuccès, que lorſqu'on ſera parvenu à les connoître, on comprend combien il importe pour les progrès de la Médecine, que ceux qui l'exercent, rendent publiques les obſervations particulières que la pratique leur fournit.

C'eſt ce qui m'engage de faire connoître l'hiſtoire d'une maladie ſingulière qu'a éprouvée le fils de M. le Prince Giuſtiniani, Romain. Il étoit d'une foible conſtitution, cependant il étoit parvenu juſqu'à l'âge de onze ans ſans éprouver de grandes maladies. C'eſt à cette époque qu'il commença à reſſentir quelques dérangemens dans les fonctions de l'eſtomac; il n'eut d'abord que de légères envies de vomir, quelques heures après le repas; mais bientôt il éprouva, après avoir mangé, de violentes douleurs dans la région de l'eſtomac; ces douleurs étoient ſuivies de

* *Multas rerum Natura mortis vias aperuit, & multis itineribus fata decurrunt. Et hæc conditio miſerrima humani generis, quòd naſcimur uno modo, multis morimur.* Annæi Senecæ controverſ. lib. VII, contr. 1.

mouvemens convulsifs : il maigrit & dépérit de jour en jour.

On consulta les Médecins les plus célèbres de Rome, & plusieurs autres Médecins étrangers qui avoient de la réputation ; on fit divers remèdes, mais sans succès ; ce qui détermina les parens du jeune Prince, de le conduire à Paris pour l'y faire traiter.

Je fus appelé pour lui donner mes soins : voici quel étoit son état.

Environ deux heures après qu'il avoit pris quelque nourriture, il commençoit à éprouver une douleur obscure dans le bas-ventre vers la région de l'estomac ; cette douleur se prolongeoit du côté gauche sous les fausses côtes ; sa respiration devenoit gênée de plus en plus ; ses forces diminuoient, & dans peu il étoit obligé de s'asseoir accablé de fatigue. Après quelques instans il sentoit sa respiration devenir plus difficile, son visage rougissoit, ses yeux se gonfloient, devenoient saillans & très-fixes ; il éprouvoit un violent resserrement au gosier, ce qui le forçoit à sortir la langue hors de la bouche, à diverses reprises, plus ou moins vîte, suivant le degré d'étouffement qu'il éprouvoit : sa langue étoit alors d'un rouge violet & d'une épaisseur singulière ; chaque expiration étoit accompagnée d'un cri plaintif, & qu'on entendoit de très-loin.

Le malade logeoit alors sur le Jardin du Palais-Royal, d'où l'on entendoit ses cris, qui attiroient tous les jours sous ses fenêtres une multitude de personnes.

Dans cet état, il faisoit des efforts continuels pour se relever de son siége ; mais à peine s'en étoit-il un peu éloigné, qu'il étoit forcé de se laisser tomber dans son fauteuil. Deux personnes l'aidoient dans ce cruel exercice pour l'empêcher de se blesser ; il se relevoit & s'abaissoit environ vingt fois par minute ; ce qui duroit depuis trois quarts-d'heure, jusqu'à une heure & demie.

M. le Prince Giustiniani avoit alors environ vingt ans, & il y en avoit neuf qu'il étoit dans un état à peu-près

Digitized by Google

pareil, & toujours environ deux heures après qu'il avoit mangé.

Cet état ſe terminoit par deux ou trois violentes expirations; le malade quittoit alors ſon ſiége & pouvoit rejoindre la compagnie; mais on juge bien qu'il étoit d'une foibleſſe extrême, ſoit pour le moral, ſoit pour le phyſique. Il étoit d'une maigreur ſingulière; ſon teint étoit couperoſé, il dormoit beaucoup, & ſa foibleſſe l'obligeoit de reſter long-temps au lit; il ne pouvoit ſoutenir que de très-petites promenades, quoiqu'il aimât mieux ſe mouvoir, que de reſter très-peu de temps debout ſans marcher.

Les fonctions de ſon eſprit étoient très-retardées pour ſon âge, mais on voyoit que cet état de foibleſſe dans l'eſprit tenoit à la foibleſſe du phyſique: les facultés de l'ame peuvent-elles ſe développer quand le corps ſouffre un dépériſſement continuel?

J'ai vu M. le Prince Giuſtiniani dans l'état que je viens d'expoſer, & comme il étoit très-ancien, & que le malade avoit d'ailleurs été traité par des Médecins d'un grand nom, j'ai héſité d'entreprendre une pareille cure; cependant la ſingularité de cette maladie, & la triſte ſituation du malade, m'ont inſpiré le plus vif intérêt.

Je me ſuis fait rendre un compte exact des divers traitemens qui avoient été faits, & l'on penſe bien que dans l'eſpace de neuf ans, ce malade qui avoit conſulté beaucoup de Médecins, avoit fait un grand nombre de remèdes; il étoit important que je les connuſſe: ſouvent rien ne conduit mieux un Médecin à la découverte d'un bon remède, que la connoiſſance de ceux qui n'ont pas réuſſi, ou même qui ont été contraires.

Quelques Médecins, perſuadés que l'eſtomac du jeune malade manquoit de reſſorts, lui avoient fait prendre divers remèdes chauds. D'autres, qui avoient attribué la cauſe de la maladie à un excès d'irritation & de ſenſibilité dans cet organe, avoient donné des remèdes contraires aux premiers. Enfin il y avoit eu des Médecins qui avoient

cru pouvoir attribuer à des vers dans les voies alimentaires, la cauſe de la maladie, & qui avoient preſcrit les remèdes qu'ils croyoient utiles d'après cette indication. Les erreurs de ces Médecins me conduiſirent à de nouvelles recherches.

Je ne pouvois croire qu'un eſtomac trop relâché pût donner lieu à des vomiſſemens qui ne s'opèrent que par de fortes contractions de ce viſcère. Je ne pouvois non plus admettre pour unique cauſe de cette étrange maladie, un excès de ſenſibilité & d'irritabilité d'eſtomac, quand je ſavois que le malade gardoit les alimens deux heures, quelquefois davantage, ſans éprouver la plus petite douleur. Enfin étoit-il croyable que des vers puſſent régulièrement, depuis pluſieurs années, exciter les mêmes ſymptômes, à une heure fixe, après le repas, & que le malade n'en reſſentît plus enſuite aucune atteinte?

Je crus devoir attribuer à une autre cauſe la maladie du jeune Prince, mais la difficulté étoit de la découvrir. Je craignois de me liver à des conjectures; le peu de ſuccès des Médecins qui avoient été déjà conſultés, devoient me les faire craindre: je crus pouvoir trouver dans le tact des viſcères abdominaux, un moyen plus aſſuré. En effet, je reconnus que la région épigaſtrique étoit dure & gonflée, qu'il y avoit auſſi de la réſiſtance dans les hypocondres, ſur-tout dans le gauche. On ſentoit, en portant les doigts autour des fauſſes côtes gauches, une tumeur qui les débordoit d'un travers de doigt; on la ſentoit principalement vers l'extrémité antérieure & inférieure de la dernière fauſſe côte gauche.

Cette tumeur n'étoit point dure au tact, elle obéiſſoit au doigt, comme ſi elle eût été formée par une pâte molle; elle étoit plus apparente pendant l'inſpiration, & lorſque le malade avoit pris quelques alimens. Je préſumai qu'elle avoit ſon ſiége dans la rate, dont le ſang ramaſſé en trop grande quantité, augmentoit la capacité de ſes diverſes cellules.

Digitized by Google

J'avois déjà trouvé plusieurs rates gonflées de cette sorte, sans aucune autre altération apparente de sa structure, dans des sujets qui avoient éprouvé pendant long-temps des vomissemens, & qui avoient terminé par mourir dans le marasme. Je savois, d'après M. Lieutaud, que l'estomac étoit ordinairement d'autant plus ample que la rate étoit petite, ou d'autant plus rétréci que la rate étoit volumineuse: je savois, par des expériences faites sur des animaux vivans, que lorsque leur estomac est plein d'alimens, leur rate est rétrécie & presque vide de sang; & je ne doutois pas que la même chose n'eût lieu dans le corps humain, soit d'après la position de la rate entre les fausses côtes gauche, & la grosse tubérosité de l'estomac, soit d'après les observations de M. Lieutaud, déjà citées. J'avois encore vu plus d'une fois (après le grand Baillou) dans des sujets pléthoriques, sur-tout chez les hommes hémorroïdaires & chez les filles qui vont être dans l'âge de puberté, qu'il y avoit un gonflement dans le côté gauche, qui étoit plus apparent après le repas, souvent suivi de vomissemens. J'avois attribué cette tumeur à l'excès de sang dans la rate, occasionné par la compression de ses vaisseaux veineux: Morgagni a trouvé la rate d'un volume monstrueux, dans des sujets, dont la veine splénique étoit comprimée par des tumeurs, par le pancréas lui-même, devenu squirreux.

Ces observations, qu'un examen réfléchi du malade rappela à ma mémoire, me portèrent à croire que dans le jeune malade, l'estomac, pressé & comprimé par la rate, étoit rétréci; que les alimens ne pouvoient le gonfler, même le distendre suffisamment, qu'ils ne pouvoient aussi en sortir qu'avec peine, ce qui en rendoit le passage douloureux & difficile dans le duodenum, & produisoit les accidens ci-dessus énoncés. J'étois d'autant plus en droit de le croire, que le Prince étoit soulagé lorsqu'il avoit passé le temps de la première digestion; d'ailleurs, il étoit d'une si grande sensibilité, que je pensai que celle de l'estomac devoit être extrême, & que peut-être même

Digitized by Google

cette ſenſibilité donnoit lieu à une criſpation des parties internes, capable de rétrécir les veines deſtinées à rapporter le ſang de la rate, d'où provenoit ſon gonflement; je dirigeai mon traitement ſur ces indications.

Je conſeillai au malade de faire un grand uſage des remèdes relâchans, pour parvenir à celui des fondans. Il prit en conſéquence une vingtaine de bains tièdes, de ſuite, chaque jour un de deux heures; il but pendant deux ou trois ſemaines beaucoup d'eau de veau, d'eau de poulet, des émulſions.

On ajouta enſuite à ces boiſſons des ſucs dépurés des plantes chicoracées, à petites doſes; mais comme le malade les vomiſſoit ſouvent, ſoit parce qu'ils fatiguoient l'eſtomac par leur poids, ſoit parce qu'ils ne pouvoient pas facilement paſſer par le pylore, je fus obligé d'en faire ſuſpendre l'uſage, & je me bornai enſuite à preſcrire au malade, dans de l'eau commune, trois ou quatre fois par jour, un demi-gros, & même un gros de terre foliée, de tartre criſtalliſé. Ce fut le fondant qu'il ſupporta le mieux; cependant, comme il fut quelquefois ſuivi du vomiſſement, lors même qu'on l'avoit donné à des doſes très-inférieures à d'autres, qui avoient fort bien paſſé, je penſai qu'il falloit attribuer cette variation dans les vomiſſemens, à celle de l'irritation de l'eſtomac, & que ſi on parvenoit à l'émouſſer, on diminueroit les vomiſſemens. Je crus alors qu'il falloit aſſocier les calmans aux fondans, & je preſcrivis des pilules faites avec cinq grains d'*aſſa fœtida*, quatre grains de camphre & un grain de muſc.

Le malade prenoit trois fois par jour ces pilules, après qu'il avoit pris un demi-gros de terre foliée de tartre dans trois onces d'eau de menthe ſimple. On ajoutoit aux pilules du ſoir un ou deux grains de celle de cynogloſſe.

En énervant ainſi la ſenſibilité de l'eſtomac, la terre foliée du tartre n'étoit point rejetée par le vomiſſement, & jouiſſoit, comme fondant, de toute ſon énergie. De

Digitized by Google

cette manière, le malade parvint, pour la première fois, à prendre des remèdes ſans les vomir; & comme il importoit de lui donner l'aliment que ſon eſtomac ſupportoit le mieux, je le mis à l'uſage du chocolat, qu'il prenoit deux ou trois fois par jour, ce qui fut continué environ ſix ſemaines. Alors le chocolat paſſant parfaitement bien, & le malade n'éprouvant plus aucune eſpèce d'accident, il fut queſtion de le mettre peu-à-peu à l'uſage des alimens ordinaires.

Je crus devoir changer & augmenter ſa nourriture, par degrés; d'abord, on joignit les œufs au chocolat pour en faire une crême; enſuite je permis au malade quelques légumes herbacés, tels que les épinards & la chicorée: enfin, on paſſa ſucceſſivement à l'uſage des viandes hachées, bouillies & enfin rôties. M. le Prince Giuſtiniani parvint ainſi à prendre des alimens ſolides, dont il n'avoit point fait uſage depuis tant d'années.

Je ne puis dépeindre quelle fut la joie qu'il reſſentit le premier jour qu'il put digérer, ſans accident, les alimens qu'il avoit pris pour ſa ſubſiſtance; il ſe défioit de ſon bonheur: tous les jours les mêmes craintes ſe renouveloient, & ce ne fut qu'après un aſſez long eſpace de temps, que ſes digeſtions ne furent plus troublées par de cruelles inquiétudes.

Je ne puis m'empêcher d'obſerver ici, que les alimens les plus doux lui parurent d'abord très-forts au goût, & que ſon palais ne pouvoit ſupporter l'impreſſion de ceux qui avoient un peu plus de ſaveur. Cette ſenſation s'eſt émouſſée par des degrés bien dignes de remarque; ſemblable en cela à ceux qui voient le jour pour la première fois, après une opération de la cataracte, d'abord la plus foible lumière les bleſſe; peu-à-peu ils en ſouffrent une plus vive; enfin, ils la ſupportent, & elle leur devient néceſſaire comme à tous les autres hommes.

La région épigaſtrique, & les hypocondres, ſur-tout le

Digitized by Google

gauche, qui étoient engorgés depuis ſi long-temps, devinrent plus ſouples : la rate avoit perdu de ſon volume contre nature, & étoit, pour ainſi dire, rentrée dans ſes bornes: l'eſtomac pouvoit plus aiſément ſe dilater, & garder des alimens, ce qui s'eſt maintenu à peu-près dans le même état.

Cependant, on a remarqué deux ou trois fois, que les régions ſupérieures de l'abdomen commençoient à s'engorger de nouveau, ce qui a obligé de reprendre l'uſage des remèdes que je viens d'indiquer. J'ai conſeillé au malade les eaux de Vichy, à la doſe de deux verres tous les matins, pendant une vingtaine de jours, & lorſque j'ai cru néceſſaire de le purger, ce qui a eu lieu deux ou trois fois, j'ai préféré l'huile de *palma chriſti* aux autres purgatifs qu'il ne pouvoit ſupporter.

C'eſt par ce traitement heureux que M. le Prince Giuſtiniani eſt parvenu à digérer, avec facilité, tous les alimens dont on uſe ordinairement; auſſi s'eſt-il remis à vue-d'œil. Dans l'eſpace de quelques mois il a repris de l'embonpoint & des forces; ſon eſprit s'eſt ſingulièrement développé; & il étoit ſi content de l'heureux changement qu'il éprouvoit, qu'il ne vouloit plus abandonner l'uſage des remèdes que je lui avois preſcrits. Cependant je les lui fis diminuer par degrés, & lorſque je me fus bien aſſuré qu'ils lui étoient inutiles, je les lui fis ceſſer, en lui recommandant d'y recourir à l'automne & au printemps, pendant l'eſpace de quelques années; ce qu'il a fait avec ſuccès.

M. le Prince Giuſtiniani jouit aujourd'hui de la meilleure ſanté, & fait le bonheur & l'ornement d'une illuſtre famille.

Depuis cette époque, j'ai eu occaſion de me convaincre que diverſes maladies, qu'on avoit attribuées à l'eſtomac, venoient de la dilatation, contre nature, de la rate ou des veines qui en rapportent le ſang dans le tronc de la veine-porte, ſoit que ces cauſes exiſtaſſent ſéparément ou à la fois.

Cette dilatation variqueuſe de la rate ou de ſes veines, arrive après la ceſſation de quelques hémorragies critiques, ou lorſque la Nature ne peut les opérer. Elle eſt plus commune

Digitized by Google

commune qu'on ne croit, dans les jeunes perſonnes, ſurtout dans celles du ſexe.

Chez elles, le tiſſu ſpongieux de la rate eſt ſi mou qu'elle ſe gonfle facilement par la ſeule ſtagnation du ſang: dans les adultes, rarement c'eſt la rate elle-même qui ſe dilate par cette cauſe; mais cet état alors a lieu dans les veines qui ſont plus ſouples, ce qui eſt ordinairement d'autant plus fâcheux qu'on le méconnoît; & comme pluſieurs de ſes rameaux veineux entourent en quelque manière le pylore, ils ne peuvent ſe gonfler ſans le rétrécir, ce qui donne lieu aux accidens les plus graves, & dont on ne connoit ſouvent la cauſe que par l'ouverture du corps.

Les tuméfactions de la rate ſont d'autant plus dangereuſes, qu'elles ſe forment lentement, & qu'il y a de la dureté dans la partie gonflée; alors la ſtagnation du ſang en eſt plutôt l'effet que la cauſe, & les remèdes différens qu'on eſt obligé de preſcrire, n'ont jamais un effet auſſi prompt, & rarement auſſi efficace.

Cette queſtion mérite d'être approfondie; je me propoſe de la traiter d'une manière plus étendue, dans un autre Mémoire.

Digitized by Google

OBSERVATIONS DE MERCURE,

Faites à l'École Royale-militaire.

Par M. D'AGELET. *(a)*

LE quart-de-cercle mural de 7 pieds $\frac{1}{2}$ de rayon, fait par M. Bird, en 1775, pour le compte de M. Bergeret, par les soins de M. de la Lande, m'ayant été confié en 1778, je n'ai ceſſé d'en faire uſage pour le bien de l'Aſtronomie. Un nouveau catalogue des Étoiles boréales a été le principal objet de mon travail, & j'ai déjà pluſieurs milliers d'obſervations; mais je n'ai pas négligé celles des Planètes, & j'en avois déjà huit cents, lorſqu'au mois de Mars 1782, j'eus l'honneur de préſenter à l'Académie mon Journal d'obſervations. M. de la Lande en a rapporté beaucoup dans le quatrième volume de ſon Aſtronomie, en 1781, & dans le huitième volume de ſes Éphémérides, en 1783; en voici quelques-unes de Mercure, elles ſont rares, c'eſt ce qui me détermine à les publier dès-à-préſent: M. de Lambre, habile Aſtronome, déjà très-connu de l'Académie, a bien voulu en faire les réductions, ainſi que de celles qui ont déjà paru dans les Éphémérides.

La latitude de mon obſervatoire *(b)* eſt $48^d\,51'\,5''$, il eſt à $7,''6$ de temps à l'occident de l'Obſervatoire royal.

(a) M. d'Agelet étant parti pour faire le tour du Monde, au mois de Juillet 1785, il a laiſſé ſes Regiſtres d'obſervations à M. de la Lande, avec qui il obſervoit depuis 1768, c'eſt-à-dire dès l'âge de quinze ans, & cet Académicien s'eſt chargé de les publier.

(b) Cet obſervatoire a été démoli en 1786, mais on l'a reconſtruit un peu plus près du grand corps de bâtiment de l'École Militaire.

Digitized by Google

ANNÉES, MOIS & JOURS.	TEMPS MOYEN réduit à l'Observatoire.	LONGITUDE OBSERVÉE.	LATITUDE OBSERVÉE.
	H. M. S.	S. D. M. S.	D. M. S.
1779.			
Juin 3	22. 26. 26	1. 20. 40. 9	3. 49. 6 A.
1780.			
Janv. 14	22. 31. 32	9. 1. 14. 59	2. 26. 37 A.
21	22. 27. 10	9. 7. 31. 30	1. 7. 35 A.
Mai 27	22. 26. 6	1. 14. 21. 59	2. 53. 48 A.
28	22. 26. 32	1. 15. 46. 11	2. 47. 8 A.
29	22. 28. 11	1. 17. 13. 15	2. 39. 56 A.
Juin 2	22. 36. 45	1. 23. 27. 54	2. 5. 59 A.
8	22. 56. 0	2. 4. 8. 36	1. 3. 49 A.
9	23. 0. 0	2. 6. 4. 11	0. 52. 43 A.
Juillet 29	1. 51. 20	5. 4. 5. 6	1. 1. 54 A.
30	1. 51. 0	5. 5. 6. 55	1. 13. 7 A.
Sept. 12	22. 49. 53	5. 3. 18. 5	0. 33. 45 B.
Oct. 8	0. 49. 55	8. 3. 11. 42	2. 0. 50 A.
1781.			
Mars 7	1. 3. 46	0. 1. 46. 14	0. 17. 36 B.
10	1. 9. 28	0. 6. 49. 9	0. 55. 48 B.
13	1. 12. 49	0. 11. 13. 3	1. 35. 12 B.
14	1. 13. 19	0. 12. 30. 31	1. 47. 49 B.
15	1. 13. 24	0. 13. 41. 11	2. 0. 31 B.
16	1. 13. 9	0. 14. 45. 49	2. 12. 24 B.
17	1. 12. 28	0. 15. 43. 9	2. 23. 53 B.
18	1. 11. 21	0. 16. 33. 19	2. 34. 30 B.
Juillet 5	1. 50. 35	4. 8. 51. 13	0. 48. 4 B.
Août 25	22. 51. 0	4. 15. 28. 47	0. 40. 50 A.

MÉMOIRE

Sur le premier Drap de Laine ſuperfine du crû de la France.

Par M. DAUBENTON.

Relû le 9 Juin 1784.

JUSQU'À PRÉSENT on n'a pu faire des Draps fins qu'avec la laine achetée chez les Eſpagnols; mais cette Nation qui a déjà établi aſſez de Manufactures pour employer toutes ſes Soies, ne manquera pas de garder toutes ſes Laines, dès que ſes Fabriques de draps pourront les conſommer en entier: alors il ne ſe feroit plus de draps fins en France, & nous ſerions obligés de les tirer de l'Eſpagne.

M.rs de Trudaine ayant prévu ce grand inconvénient pour le Commerce, me firent l'honneur de me conſulter en 1766, afin de ſavoir s'il ſeroit poſſible d'améliorer les laines de France, au point de ſuppléer aux laines étrangères, dans nos Manufactures de draps fins. Les obſervations que j'avois faites depuis long-temps ſur les races métiſſes des animaux domeſtiques, me firent penſer que par un bon choix des béliers & des brebis pour leurs alliances, on pourroit rendre leurs laines plus fines ou plus longues. D'après cette conſidération, M.rs de Trudaine me propoſèrent de faire les expériences néceſſaires pour cet objet; je m'en chargeai avec d'autant plus d'eſpérance de ſuccès, que le climat de la France me paroiſſoit plus favorable aux bêtes à laine, que celui de l'Eſpagne ou de l'Angleterre, parce qu'il y a moins de chaleurs en France qu'en Eſpagne, & moins de brouillards qu'en Angleterre.

M.rs de Trudaine obtinrent de M. de l'Averdy, alors Contrôleur général des finances, tout ce qui étoit néceſſaire pour mes expériences. Le Gouvernement fit venir

Digitized by Google

ſucceſſivement des béliers & des brebis de Rouſſillon, de Flandre, d'Angleterre, de Maroc, du Tibet & d'Eſpagne. Je mis toutes ces races de bêtes à laine dans la bergerie que j'ai établie près de la ville de Montbard, dans un canton un peu montueux, & par conſéquent favorable à la production des laines ſuperfines qui étoient mon principal objet. Je ne conſtruiſis point d'étables, je tins tous ces animaux en plein air nuit & jour pendant toute l'année, ſans aucun abri: cette expérience eut un entier ſuccès, dont je rendis compte à l'Académie, en 1769, dans une Aſſemblée publique.

J'alliai les béliers dont la laine étoit la plus fine, avec des brebis à laine jarreuſe, qui avoient autant de poil que de laine, pour juger par ces extrêmes, de l'effet de la laine du bélier ſur celle de la brebis: je fus très-ſurpris de voir ſortir de ce mélange un bélier à laine ſuperfine. Cette grande amélioration me donna d'autant plus d'eſpérance pour le ſuccès de mon entrepriſe, qu'elle avoit été produite par un bélier de Rouſſillon; car je n'avois point alors de béliers d'Eſpagne.

En 1776, il me vint des béliers & des brebis d'Eſpagne; alors j'eus ſept races de bêtes à laine très-diſtinctes, y compris la race de l'Auxois, qui eſt le pays où ma bergerie eſt ſituée. J'ai perpétué juſqu'à préſent toutes ces races ſans mélange, pour ſavoir ce qu'elles deviendroient dans ma bergerie: j'ai auſſi allié ces ſept races entr'elles, pour avoir d'autres races métiſſes, & pour connoître à quel degré elles influeroient les unes ſur les autres, relativement à l'amélioration des laines.

Par ces expériences, ſuivies avec les plus grandes précautions pour qu'il n'y eût point d'équivoque, j'ai amené toutes les races de ma bergerie au degré de fineſſe de la laine d'Eſpagne, ſans tirer de nouveaux béliers de ce pays ni de Rouſſillon. On peut voir les preuves réelles de ces faits, ſur les troupeaux de ma bergerie, & ſur un petit

Digitized by Google

troupeau que j'ai fait venir à la ménagerie de l'École vétérinaire d'Alfort près de Charenton.

J'ai trouvé de la difficulté à me convaincre moi-même de cette belle amélioration : il y a des degrés de fineſſe dans les laines, qu'il eſt impoſſible de diſtinguer au doigt ni à l'œil ; lorſque j'y fus parvenu, je ne pouvois plus ſavoir ſi j'améliorois ou ſi je détériorois les laines par de nouveaux mélanges de races. Alors j'apportai des échantillons de ces laines à Paris, & après avoir conſulté les meilleurs connoiſſeurs en ce genre, je les trouvai auſſi incertains que moi, & j'en conclus que ni les gens qui vendent la laine d'Eſpagne, ni ceux qui l'achettent, ni les Manufacturiers qui l'emploient, n'en peuvent pas diſtinguer les différens degrés de fineſſe avant d'en avoir fait du drap.

Cependant il falloit néceſſairement que je miſſe de la préciſion dans les réſultats de mes expériences : pour y parvenir, j'imaginai de meſurer le diamètre des filamens de la laine, par un micromètre appliqué au microſcope. Ce moyen me réuſſit parfaitement, il me fit voir clairement les progrès de l'amélioration des laines : ce moyen eſt auſſi le ſeul qui puiſſe éclairer, à l'inſpection de la laine, le Manufacturier, ſur le degré de fineſſe que doit avoir le drap qu'il va fabriquer : mais le microſcope n'étant pas entre les mains de tout le monde, j'ai indiqué aux propriétaires de troupeaux & aux bergers, une manière fort aiſée de reconnoître les différens degrés de la fineſſe des laines : le détail de ces procédés eſt dans les Mémoires de l'Académie de 1777, & dans l'Inſtruction des Bergers, que j'ai publiée en 1782.

Après m'être aſſuré que mes laines étoient parvenues au degré de ſuperfin, il falloit encore les éprouver dans la fabrication du drap, & comparer celui qui en ſeroit fait, avec le drap de laine d'Eſpagne. L'année dernière, j'ai envoyé à M. l'Entrepreneur de la Manufacture royale de draps de Château-du-parc près de Châteauroux en

Digitized by Google

Berri, huit cents vingt-huit livres de mes laines lavées à dos : avant d'en faire le prix, il en a fait des draps de différentes couleurs; après ces épreuves, il s'eſt engagé à les payer au plus haut prix des laines d'Eſpagne tranſportées en France, & à un moindre terme pour l'échéance, parce qu'il a reconnu dans les laines que j'ai améliorées, plus de force & de nerf, avec la même fineſſe à l'œil, la même douceur au toucher; parce que non-ſeulement elles ſe ſont tirées auſſi fin à la filature, mais qu'elles ont ſouffert un tors beaucoup plus conſidérable ſans ſe caſſer; & parce que les Ouvriers ont trouvé que la chaîne des draps fabriqués avec ces laines, étoit plus nerveuſe & plus forte qu'avec les laines d'Eſpagne. Quoique les miennes aient été filées & tiſſues dans le fort de l'hiver dernier, les draps ont pris un foulage très-ferme, & ſont devenus plus forts que les draps de laine d'Eſpagne, faits en France: ils ont plus de rapport avec ceux que les Anglois fabriquent. Le Manufacturier s'eſt empreſſé de faire de ces draps forts avec les laines que je lui ai envoyées, parce qu'il croit qu'ils ſeront plus durables, qu'ils réſiſteront mieux à la pluie, & qu'ils auront un meilleur débit dans le commerce du Nord. À préſent il va travailler à faire avec ces laines, des draps ſouples & moelleux comme ceux que nous faiſons avec les laines d'Eſpagne.

La fabrique du premier drap de laine ſuperfine, du crû de la France, eſt un évènement important pour les Manufactures & pour le Commerce. Les moyens que j'ai donnés pour faire croître des laines ſuperfines, d'après de longues expériences, dans pluſieurs Mémoires & dans l'Inſtruction pour les Bergers, ſont faciles & peu diſpendieux; ſi nous les mettons en exécution, nous pourrons faire des draps fins avec nos laines. La durée de cette amélioration eſt déjà prouvée par ſeize ans d'expériences ſur les laines de Rouſſillon, & par huit ans ſur les laines d'Eſpagne.

Il y a en France pluſieurs exemples de l'amélioration des laines à un grand degré de fineſſe : les propriétaires

Digitized by Google

de troupeaux, qui ont acquis des béliers dont la laine étoit plus fine que celle des brebis du pays, ont eu la satisfaction de voir leurs laines se perfectionner & augmenter de prix: des béliers & des brebis d'Espagne se sont déjà perpétués pendant nombre d'années dans plusieurs de nos provinces, sans avoir dégénéré. Je suis très-convaincu par ma propre expérience & par beaucoup d'autres, que tous les pays montueux de la France peuvent produire des laines superfines, & que nous aurons des laines très-longues dans les pâturages abondans de nos plaines.

J'ai vu avec plaisir les sages règlemens que l'Administration provinciale de Berri a faits pour l'établissement d'une école de Bergerie & de Parcage, & je me suis empressé de donner un de mes bergers pour en être le maître; j'enverrai aussi des béliers de ma bergerie, qui m'ont été demandés pour cette province.

Les bêtes à laine étrangères ne sont pas nécessaires pour multiplier en France les laines superfines & les laines longues: des béliers choisis dans le Roussillon & dans la Flandre en produiront bientôt, si nous prenons de l'émulation, comme les Anglois, pour faire valoir nos troupeaux, & si le Gouvernement la favorise. Peut-être le besoin nous rendroit-il encore plus actifs: si l'Étranger refusoit de nous vendre des laines superfines, nous ferions promptement des efforts pour faire croître ces laines en France, plutôt que de renoncer à la fabrication & au commerce des draps fins.

L'heureux succès des épreuves que j'ai faites avec soin sur les troupeaux & sur les pâturages, pendant dix-huit ans, m'encourage à les continuer avec la même exactitude dans tout ce qui peut contribuer à l'amélioration des bêtes à laine. Je publierai incessamment une Instruction sur la culture & l'emploi des Pâturages.

ADDITION

Digitized by Google

ADDITION AU MÉMOIRE
SUR LE
PREMIER DRAP DE LAINE SUPERFINE DU CRÛ DE LA FRANCE.

Par M. DAUBENTON.

Lû le 28 Août 1784.

LORSQUE j'ai lû à l'Académie un Mémoire ſur le premier Drap de laine ſuperfine du crû de la France, on n'avoit encore fabriqué que du drap fort avec les laines que j'ai améliorées : la mauvaiſe ſaiſon de l'hiver n'avoit pas permis de les filer aſſez fin, & de les fouler aſſez pour avoir des draps ſouples. On vient de faire de ces draps avec mes laines, à la Manufacture royale du Château-du-Parc ; le Manufacturier a jugé qu'ils étoient auſſi doux que ceux qui ſont faits avec la plus belle laine d'Eſpagne, & il a remarqué dans chacune des opérations ſucceſſives de la fabrique, que la laine améliorée avoit un nerf particulier, c'eſt-à-dire, plus fort & plus ſenſible que celui de la laine d'Eſpagne. On avoit déjà obſervé la même qualité de laine, en fabriquant le drap fort dont il s'agit dans le Mémoire précédent.

Ces obſervations donnent lieu de préſumer que les laines qui ſeront améliorées dans l'intérieur de la France, pourront être, non-ſeulement auſſi fines, mais encore plus fortes & plus nerveuſes que les laines ſuperfines d'Eſpagne, & que cette force ſera d'autant moindre avec la même fineſſe, que les troupeaux ſe trouveront dans les provinces de France les plus méridionales : cette préſomption eſt fondée ſur mes propres expériences, & de plus, ſur le produit de la grande importation de bêtes à laine, qui fut faite, dans le quinzième ſiècle, d'Eſpagne en Angleterre.

Les Anglois diſtribuèrent mille béliers & deux mille

brebis de Caſtille, dans leurs provinces, chez différens particuliers; c'eſt-là l'époque principale de l'amélioration des laines angloiſes. Quel a été le produit de cette importation? qu'eſt devenue la laine ſuperfine de Caſtille, dans les provinces d'Angleterre? elle a dégénéré de ſa qualité de ſuperfine, mais elle a acquis une autre qualité; elle s'eſt accrue en longueur, ſur un ſol frais & fertile, dont les pâturages abondans ſont entretenus par l'humidité des brouillards.

En conſidérant l'état actuel des laines de France, nous voyons que les plus fines ſe trouvent naturellement dans des lieux élevés, tels que le Rouſſillon, qui eſt au pied des Pyrénées, la Bourgogne près de la ſource de la Seine, le Berri près des ſources de l'Indre & du Théols: au contraire, les plus longues laines ſont dans les plaines des provinces les plus baſſes, ſur-tout dans la Flandre. Ce fut dans ce pays & dans le Brabant, qu'il y eut, au quatorzième ſiècle, une récolte de laine ſi abondante & ſi avantageuſe aux habitans, que leur Souverain, Philippe-le-Bon, Duc de Bourgogne, voulut, dit-on, en perpétuer la mémoire, par l'inſtitution de l'ordre de la Toiſon d'or.

On dit que dans le dernier ſiècle, on introduiſit en Flandre une nouvelle race de bêtes à laine, que les Hollandois avoient tirée des grandes Indes, & établie ſur les bords du Texel. Cette race eſt encore aujourd'hui fort abondante en laine longue; à en juger par les individus que j'ai diſſéqués, elle m'a paru différer des autres races, par la conformation, car j'y ai trouvé ſept vertèbres dans les lombes, tandis que je n'en ai vu que ſix dans les individus des autres races. Cette conformation annonce que la race des bêtes à laine de Flandre, eſt ſuſceptible d'une grande amélioration pour la taille de l'animal, & pour la quantité & la longueur de ſa laine; il eſt à croire qu'elle ſurpaſſeroit les meilleures races angloiſes, quoiqu'il y ait déjà quelques-uns de leurs individus, dont la laine a juſqu'à vingt-deux pouces de longueur.

Digitized by Google

La Nature ſe modifie de mille manières dans les animaux domeſtiques, par les alliances; nous en voyons tous les jours des exemples auſſi inconteſtables qu'évidens. Les Naturaliſtes conviennent que tous les chiens ſont de même race, on en a de bonnes preuves; cependant le grand danois eſt de très-haute taille, en comparaiſon des chiens les plus petits; le poil du lévrier eſt court, tandis que celui du chien-loup eſt beaucoup plus long; le mâtin a un poil gros & fort, au contraire celui du chien-bouffe eſt fin & ſouple: toutes ces différentes races d'une même eſpèce, viennent principalement des alliances de différens individus. L'eſpèce des moutons doit être ſujette aux mêmes variétés; nous avons déjà beaucoup de races de ces animaux, nous en ferons autant que nous le voudrons, comme il s'en eſt fait & comme il s'en fait tous les jours parmi les bœufs, les chèvres, les cochons, les lapins, les chats, &c. c'eſt une loi générale dans la Nature; tous les caractères des animaux qui ne ſont pas eſſentiels à leur eſpèce, peuvent changer, & former, pour ainſi dire, une infinité de races.

Ces races ſe maintiennent aiſément ſi l'on a ſoin d'allier leurs individus bien caractériſés, ſans aucun mélange d'autres races: nous avons des exemples toujours ſubſiſtans de cette ſucceſſion, dans les races ſoignées des chiens de chaſſe, & même dans des races peu ſoignées, telles que les cochons de Siam, les chiens de bergers, les chats d'Eſpagne, &c. une preuve encore plus convaincante, c'eſt mon expérience ſur les races de moutons de Rouſſillon & d'Eſpagne, que j'ai maintenues pendant pluſieurs années à une grande diſtance des pays dont elles ſont originaires, & dans un climat différent.

L'intérêt que M. de Calonne, Contrôleur général des finances, a pris à mon Mémoire *ſur le premier drap de laine ſuperfine, du crû de la France;* & ſon empreſſement à le mettre ſous les yeux du Roi, & à le faire imprimer pour le répandre promptement dans le Public, prouvent que

Digitized by Google

ce Miniſtre projette de favoriſer l'amélioration des laines. Sur ce qu'il m'a fait l'honneur de me dire à ce ſujet; je ſuis perſuadé qu'il diſcutera avec autant de diſcernement que d'attention, les meilleurs moyens de faire cette amélioration, & qu'ils ſeront exécutés avec cette ſageſſe & cette prudence d'adminiſtration, ſi néceſſaires pour faire réuſſir, dans un grand royaume, des pratiques d'agriculture nouvelles & importantes.

M. le Comte de Vergennes eſt auſſi convaincu de la néceſſité preſſante d'améliorer les laines de France, pour le bien du Commerce; ce Miniſtre veut y contribuer lui-même, en faiſant améliorer dans ſes terres, des troupeaux qui ſeront ſoignés par un berger formé dans ma bergerie.

Digitized by Google

MÉMOIRE
SUR L'EXPRESSION ANALYTIQUE DE LA GÉNÉRATION DES SURFACES COURBES.

Par M. MONGE.

D'APRÈS les premières notions de l'application de l'Analyse à la Géométrie, l'on sait qu'une équation algébrique quelconque à deux variables, exprime la relation qu'ont entr'elles les coordonnées d'une certaine courbe; que les constantes qui entrent dans cette équation, sont des fonctions des paramètres de la courbe, c'est-à-dire, des droites qui doivent servir à sa construction; & que lorsqu'on assigne à ces constantes des valeurs particulières, la courbe à laquelle appartient l'équation, est absolument déterminée. Mais si l'on donne à ces constantes successivement différentes valeurs, la courbe, sans changer de caractère, change de forme & de position, en sorte que si l'on regarde les paramètres comme susceptibles de toutes les valeurs possibles, l'équation dans laquelle les constantes ont alors des valeurs arbitraires, n'appartient plus à une courbe particulière; elle exprime le caractère dont on vient de parler, c'est-à-dire, une propriété commune à toutes les courbes d'une même famille, & pour lesquelles ces paramètres sont indifférens: il en est de même des équations à trois variables pour les surfaces courbes.

On peut exprimer de deux manières, que des paramètres sont arbitraires, 1.° en les représentant par des caractères d'un genre particulier, comme on représente les quantités constantes par les premières lettres de l'alphabet, & les variables par les dernières; 2.° en différenciant l'équation algébrique successivement autant de fois qu'il y a

Digitized by Google

de paramètres, & éliminant enſuite ces paramètres à l'aide des équations différentielles : l'équation aux différences ordinaires, à laquelle on arrive par ce moyen, exprime la propriété dont jouiſſent toutes les courbes ou toutes les ſurfaces de la même famille, indépendamment des paramètres qui ont diſparu par la différentiation, & qui par conſéquent ſont indifférens.

Pareillement, ſi l'on conçoit qu'une ſurface courbe ſoit engendrée par le mouvement déterminé d'une certaine courbe, & que cette courbe ſoit donnée, c'eſt-à-dire, que l'on connoiſſe comment deux de ſes coordonnées ſont fonctions de la troiſième, l'équation de cette ſurface ſera parfaitement déterminée; mais elle contiendra les fonctions dont on vient de parler, puiſque par-tout, à la place des deux coordonnées de la courbe génératrice, on aura dû mettre leurs expreſſions par le moyen de la troiſième. Si l'on ſuppoſe donc que ces fonctions viennent à varier de forme, c'eſt-à-dire, que la courbe génératrice change de nature, la ſurface, ſans changer de caractère, variera de forme & de poſition dans l'eſpace; en ſorte que ſi l'on regarde les fonctions comme ſuſceptibles de toutes les formes poſſibles, l'équation ne ſera plus celle d'une ſurface particulière, elle exprimera une propriété commune à toutes les ſurfaces engendrées de la même manière, & pour leſquelles la courbe génératrice eſt indifférente.

On peut de même exprimer de deux manières, qu'une fonction eſt arbitraire, 1.° en la repréſentant par un caractère particulier; 2.° en différenciant l'équation algébrique par rapport à chacune des variables principales, & éliminant enſuite les fonctions par le moyen des équations différentielles: l'équation aux différences partielles, à laquelle on eſt alors conduit, énonce la manière dont la ſurface eſt engendrée, ſans rien ſtatuer ſur la nature de la courbe qui a ſervi à cette génération, & dont il ne reſte aucune trace dans l'équation.

Digitized by Google

J'ai déjà donné, dans différens Mémoires, les expreſſions des générations de pluſieurs ſurfaces courbes; par exemple, 1.° l'équation

$$b\frac{dz}{dx} - a\frac{dz}{dy} = \frac{ab}{\beta},$$

dont l'intégrale eſt

$$ax - \beta z = \varphi(ax - by),$$

exprime que la ſurface eſt cylindrique, c'eſt-à-dire, qu'elle eſt engendrée par le mouvement d'une baſe quelconque, & qui eſt indifférente, le long d'une droite, dont les équations ſont

$$ax - by = 0,$$
$$ax - \beta z = 0.$$

2.° L'équation

$$y\frac{dz}{dx} - x\frac{dz}{dy} = 0,$$

dont l'intégrale eſt

$$z = \varphi(x^2 + y^2),$$

exprime qu'une ſurface eſt engendrée par la révolution d'une courbe quelconque autour de l'axe des z, ſans rien ſtatuer ſur la nature de la courbe génératrice, qui eſt indifférente.

3.° L'équation

$$\frac{ddz}{dx^2}\cdot\frac{ddz}{dy^2} = \left(\frac{ddz}{dxdy}\right)^2,$$

dont l'intégrale eſt le réſultat de l'élimination de V des deux équations ſuivantes,

$$y - \varphi V = (x - V)\varphi' V,$$
$$z - \psi V = (x - V)\psi' V,$$

ou de ces deux-ci,

$$z = x\varphi V + y\psi V + V,$$
$$x\varphi' V + y\psi' V + 1 = 0,$$

Digitized by Google

énonce qu'une ſurface eſt développable, c'eſt-à-dire qu'elle eſt engendrée par le mouvement d'une droite qui ne ceſſe pas d'être tangente à une même courbe à double courbure quelconque, courbe qui peut être tout ce qu'on voudra, puiſqu'il n'en eſt pas queſtion.

4.° L'équation qui exprime qu'une ſurface eſt engendrée par le mouvement d'une droite quelconque, ſans rien dire de particulier ſur les trois courbes qui ont dirigé ſon mouvement, eſt

$$m^3 \frac{d^3 z}{dx^3} - 3m^2 \frac{d^3 z}{dx^2 dy} + 3m \frac{d^3 z}{dx dy^2} - \frac{d^3 z}{dy^3} = 0,$$

en faiſant pour abréger,

$$m^2 \frac{ddz}{dx^2} - 2m \frac{ddz}{dx dy} + \frac{ddz}{dy^2} = 0,$$

& ſon intégrale eſt le réſultat de l'élimination de l'arbitraire z' des deux équations

$$z = x\varphi z' + z',$$
$$y = x\downarrow z' + \varpi z'.$$

Dans les deux premiers exemples, la ligne génératrice eſt indifférente, & c'eſt la loi de ſon mouvement qui eſt énoncée par l'équation aux différences partielles; dans les deux autres, au contraire, les lignes génératrices ſont conſtamment des droites, ce ſont les courbes qui dirigent leurs mouvemens, qui ſont arbitraires, & l'équation différentielle énonce comment le mouvement eſt dirigé.

Je me propoſe dans ce Mémoire, de trouver l'équation qui exprime qu'une ſurface eſt engendrée d'une manière quelconque, par une courbe conſtante de forme & variable de poſition dans l'eſpace, ſans dire rien de particulier ni ſur la nature de la courbe génératrice, ni ſur celles qui dirigent ſon mouvement; mais avant que d'entrer dans cette généralité, je vais commencer par quelques cas particuliers, plus faciles à ſuivre.

I.

Digitized by Google

I.

Exprimer qu'une ſurface courbe eſt engendrée par la circonférence d'un cercle dont le rayon eſt conſtant, & dont le plan eſt toujours normal à la courbe parcourue par ſon centre

Tout étant rapporté à trois plans rectangulaires, ſoient x, y, z les trois coordonnées de la ſurface demandée, a le rayon du cercle générateur; & x', y', z', les trois coordonnées du centre. Si les équations de la courbe parcourue par le centre, ſont repréſentées par $y = \varphi z$ & $x = \psi z$, on aura $y' = \varphi z'$ & $x' = \psi z'$. Cela poſé, puiſque le rayon du cercle eſt $= a$, on aura

$$(A)\quad (z - z')^2 + (y - \varphi z')^2 + (x - \psi z')^2 = a^2,$$

équation dans laquelle z' doit être déterminé par la conſidération que le plan du cercle eſt normal à la courbe parcourue par le centre. Or cette conſidération comporte que la diſtance du point de la ſurface au point de la courbe, ne varie pas lorſque z' varie; il faut donc que la différentielle de la valeur de a, priſe en ne faiſant varier que z', ſoit nulle; donc on aura pour déterminer z',

$$(B)\quad z - z' + (y - \varphi z')\varphi' z' + (x - \psi z')\psi' z' = 0.$$

Les deux équations *(A)* & *(B)* comprennent la ſolution de la queſtion, en ſorte que ſi la courbe parcourue par le centre, étoit donnée, c'eſt-à-dire, que l'on connût les formes des fonctions φ & ψ, en éliminant z' de ces deux équations, on auroit en x, y, z, celle de la ſurface demandée. Mais ſi l'on veut avoir l'équation de la ſurface, indépendamment de la courbe parcourue par le centre du cercle générateur, il faut regarder les fonctions φ & ψ comme arbitraires, & les faire diſparoître par la différenciation.

Dans le cas préſent, cette opération eſt très-facile, car en vertu de l'équation *(B)*, la différentielle de la première,

prise en ne faisant varier que z', étant nulle, il faut différencier l'équation *(A)* par rapport à x, puis par rapport à y, & regarder z' comme constant dans les deux cas; donc si l'on fait, pour abréger, $dz = p\,dx + q\,dy$, $ddz = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2$, & $1 + p^2 + q^2 = k^2$, les deux différentielles de l'équation *(A)*, seront

$$(C) \quad (z - z')p + x - \psi z' = 0,$$
$$(D) \quad (z - z')q + y - \varphi z' = 0,$$

qui donnent immédiatement

$$(E) \quad (z - z')p + x = \pi\{(z - z')q + y\},$$

π étant une nouvelle fonction arbitraire. Si l'on substitue dans *(A)* les valeurs de $x - \psi z'$ & de $y - \varphi z'$ que donnent les équations *(C)* & *(D)*, on aura

$$z - z' = \frac{a}{k},$$

& l'équation *E* devient

$$(F) \quad \frac{ap}{k} + x = \pi\left\{\frac{aq}{k} + y\right\},$$

qui est délivrée de l'indéterminée z', & qui ne contient plus qu'une fonction arbitraire.

Si l'on fait évanouir cette fonction à la manière ordinaire, c'est-à-dire, en différenciant par rapport à x, puis par rapport à y, on trouve pour équation aux différences partielles secondes,

$$(G) \quad a^2(rt - s^2) + ak[(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t] + k^4 = 0.$$

C'est cette équation qui exprime qu'une surface est engendrée par la circonférence d'un cercle constant de rayon, & dont le plan est toujours normal à la courbe parcourue par le centre, sans statuer rien de particulier sur la nature de cette courbe.

Digitized by Google

II.

On pourroit arriver directement à l'équation *(E)* par les conſidérations géométriques; en effet, la ſurface dont il s'agit, jouit de cette propriété, que pour tous les points placés ſur la circonférence d'un même cercle générateur, les normales paſſent par un même point qui eſt le centre de ce cercle, ce qui n'a pas lieu pour des points placés ſur des circonférences différentes; donc la ſurface eſt telle, que ſi ſur la normale on prend un point diſtant de la ſurface d'une quantité égale au rayon, ce point ſera conſtant ou variable: conſtant ſi le point de la ſurface par lequel on mène la normale, ſe meut ſur la circonférence d'un même cercle: & variable ſi le point de la ſurface paſſe d'un cercle à un autre; donc les coordonnées du point de la normale, varient enſemble & ſont conſtantes enſemble; donc elles ſont fonctions l'une de l'autre: il ne s'agit donc plus que de trouver les expreſſions de ces coordonnées.

Or, les coordonnées rectangulaires d'une ſurface courbe, étant x, y, z; & celles de la normale, rapportées aux mêmes plans, étant x', y', z', les équations des projections de la normale ſur les trois plans rectangulaires, ſont

$$(z - z')p + x - x' = 0,$$
$$(z - z')q + y - y' = 0,$$
$$(y - y')p - (x - x')q = 0;$$

donc ſi lon prend ſur cette normale une quantité $= a$, l'amplitude de cette quantité ſera

dans le ſens des x $\quad \frac{ap}{k}$,

dans le ſens des y $\quad \frac{aq}{k}$,

dans le ſens des z $\quad -\frac{a}{k}$;

& parce que les coordonnées du centre ſont égales à celles du point de la ſurface, augmentées reſpectivement des

amplitudes que l'on vient de trouver, il s'enſuit que les coordonnées ſeront

dans le ſens des x $\quad x + \frac{ap}{k}$,

dans le ſens des y $\quad y + \frac{aq}{k}$,

dans le ſens des z $\quad z - \frac{a}{k}$;

poſant donc que deux de ces coordonnées ſont fonctions l'une de l'autre, on aura trois équations, dont l'une ſera l'équation *(F)*, & qui ſeront chacune indifféremment l'intégrale complète de l'équation *(G)*, qu'elles produiront également par la différenciation.

III.

Enfin on pourroit encore obtenir immédiatement l'équation *(G)*; car pour peu que l'on ſoit accoutumé aux conſidérations géométriques, on voit évidemment que dans la ſurface dont il s'agit, le rayon du cercle générateur eſt un des deux rayons de courbure de la ſurface, & que ce rayon eſt conſtant. Or, l'expreſſion des rayons de courbures d'une ſurface courbe donnée par M. Euler *(Mémoires de Berlin, 1760)*, eſt, en nommant R le rayon,

$$R^2(rt - s^2) + Rk[(1 + q^2)r - 2pqs + (1 - p^2)t] + k^4 = 0;$$

donc pour énoncer la propriété de la ſurface, il faut faire dans cette équation, $R = a$, ce qui donne l'équation *(G)*.

IV.

La manière ordinaire de faire évanouir une fonction arbitraire, eſt, comme nous venons de le pratiquer, de différencier ſucceſſivement l'équation, en regardant x, puis y, comme ſeule variable, ce qui donne deux nouvelles équations, dans leſquelles entrent la fonction arbitraire, & ſa différentielle qui eſt une autre fonction ſur laquelle on ne doit

Digitized by Google

pareillement rien ſtatuer ; d'éliminer ces deux fonctions des deux équations différentielles & de la propoſée, & le réſultat eſt l'équation aux différences partielles qui énonce la même choſe que l'équation intégrale : cette méthode a l'inconvénient d'introduire, par la différenciation, une fonction de plus à éliminer, ce qui augmente le nombre des équations & le travail de l'élimination. Si au lieu de différencier l'équation, & par rapport à x, & par rapport à y, on la différencie une ſeule fois, en regardant comme conſtante la quantité qui eſt ſous la fonction, 1.° la différenciation devient plus facile, parce que la fonction devient elle-même une conſtante arbitraire ; 2.° l'on n'a qu'une ſeule fonction à éliminer de la propoſée, par le moyen de la différentielle ; mais lorſqu'on regarde comme conſtante la quantité qui eſt ſous la fonction, c'eſt-à-dire, lorſqu'on regarde ſa différentielle comme nulle, les quantités dx & dy ceſſent d'être arbitraires, & l'on établit entr'elles un rapport qu'il faut introduire dans le calcul, & ſubſtituer par-tout dans la différentielle à la place de $\frac{dx}{dy}$.

Par exemple, ſi l'on a une équation en x, y, z, & $\varphi\omega$, ω étant donnée en x, y, z, & qu'on différencie cette équation, en regardant ω comme conſtante, ſa différentielle ſera

$$Mdx + Ndy + Pdz = 0,$$

ou à cauſe de

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

$$Mdx + Ndy + P(p\,dx + q\,dy) = 0;$$

mais regarder ω comme conſtante, c'eſt ſuppoſer

$$\left(\frac{d\omega}{dx}\right)dx + \left(\frac{d\omega}{dy}\right)dy = 0,$$

ou

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{d\omega}{dy} : \frac{d\omega}{dx};$$

Digitized by Google

donc il faut ſubſtituer cette valeur de $\frac{dz}{dy}$, ce qui donne

$$(M + Pp)\frac{d\omega}{dy} - (N + Pq)\frac{d\omega}{dx} = 0,$$

que l'on trouve également par l'autre méthode, & de laquelle on éliminera la fonction $\phi\omega$, par le moyen de la propoſée.

On voit donc que ſi l'on repréſente par m la valeur de $\frac{dx}{dy}$, qu'on obtient en égalant à zéro la différentielle de la quantité qui eſt ſous la fonction, la différenciation dont il s'agit s'exécute préciſément comme une différenciation ordinaire, avec cela ſeulement de particulier, que par-tout, à la place d'une différentielle ſimple dV, il faut mettre $m\frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dy}$; ainſi, la différentielle de x ſera m, celle de y ſera 1, celle de z ſera $mp + q$; enfin, celle de V^a ſera $aV^{a-1}(m\frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dy})$, & ainſi des autres.

Il ſuit de-là, que pour faire évanouir une fonction arbitraire d'une équation, il faut 1.° différencier cette équation, en regardant comme conſtante la quantité qui eſt ſous la fonction, & effectuer cette différenciation comme pour les différences ordinaires, avec cette condition, que par-tout, à la place d'une différentielle ſimple quelconque dV, il faut mettre $m\frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dy}$; 2.° éliminer la fonction de la propoſée, par le moyen de la différentielle.

V.

Si, comme dans les recherches de la nature de celles dont il s'agit dans ce Mémoire, la quantité qui eſt ſous la fonction n'eſt pas connue immédiatement, & qu'elle ſoit donnée par une ſeconde équation, dans laquelle elle

Digitized by Google

ſoit encore ſous des fonctions arbitraires ; la quantité m ſera regardée comme une autre indéterminée, dont on aura la valeur, en différenciant la ſeconde équation, d'une manière analogue, ce qui produira l'équation néceſſaire pour l'éliminer.

Si les équations propoſées contiennent pluſieurs fonctions arbitraires de la même quantité, il faudra différencier chaque équation autant de fois qu'il y a de fonctions, en repréſentant par m' la différentielle de m, par m'' celle de m',...& ainſi de ſuite, & éliminer les fonctions, ainſi que les indéterminées m, m', m'',....&c.

Enfin, ſi les équations, outre les fonctions arbitraires φ, ψ... contiennent encore leurs différentielles φ', ψ'..., on opérera, comme l'on vient de dire, & on éliminera autant de fonctions arbitraires & d'indéterminées que le comportera le nombre des équations qu'on aura obtenues ; puis on différenciera l'équation réſultante, en regardant comme ſeule variable chacune des indéterminées qui reſteront, ce qui produira des équations nouvelles, en nombre ſuffiſant pour les éliminer.

Avant que de faire uſage de ce procédé, je vais l'éclaircir par des applications à quelques cas connus.

V I.

Soit propoſé de faire évanouir les trois fonctions arbitraires, & l'indéterminée z' des deux équations

$$z = x\varphi z' + z',$$
$$y = x\psi z' + \pi z',$$

qui expriment une ſurface engendrée d'une manière quelconque, par le mouvement d'une droite.

La première, différenciée trois fois de ſuite, donne immédiatement

$$(1) \qquad mp + q = m\varphi z' ;$$

Digitized by Google

$$(2)\quad m'p + m's + 2ms + t = m'\varphi\zeta';$$

$$(3)\quad m''p + 3m'(mr + s) + m^3\frac{d^3\zeta}{dx^3} + 3m^2\frac{d\zeta^3}{dx^2dy} + 3m\frac{d^3\zeta}{dxdy^2} + \frac{d^3\zeta}{dy^3} = m''\varphi\zeta';$$

mais la seconde, par de semblables différenciations, donne aussi directement

$$(4)\quad 1 = m\downarrow\zeta';$$

$$(5)\quad 0 = m'\downarrow\zeta';$$

$$(6)\quad 0 = m''\downarrow\zeta';$$

introduisant les valeurs $m' = 0$, $m'' = 0$, que donnent les équations (5) & (6) dans les équations (3) & (4), on a

$$m^2r + 2ms + t = 0,$$

$$m^3\frac{d^3\zeta}{dx^3} + 3m^2\frac{d^3\zeta}{dx^2dy} + 3m\frac{d^3\zeta}{dxdy^2} + \frac{d^3\zeta}{dy^3} = 0,$$

qui, par l'élimination de m, produisent l'équation aux différences partielles des surfaces généralement engendrées par le mouvement d'une ligne droite, & dont l'intégrale finie & complète est représentée par les deux proposées.

VII.

Soit proposé de faire évanouir les deux fonctions arbitraires & la quantité V des deux équations

$$\zeta - \downarrow V = (x - V)\downarrow' V,$$

$$y - \varphi V = (x - V)\varphi' V,$$

qui expriment qu'une surface est développable, d'après la considération qu'elle est engendrée par le mouvement d'une droite qui est toujours tangente à une même courbe à double courbure.

La

La première, différenciée deux fois de suite, donne

$$(1) \qquad mp + q = m\psi' V;$$

$$(2) \qquad m'p + m^2 r + 2ms + t = m'\psi' V.$$

Mais la seconde, différenciée de la même manière, donne

$$(3) \qquad 1 = m\varphi' V;$$

$$(4) \qquad 0 = m'\varphi' V.$$

Substituant dans la seconde, la valeur $m' = 0$, que donne la quatrième, on a

$$m^2 r + 2ms + t = 0;$$

équation délivrée des quantités V, φV, $\varphi' V$, ψV, $\psi' V$ & m', & de laquelle il est impossible d'éliminer un plus grand nombre d'indéterminées, par le moyen des six équations qu'on a employées. Actuellement pour en éliminer m, je le différencie en regardant m comme seule variable, ce qui donne la nouvelle équation

$$mr + s = 0,$$

& par conséquent $ms + t = 0$,

d'où l'on conclut, en chassant m,

$$rt = s^2,$$

équation des surfaces développables, que j'ai déjà donnée.

Ces deux équations suffisent pour faire entendre la méthode que j'emploirai dans les recherches suivantes; & il est facile d'apercevoir qu'en la retournant, on peut l'appliquer utilement à l'intégration des équations aux différences partielles: nous aurons occasion d'en donner quelques exemples.

VII.

Exprimer qu'une surface courbe est engendrée par le mouvement de la circonférence d'un cercle dont le rayon

Digitized by Google

eſt variable d'une manière quelconque, & dont le plan eſt toujours normal à la courbe parcourue par ſon centre.

Cette queſtion ne diffère de celle de l'*article I*, que parce que le rayon du cercle générateur, au lieu d'être conſtant, eſt une certaine fonction de l'ordonnée du centre; ſi donc on repréſente cette fonction par π, & que l'on mette $\pi z'$, au lieu de a, dans les équations *(A)* & *(B)* de l'*article I*, les équations

$$(A)\quad (z - z')^2 + (y - \varphi z')^2 + (x - \psi z')^2 = (\pi z')^2,$$

$$(B)\quad z - z' + (y - \varphi z')\varphi' z' + (x - \psi z')\psi' z' = 0,$$

qu'on obtiendra, contiendront l'expreſſion demandée; en ſorte que ſi l'on connoiſſoit la courbe parcourue par le centre, & la grandeur du rayon d'après la poſition du centre, ce qui déterminerait les formes des fonctions φ, ψ & π, on éliminerait z' de ces deux équations, & on auroit en x, y & z, celle de la ſurface engendrée. Mais ſi l'on veut ſimplement exprimer la génération, indépendamment de la courbe parcourue par le centre, & de la loi du rayon du cercle générateur, il faut regarder ces trois fonctions comme arbitraires, & les éliminer par la différenciation.

Pour cela, je différencie la première, en regardant z' comme conſtant, ce qui donne

$$(1)\quad (z - z')(mp + q) + (y - \varphi z') + m(x - \psi z') = 0,$$

dans laquelle la fonction π eſt évanouie. Je la différencie une ſeconde fois, & faiſant, pour abreger,

$$m^2 r + 2ms + t = M, \text{ \& } 1 + m^2 + (mp + q)^2 = V,$$

j'obtiens

$$(2)\quad m'\{(z - z')p + x - \psi z'\} + (z - z')M + V = 0,$$

dans laquelle la fonction φ eſt évanouie. Enfin je la diffé-

Digitized by Google

rencie une troiſième fois, & faiſant, pour abréger,

$$m^3 \frac{d^3\zeta}{dx^3} + 3m^2 \frac{d^3\zeta}{dx^2 dy} + 3m \frac{d^3\zeta}{dx dy^2} + \frac{d^3\zeta}{dy^3} = N,$$

je trouve

$$m''\{(\zeta - \zeta')p + x - \psi\zeta'\} + 3m'\{(mp + q)p + m + (\zeta - \zeta')(mr + s)\} + 3(mp + q)M + (\zeta - \zeta')N = 0;$$

de laquelle éliminant $x - \psi\zeta'$, par le moyen de la précédente, je tire

$$(3)\ (\zeta - \zeta')\{-m''M + 3m'^2(mr + s) + m'N\} \left.\begin{array}{l} \\ -m''V + 3m'^2\{(mp + q)p + m\} + 3m'(mp + q)M \end{array}\right\} = 0,$$

& parce que chaque différenciation a fait diſparoître une arbitraire, cette équation comporte l'équation *(A)*, ainſi que ſes différentielles.

Je paſſe actuellement à l'équation *(B)* qui donne par la première différenciation

$$(4)\quad mp + q + \varphi'\zeta' + m\psi'\zeta' = 0;$$

par la ſeconde,

$$(5)\quad m'(p + \psi'\zeta') + M = 0;$$

& par la troiſième,

$$m''(p + \psi'\zeta') + 3m'(mr + s) + N = 0,$$

de laquelle & de la précédente, éliminant $p + \psi'\zeta'$, on obtient

$$(6)\quad m''M + 3m'^2(mr + s) - m'N = 0;$$

ces trois différenciations n'ont fait diſparoître que deux nouvelles arbitraires, c'eſt-à-dire, $\varphi'\zeta'$ & $\psi'\zeta'$; mais l'équation (6) faiſant évanouir ζ' dans l'équation (3) qui devient alors

$$(7)\ -m''V + 3m'^2[(mp + q)p + m] \left.\begin{array}{l} \\ + 3m'(mp + q)M \end{array}\right\} = 0;$$

il s'enſuit que toute la ſolution de la queſtion eſt contenue dans les équations (6) & (7), deſquelles, éliminant m'', on tire

$$\left.\begin{matrix} 3m'\{M[(mp+q)p+m]-V(mr+s)\}\\ +3M^2(mp+q)\end{matrix}\right\} = NV,$$

équation dans laquelle la quantité m' eſt abſolument arbitraire, & ne peut être déterminée par rien. Pour la faire évanouir, je différencie l'équation, en regardant m' comme ſeule variable, ce qui donne

$$M[(mp+q)p+m]-V(mr+s)=0,$$

& par conſéquent

$$3M^2(mp+q)=NV,$$

& en éliminant m de ces deux équations, on aura l'équation aux troiſièmes différences partielles, demandée.

Donc, en ſubſtituant pour M, N & V, les quantités qu'elles repréſentent, l'équation demandée eſt le réſultat de l'élimination de m des deux équations ſuivantes:

$$k^2\left\{m^3\frac{d^3\zeta}{dx^3}+3m^2\frac{d^3\zeta}{dx^2dy}+3m\frac{d^3\zeta}{dxdy^2}+\frac{d^3\zeta}{dy^3}\right\}=$$
$$3(m^2r+2ms+t)\{p(mr+s)+q(ms+t)\}.$$

$$\left.\begin{matrix} m^2\{s(1+p^2)-pqr\}+m[t(1+p^2)\\ -r(1+q^2)]-s(1+q^2)+pqt\end{matrix}\right\}=0.$$

VIII.

On peut encore réſoudre la même queſtion par une autre conſidération: il eſt en effet évident que ſur la ſurface dont il s'agit, la courbe génératrice eſt une ligne de moindre ou plus grande courbure; cette ſurface eſt donc telle que pour une même ligne de plus grande ou de moindre courbure, le rayon de cette courbure eſt conſtant, & qu'il eſt variable quand on paſſe d'une de ces lignes à une autre. Il faut donc exprimer que le rayon de courbure eſt fonction du paramètre par lequel les lignes de cette

Digitized by Google

courbure diffèrent les unes des autres; ainſi en repréſentant ce paramètre par a, & le rayon de courbure par R, le caractère de la ſurface demandée, eſt exprimé par l'équation $R = Fa$, F étant une fonction arbitraire.

Or j'ai fait voir dans le Mémoire ſur les Déblais & les Remblais, en 1781, que les équations des deux lignes de moindre ou de plus grande courbure d'une ſurface courbe, ſont les racines de l'équation

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx^2}{dy^2}\{s(1+p^2)-pqr\}+\frac{dx}{dy}\{t(1+p^2) \\ -r(1+q^2)\}-\{s(1+q^2)-pqt\} \end{array}\right\} = 0,$$

& que les valeurs des deux rayons de courbure, ſont celles de la ſuivante,

$$\left.\begin{array}{l} R^2\{rt-s^2\}+Rk\{r(1+q^2)-2pqs \\ +t(1+p^2)\}+k^4 \end{array}\right\} = 0.$$

Soit fait, pour abréger,

$$\begin{aligned} r(1+q^2)-pqs &= \alpha, \\ t(1+p^2)-pqs &= \beta, \\ s(1+p^2)-pqr &= \gamma, \\ s(1+q^2)-pqt &= \delta, \end{aligned}$$

ces deux équations deviennent

$$(A)\quad \gamma\frac{dx^2}{dy^2}-(\alpha-\beta)\frac{dx}{dy}-\delta = 0;$$

$$(B)\quad R^2(\alpha\beta-\gamma\delta)+Rk^3(\alpha+\beta)+k^6 = 0;$$

dont les racines ſont

$$(C)\quad \frac{dx}{dy} = \frac{\alpha-\beta+\sqrt{[(\alpha-\beta)^2+4\gamma\delta]}}{2\gamma};$$

$$(D)\quad R = k^3\left\{\frac{-\alpha-\beta+\sqrt{[(\alpha-\beta)^2+4\gamma\delta]}}{2(\alpha\beta-\gamma\delta)}\right\};$$

Digitized by Google

ſur quoi il faut remarquer que pour une certaine ligne de moindre ou de plus grande courbure, & pour le rayon de cette courbure, les ſignes ſont les mêmes, tandis que ces ſignes ſeroient différens, ſi pour la ligne d'une de ces courbures, on conſidéroit le rayon de l'autre.

Cela poſé, ſi l'on intégroit l'équation *(C)*, la conſtante arbitraire que l'on introduiroit pour compléter cette intégrale, ſeroit conſtante pour toute l'étendue d'une même ligne de courbure, & elle changeroit de valeur en paſſant d'une de ces lignes à une autre: cette conſtante arbitraire eſt donc le paramètre a, par lequel diffèrent les lignes conſécutives de moindre ou de plus grande courbure, & dont le rayon de courbure doit être fonction arbitraire. On doit donc avoir $R = Fa$, ou

$$\frac{da}{dx}\,\frac{dR}{dy} = \frac{da}{dy}\,\frac{dR}{dx},$$

& parce que l'équation *(C)* donne

$$\frac{da}{dx} = 2\gamma,$$

&

$$\frac{da}{dy} = -\alpha + \beta - \sqrt{[(\alpha-\beta)^2 + 4\gamma\delta]},$$

l'équation de la ſurface demandée ſera

$$(E)\quad 2\gamma\frac{dR}{dy} = \{-\alpha+\beta-\sqrt{[(\alpha-\beta)^2+4\gamma\delta]}\}\frac{dR}{dx},$$

qui, ſi l'on ſubſtitue pour R ſa valeur, priſe dans l'équation *(D)*, & ſi l'on exécute les différenciations indiquées, donnera le même réſultat que les équations de l'*article précédent.*

I X.

Si l'on conſidère que la quantité $\frac{dx}{dy}$, qui eſt dans l'équation *(A)*, eſt ce que nous avons repréſenté par m,

Digitized by Google

dans la manière de différencier de l'*article IV*, c'eſt-à-dire, en regardant a comme conſtante, & que le rayon de courbure R, qui entre dans *(B)*, eſt une fonction de cette même quantité a, ces deux équations pourront être miſes ſous la forme

$$m^2\gamma - (\alpha - \beta)m - \delta = 0,$$

$$(Fa)^2(\alpha\beta - \gamma\delta) + k^3 Fa(\alpha + \beta) + k^6 = 0,$$

& comprendront l'intégrale première de l'équation aux différences partielles du troiſième ordre, que nous venons de trouver, puiſqu'elles ne ſont que du ſecond ordre, & qu'elles contiennent une fonction arbitraire ; mais parce que ces équations ne renferment plus le radical, elles ſont plus générales que l'équation aux différences troiſièmes ; elles expriment en effet, que pour une même ligne de moindre ou de plus grande courbure, l'une ou l'autre des deux rayons de courbure, indiſtinctement eſt conſtant, tandis que dans la ſurface dont il s'agit, pour une même ligne de moindre ou de plus grande courbure, c'eſt le rayon de cette même courbure qui ne varie pas, & non celui de l'autre.

Pour ſauver l'ambiguité, c'eſt dans les équations *(C)* & *(D)* qu'il faut mettre m à la place de $\frac{dx}{dy}$, & Fa pour R, ce qui donne

$$2\gamma m = \alpha - \beta + \sqrt{[(\alpha - \beta)^2 + 4\gamma\delta]},$$

$$2(\alpha\beta - \gamma\delta)Fa = k^3\{-\alpha - \beta + \sqrt{[(\alpha - \beta)^2 + 4\gamma\delta]}\},$$

pour intégrale première & complète de l'équation de la ſurface.

Si l'on donnoit au radical des ſignes différens dans les deux équations, elles exprimeroient une autre génération de ſurface, que nous aurons occaſion de traiter.

Digitized by Google

X.

Actuellement, pour intégrer ces équations, j'élimine le radical, ce qui ne rétablit pas l'ambiguité, & donne

$$(\alpha\beta - \gamma\delta) Fa = (\gamma m - \alpha) k^3,$$

& combinant cette équation avec les deux premières de l'*article précédent*, j'obtiens les deux équations

$$Fa(m\gamma + \beta) = -k^3,$$

$$\& \qquad Fa(m\alpha + \delta) = -mk^3,$$

qui expriment la même chose que les proposées, & qu'il s'agit d'intégrer: pour cela, je remarque que les quantités α, β, γ, δ, sont des différentielles partielles, & que l'on a

$$\alpha = k^3 \frac{d.\frac{p}{k}}{dx};$$

$$\beta = k^3 \frac{d.\frac{q}{k}}{dy};$$

$$\gamma = k^3 \frac{d.\frac{q}{k}}{dx};$$

$$\delta = k^3 \frac{d.\frac{p}{k}}{dy}.$$

Substituant ces valeurs dans les deux précédentes, elles deviennent

$$Fa\left(m \frac{d.\frac{q}{k}}{dx} + \frac{d.\frac{q}{k}}{dy}\right) = -1,$$

$$Fa\left(m \frac{d.\frac{p}{k}}{dx} + \frac{d.\frac{p}{k}}{dz}\right) = -m,$$

qui

qui ſont des différentielles exactes, priſes en regardant a comme conſtante; on aura donc en intégrant

$$Fa\frac{q}{k} = -y + \mathrm{f}\,a,$$

$$Fa\frac{p}{k} = -x + fa,$$

dans leſquelles f & f ſont des fonctions arbitraires, introduites pour compléter les intégrales, & ces deux équations ſont l'intégrale ſeconde & complète de l'équation aux troiſièmes différences. Enfin, ſubſtituant pour k ſa valeur $\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}$, ces deux équations donnent pour p & q les valeurs ſuivantes,

$$p = \frac{z - fa}{\sqrt{[(Fa)^2 - (x - fa)^2 - (y - \mathrm{f}\,a)^2]}},$$

$$q = \frac{y - \mathrm{f}\,a}{\sqrt{[(Fa)^2 - (x - fa)^2 - (y - \mathrm{f}\,a)^2]}},$$

& par conſéquent

$$dz = \frac{(x - fa)\,dx + (y - \mathrm{f}\,a)\,dy}{\sqrt{[(Fa)^2 - (x - fa)^2 - (y - \mathrm{f}\,a)^2]}},$$

qui eſt une différentielle exacte, priſe en regardant a comme conſtante, & dont l'intégrale eſt

$$(z - a)^2 + (y - \mathrm{f}\,a)^2 + (x - fa)^2 = (Fa)^2,$$

a devant être éliminé par l'équation ſuivante,

$$z - a + (y - \mathrm{f}\,a)\,\mathrm{f}'\,a + (x - fa)f'a = Fa\,F'a,$$

qui exprime que la différentielle de la première, priſe en ne faiſant varier que a, doit être nulle. Ainſi, ces deux équations ſont l'intégrale finie & complète de l'équation aux différences partielles, qui énonce qu'une ſurface eſt engendrée par la circonférence d'un cercle variable de rayon, & dont le plan eſt toujours normal à la courbe, parcourue par ſon centre.

XI.

Des deux équations intégrales que nous venons de trouver, la première eſt celle d'une ſphère, dont les coordonnées du centre a, fa, fa, & le rayon Fa, ſont fonctions d'un même paramètre; la ſeconde dit que la différentielle de la première, priſe en ne faiſant varier que ce paramètre, doit être nulle; leur ſyſtème appartient donc à la ſurface qui enveloppe une ſuite de ſphères variables de rayon & de poſition dans l'eſpace, c'eſt-à-dire, que la ſurface dont il s'agit peut auſſi être regardée comme formée par les interſections ſucceſſives de la ſurface d'une ſphère mobile & variable de rayon, réſultat qu'il étoit facile d'obſerver *a priori*.

Si ces deux équations intégrales ne coïncident pas avec les équations *(A)* & *(B)* de l'*article VII*, quoiqu'elles expriment la même choſe, c'eſt que dans celles-ci l'indéterminée z' eſt l'ordonnée du centre du cercle générateur, tandis que dans les autres l'indéterminée a eſt l'ordonnée du centre de la ſphère mobile & perpétuellement touchée, ce qui eſt différent; mais elles rentrent les unes dans les autres par une ſimple transformation, & elles donnent le même réſultat par la différenciation.

Nous ſommes entrés dans un grand détail ſur cette ſurface, 1.° pour faire une application de la méthode de différencier & d'intégrer, que nous avons donnée; 2.° parce que cette ſurface eſt celle qui, quoique flexible, doit garder ſa forme, ſi on la ſuppoſe remplie par un fluide élaſtique comprimé, comme l'a démontré M. Meuſnier.

XII.

Exprimer qu'une ſurface eſt engendrée par la circonférence d'un cercle variable de rayon, & qui ſe meut d'une manière quelconque dans l'eſpace.

Soient, comme précédemment, x, y, z, les coordonnées rectangulaires de la ſurface courbe, & x', y', z', celles

Digitized by Google

du centre du cercle générateur; ſi les équations de la courbe parcourue par le centre, ſont $y = \varphi z$ & $x = \psi z$, on aura $y' = \varphi z'$ & $x' = \psi z'$, en ſorte que ſi l'on repréſente par $\pi z'$ le rayon variable du cercle, on aura pour première équation

$$(A)\quad (z - z')^2 + (y - \varphi z')^2 + (x - \psi z')^2 = (\pi z')^2,$$

dans laquelle z' doit être déterminé par la loi du mouvement du plan.

Soient de plus $y = fz$ & $x = fz$, les équations de la courbe à laquelle le plan du cercle générateur eſt toujours normal; & x'', y'', z'', les coordonnées du point où cette courbe eſt coupée par le plan, on aura $y'' = fz''$, $x'' = fz''$; & l'équation qui exprime que le plan eſt normal à cette courbe, ſera, comme dans l'*article I*,

$$z - z'' + (y - fz'')\, f'z'' + (x - fz'')\, f'z'' = 0;$$

& parce que la quantité z'' eſt fonction de z', cette équation peut ſe mettre ſous la forme

$$(B)\quad z - z' + (y - \varphi z')\pi z' + (x - \psi z')\varpi z' = 0.$$

Les deux équations *(A)* & *(B)* comprennent l'expreſſion demandée, en ſorte que ſi l'on connoiſſoit la loi du mouvement du centre, & le rayon du cercle générateur, ce qui détermineroit les formes des cinq fonctions, on éliminеroit z' de ces deux équations, & l'on auroit en x, y, z, l'équation de la ſurface demandée; mais ſi l'on veut ſimplement exprimer le caractère de cette eſpèce de génération, il faut regarder ces cinq fonctions comme arbitraires, & les faire diſparoître par des différenciations pouſſées aux cinquièmes différences, ce qui n'a d'autre difficulté que la longueur du calcul.

XIII.

Exprimer qu'une ſurface courbe eſt engendrée par une courbe plane quelconque, qui ſe meut de manière que

ſon plan ſoit normal aux courbes parcourues par tous ſes points.

On peut encore définir autrement cette ſurface. Concevons qu'un plan ſe meuve comme s'il ſe développoit de deſſus une ſurface développable, & que ſur ce plan ſoit tracée une courbe quelconque fixe dans le plan, elle engendrera, par ſon mouvement, une ſurface de la nature de celles dont il s'agit ici.

Soient x, y, z, les coordonnées rectangulaires de la ſurface, $y = \varphi z$, $x = \psi z$, les équations d'une des courbes auxquelles le plan eſt toujours normal; ſi x', y', z', ſont les coordonnées du point où cette courbe eſt coupée par le plan, on aura $y' = \varphi z'$ & $x' = \psi z'$, & l'équation qui exprimera que le plan eſt normal à la courbe, ſera, comme dans l'*article I*,

$$(A)\quad z - z' + (y - \varphi z')\varphi' z' + (x - \psi z')\psi' z' = 0,$$

ce qui détermine la valeur de z' en x, y & z.

Actuellement, le caractère de la ſurface eſt que ſi le point que l'on conſidère ſur cette ſurface ſe meut parallèlement à l'élément correſpondant de la courbe normale, c'eſt-à-dire, perpendiculairement au plan, ſa diſtance à la courbe normale

$$\sqrt{[(z - z')^2 + (y - \varphi z')^2 + (x - \psi z')^2]},$$

eſt invariable: or, ce point ſe meut ſuivant cette condition, ſi l'on a $\frac{dx}{dy} = \frac{\psi' z'}{\varphi' z'}$; il faut donc qu'en donnant à $\frac{dx}{dy}$ la valeur $\frac{\psi' z'}{\varphi' z'}$, la différentielle du radical ſoit nulle, ce, qui exécuté à la manière de l'*article IV*, & en vertu de l'équation *(A)*, donne

$$(B)\qquad p\psi' z' + q\varphi' z' = 1.$$

Les deux équations *(A)* & *(B)* renferment la ſolution de la queſtion.

Digitized by Google

La première, différenciée deux fois de suite, en regardant ζ' comme constante, donne

$$mp + q + \varphi'\zeta' + m\psi'\zeta' = 0,$$
$$m'(p + \psi'\zeta') + m^2 r + 2ms + t = 0;$$

la seconde, différenciée deux fois de la même manière, donne

$$\left.\begin{aligned}(mr + s)\psi'\zeta' + (ms + t)\varphi'\zeta' = 0,\\ m'(r\psi'\zeta' + s\varphi'\zeta')\\ + \psi'\zeta'\left(m^2\frac{d^3\zeta}{dx^3} + 2m\frac{d^3\zeta}{dx^2dy} + \frac{d^3\zeta}{dxdy^2}\right)\\ + \varphi'\zeta'\left(m^2\frac{d^3\zeta}{dx^2dy} + 2m\frac{d^3\zeta}{dxdy^2} + \frac{d^3\zeta}{dy^3}\right)\end{aligned}\right\} = 0.$$

Si de l'équation *(B)* & des quatre différentielles, on élimine les trois indéterminées φ', ψ', m', on trouve que l'équation aux troisièmes différences partielles, qui exprime la propriété de la surface, est le résultat de l'élimination de m des deux équations suivantes,

$$\left.\begin{aligned}(ms + t)\left[m^2\frac{d^3\zeta}{dx^3} + 2m\frac{d^3\zeta}{dx^2dy} + \frac{d^3\zeta}{dxdy^2} + \frac{(rt - s^2)(mq - p)}{k^2}\right]\\ - (mr + s)\left[m^2\frac{d^3\zeta}{dx^2dy} + 2m\frac{d^3\zeta}{dxdy^2} + \frac{d^3\zeta}{dy^3} - \frac{(rt - s^2)(mq - p)m}{k^2}\right]\end{aligned}\right\} = 0,$$
$$m^2[s(1 + p^2) - pqr] + m[t(1 + p^2) - r(1 + q^2)]$$
$$- [s(1 + q^2) - pqt] = 0.$$

XIV.

La considération que nous avons employée pour résoudre la question, nous a conduit directement aux différences premières. Pour avoir la même expression en quantités finies, des deux équations aux différences premières,

$$p\psi'\zeta' + q\varphi'\zeta' = 1,$$
$$mp + q + \varphi'\zeta' + m\psi'\zeta' = 0;$$

Digitized by Google

je tire les valeurs ſuivantes de p & de q,

$$p = \frac{1 + (\varphi' z')^2 + m\varphi' z \psi' z}{\psi' z - m\varphi' z},$$

$$q = \frac{-m[1 + (\psi' z')^2] - \varphi' z \psi' z}{\psi' z - m\varphi' z};$$

qui, ſubſtituées dans $dz = p\,dx + q\,dy$, donnent

$$\frac{m\varphi' z}{\psi' z}\left[dz + \varphi' z' dy + \psi' z' dx - dy\,\frac{1 + (\varphi' z')^2 + (\psi' z')^2}{\varphi' z}\right]$$
$$= dz + \varphi' z' dy + \psi' z' dx - dx\,\frac{1 + (\varphi' z')^2 + (\psi' z')^2}{\psi' z},$$

dont l'intégrale, priſe en regardant z' comme conſtante, eſt

$$z + y\varphi' z' + x\psi' z' - y\,\frac{1 + (\varphi' z')^2 + (\psi' z')^2}{\varphi' z}$$
$$= \pi\left[z + y\varphi' z' + x\psi' z' - x\,\frac{1 + (\varphi' z')^2 + (\psi' z')^2}{\psi' z}\right],$$

dans laquelle π eſt une fonction arbitraire, & z' doit être telle, que la différentielle de cette équation, priſe en regardant z' comme ſeule variable, ſoit nulle; ce qui ſignifie que la ſurface que l'on conſidère eſt perpétuellement enveloppée par une ſurface cylindrique à baſe quelconque, mais conſtante, & qui ſe meut de manière que ſa baſe ſoit toujours normale aux courbes que parcourent tous ſes points; réſultat qu'on pouvoit obſerver *a priori*, & qui auroit donné directement l'expreſſion en quantités finies, que nous venons de trouver.

X V.

On peut encore arriver au même réſultat par une troiſième conſidération. En effet, ſur la ſurface demandée, la courbe génératrice eſt la ligne d'une des courbures, tandis que les courbes parcourues par chacun de ſes points, ſont des lignes de l'autre courbure; or pour chacune de ces dernières lignes, le rayon de leur courbure eſt conſtant, puiſqu'il eſt toujours celui qui convient à un même point

Digitized by Google

de la génératrice, & il varie lorſque l'on paſſe d'une de ces lignes à une autre; donc la ſurface eſt telle, que pour la même ligne de courbure, le rayon de l'autre courbure eſt conſtant: donc cette ſurface eſt celle dont il étoit queſtion à la fin de l'*article IX*, & dont l'équation eſt pareillement compriſe dans celle-ci:

$$m^2\gamma - (\alpha - \beta)m - \delta = 0,$$
$$(Fa)^2(\alpha\beta - \gamma\delta) + k^3 Fa(\alpha + \beta) + k^6 = 0,$$

Si l'on veut avoir ſon équation particulière, il faut extraire les racines de ces deux équations, & donner au radical commun des ſignes différens; ce qui donne

$$2\gamma m = \alpha - \beta + \sqrt{[(\alpha - \beta)^2 + 4\gamma\delta]},$$
$$2(\alpha\beta - \gamma\delta)Fa = -k^3\{\alpha + \beta + \sqrt{[(\alpha - \beta)^2 + 4\gamma\delta]}\};$$

équations qui ne diffèrent de celles de l'*article IX*, que par les ſignes du radical qui ſont contraires; & qui par la différenciation donnent la même équation aux différences troiſièmes que nous avons trouvées, *article XIII.*

XVI.

Enfin la partie de cette ſurface compriſe entre deux poſitions conſécutives de la courbe génératrice, étant une petite portion de ſurface cylindrique coupée perpendiculairement à la direction de ſes arêtes rectilignes, il s'enſuit que cette ſurface peut être exécutée commodément en fuſeaux d'étoffe, de telle manière qu'un des fils de la chaîne de l'étoffe parcoure le fuſeau dans toute ſa longueur. Toutes les autres ſurfaces courbes peuvent être exécutées de cette manière, mais les courbes ſur leſquelles doivent être faites les coutures, ſont compliquées, & celle-ci eſt la ſeule où les courbes ſoient ſimples & directement données par la génération. Les ſurfaces développables, & celles de révolution ne jouiſſent de cette

Digitized by Google

propriété, que parce qu'elles ſont des cas particuliers de celle dont il s'agit.

Paſſons maintenant au cas général.

XVII.

Exprimer qu'une ſurface courbe eſt engendrée par le mouvement d'une courbe quelconque, plane ou à double courbure, conſtante de forme, & variable de poſition d'une manière quelconque dans l'eſpace.

Tout étant rapporté à trois plans fixes dans l'eſpace, & rectangulaires, par les coordonnées x, y, z, ſuppoſons qu'à l'origine du mouvement de la courbe génératrice, ou, ce qui revient au même, que pour un certain inſtant quelconque de ſon mouvement, la poſition de cette courbe par rapport aux trois plans ſoit connue, en ſorte qu'on ait à cette époque les équations des projections de la courbe, & qu'elles ſoient $y = \varphi z$ & $x = \psi z$. Suppoſons enſuite que trois autres plans rectangulaires, confondus dans ce moment avec les trois plans fixes, ſoient entraînés par la courbe dans ſon mouvement, de manière qu'elle ne change jamais de poſition par rapport à eux, & que dans le cours du mouvement, quelque part que l'on prenne la courbe génératrice, ſes projections ſur ces plans mobiles ſoient toujours les mêmes, & que par conſéquent les équations de ces projections en coordonnées perpendiculaires à ces plans mobiles, & rapportées à leur interſection comme origine, ſoient conſtamment les mêmes, indépendamment de la poſition de la courbe; il eſt évident que ſi l'on appelle u, v, w, les coordonnées mobiles qui, à l'origine du mouvement, étoient reſpectivement x, y z, les équations des projections de la courbe ſur ſes plans mobiles dans un inſtant quelconque, ſeront $v = \varphi w$ & $u = \psi w$; dans leſquelles les quantités u, v, w ſont des fonctions de x, y, z, & d'une indéterminée qui exprime la diſtance à l'origine du mouvement; en ſorte que ſi l'on connoiſſoit la loi du mouvement des plans mobiles, & qu'on

Digitized by Google

qu'on fût par conſéquent en état, pour un inſtant quelconque du mouvement, de trouver leurs équations rapportées aux plans fixes, on trouveroit les valeurs des quantités u, v, w, & éliminant l'indéterminée des deux dernières équations, on auroit en x, y, z, celle de la ſurface demandée.

Poſons donc que l'on connoiſſe la courbe que décrit le point d'interſection commune des trois plans mobiles, & que les projections de cette courbe ſur les trois plans fixes, aient pour équations $y = \varpi z$ & $x = \pi z$. Conſidérant enſuite la génératrice dans un inſtant quelconque de ſon mouvement, ſoit z' l'ordonnée parallèle aux z de ſon origine mobile; les autres coordonnées de cette origine ſeront

$$\pi z' \text{ dans le ſens des } x,$$

$$\& \ \varpi z' \text{ dans le ſens des } y.$$

Cela poſé, les équations des trois plans mobiles, lorſque leur interſection ſe trouve au point dont l'ordonnée eſt z', ſont de la forme

$$a\ (z - z') + b\ (y - \varpi z') + c\ (x - \pi z') = 0,$$
$$a'\ (z - z') + b'\ (y - \varpi z') + c'\ (x - \pi z') = 0,$$
$$a''\ (z - z') + b''\ (y - \varpi z') + c''\ (x - \pi z') = 0;$$

dans leſquelles les coéfficiens doivent avoir les valeurs déterminées d'après la loi du mouvement des plans. Or, de ces neuf coéfficiens, il n'y en a que ſix qui ſoient néceſſaires pour la détermination des plans; nous pouvons donc établir entr'eux trois conditions arbitraires; & choiſiſſant celles qui ſont de nature à ſimplifier les expreſſions, nous poſerons les trois équations ſuivantes:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$
$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1,$$
$$a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1;$$

de plus, les trois plans étant rectangulaires, on aura entre les coéfficiens les trois équations suivantes:

$$\begin{aligned} a\,a' &+ b\,b' &+ c\,c' &= 0,\\ a''\,a &+ b''\,b &+ c''\,c &= 0,\\ a'\,a'' &+ b'\,b'' &+ c'\,c'' &= 0; \end{aligned}$$

donc de ces neuf quantités il n'y en a que trois qu'il soit nécessaire de déterminer d'après la loi du mouvement de la courbe génératrice.

Posons que les trois coéfficiens déterminés de cette manière, soient a, b', c'', les valeurs des six autres, conclues des six équations précédentes, en faisant, pour abréger,

$$\begin{aligned} 1 &+ a &+ b' &+ c'' &= M,\\ 1 &+ a &- b' &- c'' &= N,\\ 1 &- a &+ b' &- c'' &= P,\\ 1 &- a &- b' &+ c'' &= Q. \end{aligned}$$

seront

$$\begin{aligned} 2\,b &= \sqrt{(NP)} + \sqrt{(MQ)},\\ 2\,a' &= \sqrt{(NP)} - \sqrt{(MQ)},\\ 2\,a'' &= \sqrt{(NQ)} + \sqrt{(MP)},\\ 2\,c &= \sqrt{(NQ)} - \sqrt{(MP)},\\ 2\,c' &= \sqrt{(PQ)} + \sqrt{(MN)},\\ 2\,b'' &= \sqrt{(PQ)} - \sqrt{(MN)}; \end{aligned}$$

& parce que, d'après la loi du mouvement, étant donnée z', on doit toujours être en état de trouver les trois quantités a, b', c'', il s'ensuit que ces quantités sont des fonctions de z', que nous pourrons représenter par les équations $a = \alpha z'$, $b' = \beta z'$, $c'' = \gamma z'$, α, β, γ étant des caractères de fonctions; & que les six autres quantités, ainsi que M, N, P, Q, seront d'autres fonctions de z', déduites de celles-ci.

Digitized by Google

Actuellement, ſi du point de la ſurface, dont les coordonnées ſont x, y, z, on abaiſſe des perpendiculaires ſur les trois plans mobiles, leurs valeurs ſeront

$$-\{a\,(z-z')+b\,(y-\varpi z')+c\,(x-\pi z')\},$$
$$-\{a'\,(z-z')+b'\,(y-\varpi z')+c'\,(x-\pi z')\},$$
$$-\{a''\,(z-z')+b''\,(y-\varpi z')+c''\,(x-\pi z')\};$$

ces trois quantités ſont celles que nous avons repréſentées au commencement de cet article par u, v, w, c'eſt-à-dire, par w, φw, ψw. Donc ſi l'on ſubſtitue dans ces quantités les valeurs des coéfficiens que nous avons trouvées précédemment, la ſolution de la queſtion ſera compriſe dans les trois équations ſuivantes:

$$\alpha z'(z-z')+\tfrac{1}{2}[V(NP)+V(MQ)](y-\varpi z')$$
$$+\tfrac{1}{2}[V(NQ)-V(MP)](x-\pi z')=-w,$$
$$\tfrac{1}{2}[V(NP)-V(MQ)](z-z')+\beta z'(y-\varpi z')$$
$$+\tfrac{1}{2}[V(PQ)+V(MN)](x-\pi z')=\varphi(-w),$$
$$\tfrac{1}{2}[V(NQ)+V(MP)](z-z')+\tfrac{1}{2}[V(PQ)$$
$$-V(MN)](y-\varpi z')+\gamma z'(x-\pi z')=\psi(-w),$$

en ſorte que lorſque l'on connoîtra la loi du mouvement de la courbe génératrice, & par conſéquent les formes des ſept fonctions, α, β, γ, ϖ, π, φ & ψ, en éliminant z' & w de ces trois équations, on aura en x, y, z, celle de la ſurface demandée. Mais ſi l'on veut ſimplement énoncer la génération de cette ſurface, ſans ſtatuer rien de particulier ni ſur la courbe génératrice ni ſur la loi de ſon mouvement, il faut regarder ces ſept fonctions comme arbitraires, & les éliminer par la différenciation, ce qui conduira à une équation aux différences partielles du ſeptième ordre.

Digitized by Google

XVIII.

En ſuppoſant qu'une ſurface courbe, conſtante de forme & déterminée, ſe meuve d'une manière quelconque dans l'eſpace, exprimer qu'une autre ſurface l'enveloppe perpétuellement dans toutes ſes poſitions, indépendamment de la loi du mouvement.

Conſervons tout ce qui eſt dans l'*article précédent*, & ſuppoſons de plus, qu'à l'origine du mouvement, l'équation donnée de la ſurface mobile, ſoit repréſentée par

$$\varphi(z, y, x) = 0;$$

que par conſéquent ſon équation rapportée aux trois plans rectangulaires mobiles avec la ſurface, ſoit perpétuellement

$$\varphi(w, v, u) = 0.$$

Il eſt évident que les points de la ſurface cherchée, ſont ceux de la ſurface mobile, dont les coordonnées x, y, z, rapportées aux plans fixes, ne varient pas lorſque la quantité z', qui détermine la poſition de la ſurface mobile, varie; donc on aura l'équation demandée, en éliminant u, v, w, z', des cinq équations ſuivantes:

$$\alpha z'(z - z') + \tfrac{1}{2}[\nu(NP) + \nu(MQ)](y - \varpi z') + \tfrac{1}{2}[\nu(NQ) - \nu(MP)](x - \pi z') = w,$$

$$\tfrac{1}{2}[\nu(NP) - \nu(MQ)](z - z') + \beta z'(y - \varpi z') + \tfrac{1}{2}[\nu(PQ) + \nu(MN)](x - \pi z') = v,$$

$$\tfrac{1}{2}[\nu(NQ) + \nu(MP)](z - z') + \tfrac{1}{2}[\nu(PQ) - \nu(MN)](y - \varpi z') + \gamma z'(x - \pi z') = u,$$

$$\varphi(w, v, u) = 0,$$

$$\frac{d.\varphi(w, v, u)}{dz'} = 0;$$

Digitized by Google

en ſorte que la forme de la fonction φ étant donnée, ce qui réduit toutes ces équations aux deux dernières, ſi l'on différencie ces deux équations par le procédé donné au commencement de ce Mémoire, & qu'on élimine les cinq fonctions α, β, γ, π, ϖ, conſidérées comme arbitraires, & l'indéterminée ζ', on aura une équation aux différences partielles du cinquième ordre, qui énoncera les propriétés de la ſurface qui enveloppe la ſurface donnée & mobile, dans toutes ſes poſitions, ſans rien dire de particulier ſur la loi ſuivant laquelle ces poſitions changent.

On voit donc que quelque compliquée que ſoit l'équation d'une ſurface, conſtante de forme & variable de poſition dans l'eſpace, l'équation aux différences partielles de la ſurface qui l'enveloppe perpétuellement, ne peut jamais être que du cinquième ordre. Dans certains cas particuliers, l'ordre de cette équation peut être conſidérablement abaiſſé; on ſait, par exemple, que lorſque la ſurface mobile eſt un plan, l'équation de la ſurface perpétuellement touchée, n'eſt que du ſecond ordre, c'eſt celle des ſurfaces développables; & nous avons vu dans ce Mémoire, que lorſque la ſurface mobile eſt une ſphère, l'équation de la ſurface qui l'enveloppe eſt encore du ſecond ordre.

Nous ne nous étendrons pas davantage ſur cette matière, qui ſe complique trop, eu égard à ſon utilité.

Digitized by Google

MÉMOIRE*

SUR LE CALCUL INTÉGRAL DES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES.

Par M. MONGE.

TOUT ce que je me propose de dire sur cet objet, étant fondé sur le procédé que j'ai exposé dans le Mémoire précédent, pour faire disparoître, au moyen de la différenciation, les fonctions arbitraires qui sont compriſes dans une équation intégrale, je vais reprendre ici ce procédé, pour le développer avec plus de clarté, & l'appliquer enſuite à l'intégration des équations aux différences partielles.

Je commencerai d'abord par les équations linéaires du premier ordre; je paſſerai enſuite & par degrés à celles des ordres ſupérieurs, & je terminerai ce Mémoire par quelques conſidérations ſur les équations élevées.

* Ce Mémoire a été fait à l'occaſion d'une propoſition que j'énonçai à l'Académie, & qui fut conteſtée: il étoit achevé lorſqu'on me fit voir que l'idée principale, & qui faiſoit l'objet de la conteſtation, étoit entièrement dans un Mémoire de M. de la Grange, imprimé dans le volume de l'Académie de Berlin, pour l'année 1779, où à la vérité, ce célèbre Géomètre l'applique ſimplement aux équations du premier ordre. Je crois être le premier qui ait dit quelque choſe d'analogue dans un Mémoire préſenté à l'Académie en 1771, imprimé dans le volume des Savans Étrangers, pour l'année 1773, en démontrant, & par des conſidérations géométriques, & par des opérations analytiques, la propoſition ſuivante.

L'intégrale de l'équation aux différences partielles $Mp + Nq = o$, dans laquelle les coëfficiens M, N, ſont fonctions des trois variables x, y, z, eſt la même, ſoit que l'on regarde dans ces coëfficiens la quantité z comme variable, ſoit qu'on la regarde comme conſtante.

On y verra que cette propoſition, dont j'étois dès-lors fortement occupé, eſt le germe de ce qui fait l'objet du Mémoire actuel, & qu'elle a dû me conduire aux réſultats que je préſente.

Digitized by Google

I.

Soit proposé de faire disparoître la fonction arbitraire φ de l'équation $V = \varphi U$.

Cette équation exprime évidemment que les deux quantités V & U sont constantes ensemble, & variables ensemble; ou, pour mieux dire, elle exprime seulement que ces deux quantités sont constantes ensemble, car si U venoit à varier, l'équation ne détermineroit pas la variation qui en résulteroit dans V. Il suit de-là, que si l'on fait U égale à une certaine constante quelconque a, on aura V égale à une autre constante b, sans qu'il y ait aucune relation entre a & b, puisque dans l'équation $b = \varphi a$, qui pour lors a lieu, la fonction φ est arbitraire : la proposée exprime donc que les deux équations

$$U = a,$$
$$V = \varphi a = b,$$

ont lieu en même temps, indépendamment de la constante arbitraire a, ou, ce qui revient au même, elle est le résultat de l'élimination de a entre ces deux équations: elle ne comporte pas que chacune de ces équations aient lieu en particulier, mais elle signifie qu'elles ont lieu simultanément, c'est-à-dire, que si l'une est supposée, l'autre s'ensuit nécessairement, & elle ne signifie que cela. Si donc on différencie aux différences ordinaires ces deux équations, ce qui fait en effet disparoître l'indéterminée a, & donne

$$dU = 0,$$
$$dV = 0,$$

ou

$$(A) \quad \left(\frac{dU}{dx}\right) dx + \left(\frac{dU}{dy}\right) dy = 0,$$
$$(B) \quad \left(\frac{dV}{dx}\right) dx + \left(\frac{dV}{dy}\right) dy = 0,$$

Digitized by Google

on aura deux équations dans lesquelles on aura introduit une nouvelle indéterminée $\frac{dy}{dx}$, & dont le système représentera la proposée, & exprimera la même chose qu'elle. Ainsi, énoncer la proposée, c'est prononcer que les deux équations *(A)* & *(B)* ont lieu simultanément, ou indépendamment de la valeur arbitraire de $\frac{dy}{dx}$; ce n'est pas dire que l'une ait lieu, ni que l'autre ait lieu, c'est poser qu'elles ont lieu ensemble, c'est dire que les deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$, qu'elles donnent, sont égales entr'elles, sans rien statuer d'ailleurs sur cette valeur, qui peut être tout ce qu'on voudra. Donc, si l'on élimine de ces deux équations la quantité $\frac{dy}{dx}$, le résultat

$$(C)\quad \left(\frac{dU}{dx}\right)\left(\frac{dV}{dy}\right) - \left(\frac{dU}{dy}\right)\left(\frac{dV}{dx}\right) = 0,$$

énoncera la même chose que la proposée. C'est ce résultat nécessaire, exprimé en quantités différentielles, & délivré de la fonction arbitraire φ, que l'on nomme l'*équation aux différences partielles de la proposée*, & dont celle-ci se nomme l'*intégrale complète*.

Les deux équations *(A)* & *(B)* ne sont pas nécessaires; tout autre système, qui, par l'élimination d'une indéterminée ω, donneroit pour résultat l'équation *(C)*, seroit également propre à la représenter, pourvu que l'on comprît bien que les deux équations de ce système n'auroient pas lieu séparément, & que l'une fût destinée à éliminer ω de l'autre; mais ce nouveau système, quelle que fût sa forme, exprimeroit précisément la même chose que les deux équations *(A)* & *(B)*, prises simultanément, & indépendamment de la valeur de $\frac{dy}{dx}$.

II.

Digitized by Google

II.

Il suit de-là, que pour faire disparoître une fonction arbitraire d'une équation intégrale, de quelque manière que cette fonction entre dans l'équation, il faut 1.° égaler à zéro la différentielle ordinaire de la quantité qui est sous la fonction, ce qui produira une première équation; 2.° différencier aux différences ordinaires l'équation, en regardant la fonction comme une constante, ce qui donnera une seconde équation; 3.° éliminer, entre ces deux équations & la proposée, la fonction & l'indéterminée $\frac{dy}{dx}$, & l'équation résultante sera la différentielle demandée.

Si l'équation contenoit, non-seulement la fonction arbitraire φ, mais encore les coëfficiens de ses différentielles successives φ', φ'', φ''', ..&c, ce que nous venons de dire ne seroit pas suffisant; mais dans ce cas, en faisant disparoître les fonctions arbitraires, on est conduit à des équations aux différences mêlées, entières & partielles, dont nous ne nous proposons pas de parler dans ce Mémoire.

III.

Pour intégrer une équation aux différences partielles linéaires & du premier ordre, il faut faire l'opération inverse. Supposons que l'on fasse pour abréger,

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

de manière que p & q représentent les différences partielles du premier ordre; & soit proposé d'intégrer l'équation générale

$$Mp + Nq + L = 0,$$

dans laquelle M, N, L, soient données d'une manière quelconque en x, y, z. Cette équation exprime une simple relation entre p & q, & ne peut suffire pour les déterminer toutes deux en x, y, z: si donc on élimine ou p

ou q, au moyen de l'équation $dz = p\,dx + q\,dy$, les équations

$$Mdz + Ldx = q(Mdy - Ndx),$$
$$Ndz + Ldy = p(Mdy - Ndx),$$

qu'on obtiendra, ne devront déterminer ni p ni q, c'eſt-à-dire, qu'elles devront avoir lieu chacune en particulier, indépendamment des valeurs de ces deux quantités; donc, leurs membres ſeront ſimultanément égaux à zéro, donc, on aura en même temps les trois équations

$$Mdz + Ldx = 0,$$
$$Ndz + Ldy = 0,$$
$$Mdy - Ndx = 0,$$

dont deux quelconques comportent la troiſième. Ainſi, énoncer la propoſée, c'eſt prononcer que deux quelconques de ces trois équations ont lieu, indépendamment de la valeur de la quantité $\frac{dy}{dx}$, introduite par l'élimination: ce n'eſt pas dire qu'aucunes d'elles ait lieu, c'eſt dire que deux d'entr'elles ont lieu enſemble.

Ces équations aux différences ordinaires ne ſont point néceſſaires; tout autre ſyſtème de deux équations, qui, par l'élimination d'une indéterminée ω, reproduiroient, comme les précédentes, la propoſée, exprimeroit la même choſe, & en ſeroit une autre traduction exacte.

Actuellement, ſoient

$$V = a,$$
$$U = b,$$

les intégrales complètes de deux de ces trois équations aux différences ordinaires, a & b étant les conſtantes arbitraires introduites par l'intégration; ces deux équations, qui, comme leurs différentielles, doivent avoir lieu ſimultanément,

Digitized by Google

comme elles, repréſenteront la propoſée : or, elles expriment, non pas que les deux quantités V & U ſont conſtantes chacune en particulier, mais qu'elles ſont conſtantes en même temps; c'eſt-à-dire, qu'elles varient enſemble, & ſont conſtantes enſemble; ou autrement, qu'elles ſont fonctions l'une de l'autre, ſans rien ſtatuer d'ailleurs ſur la forme de cette fonction. Donc, ſi l'on indique par φ une fonction arbitraire, l'équation

$$V = \varphi U$$

énoncera la même choſe que la propoſée, & ſera ſon intégrale complète.

IV.

On voit donc d'abord que lorſque les trois équations

$$Mdz + Ldx = 0,$$
$$Ndz + Ldy = 0,$$
$$Mdy - Ndx = 0,$$

ſeront intégrables, on aura immédiatement l'intégrale de la propoſée. Cette intégrale ſeroit poſſible, quand même il n'y auroit qu'une de ces équations que l'on pût intégrer dans l'état où elle eſt, parce qu'au moyen de cette équation intégrée, on chaſſeroit d'une des deux autres la variable, dont la différentielle n'eſt pas employée, ce qui en feroit une équation aux différences ordinaires à deux variables, dont l'intégrale ſeroit poſſible : mais lors même qu'aucune de ces trois équations ne pourra s'intégrer, en multipliant l'une d'entr'elles par un facteur indéterminé, & ajoutant le produit à une des deux autres, on aura une équation à trois variables, qui tiendra lieu d'une des trois premières; & ſi l'on peut déterminer le facteur, de manière que la condition d'intégrabilité ſoit ſatisfaite, on aura une équation dont l'intégrale rendra poſſible celles des deux autres. Nous allons éclaircir cela par des exemples.

Digitized by Google

V.

EXEMPLE I. Soit proposé d'intégrer l'équation

$$py - qx = 0,$$

qui est celle des surfaces de révolution autour de l'axe des z: les trois équations aux différences ordinaires se réduisent, dans ce cas, aux deux suivantes,

$$dz = 0,$$
$$y\,dy + x\,dx = 0;$$

leurs intégrales sont

$$z = a,$$
$$x^2 + y^2 = b.$$

Donc, l'intégrale complète de la proposée est

$$z = \varphi(x^2 + y^2),$$

ce qu'on savoit déjà.

VI.

EXEMPLE II. Soit proposé d'intégrer l'équation

$$p(y - Bz) - q(x - Az) + Ay - Bx = 0,$$

dans laquelle les quantités A & B sont des constantes; les trois équations aux différences ordinaires sont

$$(y - Bz)\,dz + (Ay - Bx)\,dx = 0,$$
$$-(x - Az)\,dz + (Ay - Bx)\,dy = 0,$$
$$(y - Bz)\,dy + (x - Az)\,dx = 0,$$

dont aucune n'est intégrable immédiatement.

Mais si l'on multiplie la première par A, la seconde par B, & qu'on les ajoute, on aura

$$A\,dx + B\,dy + dz = 0:$$

Digitized by Google

si l'on multiplie de même la première par x, la seconde par y, & qu'on les ajoute, on aura

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0:$$

les intégrales de ces deux dernières équations sont

$$Ax + By + z = a,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = b.$$

Donc, en faisant $a = \varphi b$, on aura pour intégrale complète de la proposée

$$Ax + By + z = \varphi(x^2 + y^2 + z^2).$$

Cette équation, qui énonce la même chose que les deux précédentes prises simultanément, exprime que la surface à laquelle elle appartient, est le lieu des intersections d'une suite de plans parallèles par une suite de surfaces de sphères concentriques, & dont le centre commun est à l'origine des coordonnées; donc, elle est celle des surfaces de révolution autour d'un axe incliné mené par l'origine.

VII.

Exemple III. S'il s'agit d'intégrer l'équation

$$px + qz + y = 0;$$

des trois équations aux différences ordinaires

$$x\,dz + y\,dx = 0,$$
$$z\,dz + y\,dy = 0,$$
$$x\,dy - z\,dx = 0,$$

que l'on obtient, il n'y a que la seconde qui soit intégrable immédiatement, & son intégrale est

$$z^2 + y^2 = a^2;$$

mais si l'on substitue dans la première la valeur de y, que fournit cette intégrale, on a

$$x\,dz + dx\sqrt{(a^2 - z^2)} = 0,$$

Digitized by Google

qui ne renferme plus que deux variables, & dont l'intégrale eſt

$$x^a e^{\text{arc ſin.} \frac{z}{a}} = b:$$

faiſant donc $b = \varphi a$, & mettant pour a ſa valeur $\sqrt{(z^2 + y^2)}$, l'intégrale complète de la propoſée ſera

$$x^{\sqrt{(z^2+y^2)}} e^{\text{arc ſin.} \frac{z}{\sqrt{(z^2+y^2)}}} = \varphi(x^2 + y^2).$$

Si au lieu de ſubſtituer la valeur de y dans la première, on eût mis celle de z dans la troiſième, en opérant de la même manière, on auroit trouvé l'intégrale complète ſous cette autre forme,

$$x^{\sqrt{(z^2+y^2)}} \varphi(z^2 + y^2) = e^{\text{arc ſin.} \frac{y}{\sqrt{(z^2+y^2)}}}.$$

Ces exemples ſuffiſent pour faire ſentir l'eſprit de la méthode dont il s'agit dans ce Mémoire, & nous aurons occaſion dans la ſuite d'en faire d'autres applications.

De l'Intégration des Équations aux différences partielles linéaires & du ſecond ordre.

Nous ſuppoſerons que l'on faſſe dans la ſuite

$$dp = r\,dx + s\,dy,$$
$$dq = s\,dx + t\,dy,$$

de manière que les quantités r, s, t repréſentent les trois différences partielles du ſecond ordre.

VIII.

Soit l'équation linéaire générale

$$Ar + Bs + Ct + D = 0,$$

dans laquelle A, B, C, D ſoient données d'une manière quelconque en x, y, z, p, q. Cette équation exprime une

Digitized by Google

ſimple relation entre les trois quantités r, s, t, & ne peut ſuffire pour déterminer les valeurs de chacune d'elles en x, y, z, p, q. Si donc, à l'aide des deux équations $dp = rdx + sdy$, $dq = sdx + tdy$, qui ne diſent rien de nouveau, on élimine deux de ces trois quantités, les trois équations

$$\begin{aligned} Bdpdy + Cdqdy - Cdpdx + Ddy^2 &= -r \\ \{Ady^2 - Bdxdy + Cdx^2\}, & \\ Adpdy + Cdqdx + Ddxdy &= s \\ \{Ady^2 - Bdxdy + Cdx^2\}, & \\ Adpdx - Adqdy + Bdqdx + Ddx^2 &= -t \\ \{Ady^2 - Bdxdy - Cdx^2\}, & \end{aligned}$$

que l'on obtient, ne doivent pas déterminer les valeurs de r, s, t; & parce qu'elles ont lieu, il faut que ce ſoit indépendamment de ces valeurs, c'eſt-à-dire, que chacun des membres de ces équations doit être par lui-même égal à zéro, ou que l'on a en même temps

$$\begin{aligned} Ady^2 - Bdxdy + Cdx^2 &= 0, \\ Adpdy + Cdqdx + Ddxdy &= 0, \\ Bdpdy + C(dqdy - dpdx) + Ddy^2 &= 0, \\ A(dpdx - dqdy) + Bdqdx + Ddx^2 &= 0; \end{aligned}$$

de ces quatre équations, il n'y en a que deux de néceſſaires, car deux quelconques étant poſées, les deux autres s'enſuivent.

Ainſi énoncer la propoſée, c'eſt prononcer que deux quelconques de ces quatre équations ont lieu en même temps, indépendamment de la valeur de $\frac{dy}{dx}$ qui leur eſt commune, & qu'on a introduite dans la propoſée pour en obtenir ces deux équations. Donc en raiſonnant ici

Digitized by Google

comme dans l'*article III*, ſi les intégrales complètes de deux quelconques de ces équations, ſont

$$V = a,$$
$$U = b;$$

a & b étant les conſtantes arbitraires introduites par l'intégration, l'intégrale première de la propoſée, ſera

$$V = \varphi U;$$

& ſi cette équation eſt encore linéaire, on l'intégrera en quantités finies, par la méthode que nous avons expliquée plus haut.

IX.

Les équations aux différences ordinaires de l'*article précédent*, étant toutes les quatre élevées au ſecond degré, il eſt évident que dans la première que l'on intégrera, la conſtante arbitraire ſera pareillement élevée au ſecond degré, & que cette conſtante aura deux valeurs que nous repréſenterons par

$$V = a,$$
$$V = a'.$$

Quant à la ſeconde qu'on ſe propoſe d'intégrer, il ſe préſente naturellement deux cas; ou cette équation, en vertu de l'intégrale de la première, s'abaiſſera au premier degré, ou elle reſtera du ſecond; ces deux cas donnent des réſultats qu'il ne faut pas confondre. Nous allons d'abord traiter le premier, nous analyſerons enſuite le ſecond.

X.

Si la ſeconde équation aux différences ordinaires, devient linéaire, en vertu de l'intégrale de la première, il n'y aura aucune nouvelle ambiguité introduite de ſa part; mais parce que l'intégrale de la première en préſente une, il s'enſuit que, ſelon la ſolution qu'on emploira, l'intégrale

l'intégrale de la seconde sera $U = b$ ou $U' = b'$; que par conséquent l'intégrale première de la proposée, sera indifféremment

$$V = \varphi U,$$
$$\text{ou } V' = \downarrow U,$$

& que l'intégrale commune de ces deux dernières équations, sera l'intégrale finie & complète de la proposée.

Ces deux équations sont aussi celles qu'on trouveroit en faisant disparoître de l'intégrale finie, par la différenciation, ou l'une ou l'autre des deux fonctions arbitraires φ & $\downarrow$, qui la complètent.

XI.

Toutes les fois que les quantités V & V' seront exprimées en x, y, z, & qu'elles seront délivrées des différences partielles p & q, elles seront aussi les quantités qui entreront sous les deux fonctions arbitraires de l'intégrale finie; & parce que des quatre équations aux différences ordinaires, il n'y a que la première qui ne contienne pas les différences de p & de q, il s'ensuit qu'on ne pourra avoir immédiatement ces deux quantités, que par l'intégration de cette première équation. Lorsque les quantités V & V' contiendront les différences partielles p & q, les deux équations $V = \varphi U$ & $V' = \downarrow U$, n'en seront pas moins les intégrales premières de la proposée, mais il est évident que ces quantités changeront de forme pour entrer dans l'intégrale finie.

Avant que d'aller plus loin, éclaircissons ce qui précède par des exemples connus.

XII.

EXEMPLE I. Soit proposé d'intégrer l'équation du second ordre,

$$Ar + Bs + Ct + D = 0,$$

dans laquelle les quantités A, B, C, D, sont des constantes;

les deux équations principales aux différences ordinaires, seront

$$Ady^2 - Bdxdy + Cdx^2 = 0,$$

$$Adpdy + Cdqdx + Ddxdy = 0.$$

Si, pour abréger, l'on exprime par k & k' les deux valeurs de k que fournit l'équation algébrique

$$Ak^2 - Bk + C = 0,$$

la première de ces deux équations donnera les deux solutions suivantes:

$$dy - kdx = 0,$$

$$dy - k'dx = 0,$$

dont les intégrales seront

$$y - kx = a,$$

$$y - k'x = a';$$

& l'on voit d'abord que les deux quantités qui seront sous les deux fonctions arbitraires de l'intégrale finie, seront

$$y - kx \quad \& \quad y - k'x.$$

Actuellement, si l'on emploie la première de ces solutions, & qu'on l'introduise dans l'autre équation aux différences ordinaires, elle deviendra

$$Akdp + Cdq + Dkdx = 0,$$

dont l'intégrale est

$$Akp + Cq + Dkx = b;$$

donc une des intégrales premières de la proposée, est

$$Akp + Cq + Dkx = \varphi'(y - kx).$$

En employant la seconde solution, au lieu de la première, on auroit eu pour autre intégrale

$$Ak'p + Cq + Dk'x = \psi'(y - k'x).$$

Chacune de ces intégrales premières étant linéaire, on peut encore l'intégrer par le procédé de l'*article III*; en

Digitized by Google

effet, les deux équations aux différences ordinaires, que l'on obtient, ſont

$$Akdy - Cdx = 0;$$

$$Akdz + Dkxdx - \varphi'(y - kx)dx = 0;$$

l'intégrale de la première, à cauſe de $kk' = \frac{C}{A}$, eſt

$$y - k'x = a';$$

la ſeconde, en éliminant y, devient

$$Akdz + Dkxdx - \varphi'\{a' + x(k' - k)\}dx = 0,$$

dont l'intégrale eſt

$$Akz + \tfrac{1}{2}Dkx^2 - \varphi\{a' + x(k' + k)\} = b.$$

Enfin faiſant $b = \varphi a'$, & mettant pour a' ſa valeur, on trouve pour intégrale complète de la propoſée

$$Az + \tfrac{1}{2}Dx^2 = \varphi(y - kx) + \psi(y - k'x).$$

XIII.

Exemple II. Soit propoſée l'équation

$$q^2r - 2pqs + p^2t = 0,$$

qui eſt celle des ſurfaces engendrées par une droite qui ſe meut d'une manière quelconque, mais toujours parallèlement au plan des x & y. Les équations aux différences ordinaires ſont, pour ce cas,

$$q^2dy^2 + 2pqdxdy + p^2dx^2 = 0,$$

$$q^2dpdy + p^2dydx = 0;$$

la première donne $(qdy + pdx)^2 = 0$, ou $dz^2 = 0$, ou $z = a$; & parce que les deux racines de cette équation ſont égales, il s'enſuit que les deux fonctions qui compléteront l'intégrale finie, ſeront compoſées de la même quantité z.

Quant à la ſeconde, puiſqu'on a par la première

$$qdy + pdx = 0,$$

elle devient

$$pdq - qdp = 0,$$

dont l'intégrale eſt

$$q = bp;$$

donc l'intégrale première de la propoſée, eſt

$$q = p\varphi z,$$

ce qu'on ſavoit déjà.

En ſuivant le procédé de l'*article III*, pour arriver à l'intégrale finie, les deux équations aux différences ordinaires, ſont

$$dz = 0,$$

$$dx + dy\varphi z = 0;$$

l'intégrale de la première eſt $z = a$, comme ci-deſſus; celle de la ſeconde, puiſque z eſt conſtant, eſt $x + y\varphi z = b'$; donc l'intégrale finie de la propoſée eſt

$$x + y\varphi z = \downarrow z,$$

ce qu'on ſavoit encore.

XIV.

Ces deux exemples prouvent ſuffiſamment que quand parmi les quatre équations aux différences ordinaires de l'*article VIII*, il s'en trouvera deux immédiatement intégrables, ou que quand on en pourra compoſer deux autres qui ſeront intégrables & qui tiendront lieu de deux des premières, on aura toujours au moins l'intégrale première de la propoſée. Mais pour exprimer analytiquement cette intégrale, il n'eſt pas même néceſſaire que les équations aux différences ordinaires, ſoient toutes deux actuellement intégrables; il ſuffira ſouvent qu'il y en ait une, comme on va le voir dans l'exemple ſuivant qui nous a été propoſé comme devant ſe refuſer à cette méthode.

XV.

EXEMPLE III. Poſons qu'il faille intégrer l'équation

$$r - t - \frac{2p}{x} = 0,$$

dont l'intégrale finie, trouvée par M. Euler, eſt

$$z = \begin{cases} \varphi(x+y) - x\varphi'(x+y) \\ +\psi(x-y) - x\psi'(x-y), \end{cases}$$

& dont les Géomètres ont coutume de dire qu'elle n'a point d'intégrale première.

Les équations aux différences ordinaires que la méthode donne pour ce cas, ſont

$$dx^2 - dy^2 = 0,$$

$$dp\,dy - dq\,dx = \frac{2p\,dx\,dy}{x};$$

la première a deux racines inégales, $dx + dy = 0$, & $dx - dy = 0$, dont les intégrales complètes ſont $x + y = a$, & $x - y = a'$: elle indique donc d'abord que les deux fonctions arbitraires qui complètent l'intégrale finie, ſont compoſées des quantités différentes $(x+y)$, & $(x-y)$.

Prenons enſuite une de ces racines, par exemple, $dx - dy = 0$, l'autre équation devient par-là

$$dp - dq = \frac{2p\,dx}{x},$$

& c'eſt cette équation qu'il faudroit intégrer pour arriver à l'intégrale première de la propoſée.

On a objecté que cette équation étoit impoſſible, parce qu'étant à trois variables, elle ne ſatisfait pas à l'équation de condition, pour l'intégrabilité. Nous répondons que cette équation, conſidérée ſeule, n'a pas lieu, & qu'elle eſt étrangère à la queſtion; elle n'a lieu que conjointement avec l'autre $dx - dy = 0$, & on doit la regarder comme provenant d'une troiſième qui auroit été réduite par le moyen de la première $dx - dy = 0$, & dont l'intégrale ſeroit poſſible. En effet, on peut ajouter à cette équation la quantité $\alpha(dx - dy)$, qui eſt nulle, en vertu de l'autre, puis ajouter & retrancher la quantité $k(dx + dy)$, & cette équation devient

$$dp - dq = (\tfrac{p}{x} + k)\,(dx + dy) - k(dx + dy) + \omega(dx - dy),$$

dans laquelle, ſi une des deux quantités k & ω contient une indéterminée, la ſubſtitution de l'équation $dx - dy = 0$ ſera faite. L'autre quantité pourra enſuite être déterminée de manière à rendre poſſible l'intégrale du ſecond membre.

Soient donc $k = \psi''(x - y)$ & $\omega = -2x\psi'''(x - y)$, l'intégrale de cette équation ſera alors

$$(A)\quad p - q = \psi'(x - y) - 2x\psi''(x - y) + \int[\tfrac{p}{x} + \psi''(x - y)]\,(dx + dy),$$

& ce ſera une des intégrales premières de la propoſée, intégrale que les Géomètres ont méconnue.

La quantité qui eſt ſous le ſigne d'intégration ne pouvant être qu'une fonction de $(x + y)$, il s'enſuit que cette intégrale peut être repréſentée par le ſyſtème des deux équations ſimultanées

$$p - q = \psi'(x - y) - 2x\psi''(x - y) + \varphi'(x + y),$$
$$\varphi''(x + y) = \tfrac{p}{x} + \psi''(x - y),$$

dont l'une eſt deſtinée à déterminer la forme de la fonction ſurabondante.

Au lieu d'employer la racine $dx - dy = 0$, on auroit pu ſe ſervir de l'autre $dx + dy = 0$, & en opérant d'une manière analogue, on auroit trouvé l'autre intégrale première

$$(B)\quad p + q = \varphi'(x + y) - 2x\varphi''(x + y) + \int[\tfrac{p}{x} + \varphi''(x + y)]\,(dx - dy),$$

que l'on peut de même repréſenter par le ſyſtème des équations ſimultanées

$$p + q = \varphi'(x + y) - 2x\varphi''(x + y) + \psi'(x - y),$$
$$\psi''(x - y) = \tfrac{p}{x} + \varphi''(x + y).$$

Digitized by Google

XVI.

Les deux intégrales premières *(A)* & *(B)*, que l'on vient de trouver, n'étant pas linéaires, ne peuvent pas être traitées par la méthode dont il s'agit dans ce Mémoire : mais ſi au lieu de l'une d'elles, on prend les deux équations ſimultanées qui la repréſentent, on en tirera pour p & pour q des valeurs qui, ſubſtituées dans $dz = p\,dx + q\,dy$, donneront une équation aux différences ordinaires, dont l'intégrale ſera, en quantités finies, celle de la propoſée. Par exemple, les deux équations ſimultanées qui repréſentent l'équation *(A)*, donnent

$$p = x[\varphi''(x+y) - \psi''(x-y)],$$
$$q = x[\varphi''(x+y) - \psi''(x-y)] - \psi'(x-y) + 2x\psi''(x-y) - \varphi'(x+y).$$

& par conſéquent

$$dz = x\varphi''(x+y)(dx+dy) - dy\varphi'(x+y) - x\psi''(dx-dy) - dy\psi'(x-y);$$

qui, en ajoutant & retranchant

$$dx\varphi'(x+y) + dx\psi'(x-y),$$

devient la différentielle exacte de l'équation

$$z = \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x+y) - x\varphi'(x+y) \\ +\psi(x-y) - x\psi'(x-y) \end{array} \right\}$$

intégrale finie & complète de la propoſée.

XVII.

Nous diſons que les deux équations *(A)* & *(B)* ſont les intégrales premières de l'équation aux différences ſecondes, 1.° parce qu'elles ne contiennent plus de différences partielles du ſecond ordre, & qu'elles renferment chacune une fonction arbitraire, qui rend leur généralité auſſi grande que celle de la propoſée; 2.° parce que c'eſt à l'une ou à

Digitized by Google

l'autre de ces deux équations que l'on arrive, lorſqu'après avoir différencié, aux différences premières, l'intégrale finie, on élimine ou l'une ou l'autre des deux fonctions arbitraires & ſa différentielle. En effet, ſi l'on différencie l'intégrale finie ſucceſſivement, par rapport à x & par rapport à y, on a les deux équations

$$p = -x[\varphi''(x+y) + \psi''(x-y)],$$

&

$$q = -x[\varphi''(x+y) - \psi''(x-y)] + \varphi'(x+y) - \psi'(x-y),$$

qui, priſes ſimultanément, expriment la même choſe que l'intégrale finie. Si l'on en élimine φ'' on trouve

$$p - q = -\varphi'(x+y) + \psi'(x-y) - 2x\psi''(x-y),$$

qui n'eſt pas la différentielle première que l'on demande. Il ne ſuffit pas, pour employer la première des deux équations ſimultanées, d'en faire uſage pour chaſſer φ'', il faut encore par ſon moyen chaſſer φ'; ainſi, la dernière équation ne tient encore lieu que de l'une des deux précédentes qui l'ont produite, & il faut la combiner avec une d'elles, pour que leur ſyſtème repréſente exactement l'intégrale finie : or, on ne peut éliminer la fonction φ' plus ſimplement qu'en prenant ſa valeur dans celle de p, où elle n'eſt élevée qu'à un ſeul ordre de différentielles, ce qui donne

$$\varphi'(x+y) = -\int\left[\frac{p}{x} + \psi''(x-y)\right](dx+dy);$$

& ſubſtituant dans la dernière équation, on a, comme ci-deſſus,

$$(A)\quad p - q = \psi'(x-y) - 2x\psi''(x-y) + \int\left[\frac{p}{x} + \psi''(x-y)\right](dx+dy),$$

équation qui tient lieu ſeule de l'intégrale finie, en exprimant la même choſe qu'elle, & qui, étant aux différences partielles

partielles premières, & contenant d'ailleurs une fonction arbitraire de moins, en eſt la différentielle première.

En éliminant de la même manière la fonction ψ, on auroit trouvé l'équation *(B)*, qui eſt l'autre différentielle première : chacune de ces équations *(A)* & *(B)*, différenciée par rapport à x, puis par rapport à y, produit également, par l'élimination de la fonction arbitraire qui reſte, l'équation aux différences ſecondes,

$$r - t - \frac{2p}{x} = 0.$$

XVIII.

On a reproché que ces expreſſions étoient abuſives, & l'on a dit que les deux équations *(A)* & *(B)* renfermant des intégrations qui ne ſont qu'indiquées, ne peuvent être regardées comme des intégrales actuellement obtenues; mais l'objet de la queſtion étoit de délivrer les propoſées des différences partielles du ſecond ordre, & d'arriver à une équation unique qui exprimât la même choſe, & qui ne contînt aucune trace des manières différentes dont p & q peuvent varier; nous l'avons fait. D'ailleurs, il n'y a aucun Géomètre qui ne regarde l'équation

$$z = \begin{cases} \varphi(x+y) - x\varphi'(x+y) \\ + \psi(x-y) - x\psi(x-y), \end{cases}$$

comme l'intégrale finie de la propoſée; cependant cette équation eſt une véritable différentielle aux différences ordinaires; on peut la mettre ſous la forme ſuivante :

$$\frac{z}{x^2} = \left\{ \frac{d\left[\frac{\varphi(x+y)+\psi(x-y)}{x}\right]}{dx} \right\},$$

qui n'eſt pas ſimplement équivalente, mais qui eſt abſolument la même, puiſqu'il n'y a qu'à exécuter les opérations indiquées dans l'une, pour avoir l'autre. On peut de même écrire les deux intégrales premières *(A)* & *(B)*, ſous les formes différentielles ordinaires,

$$dp - dq = \frac{p}{x}(dx + dy) - 2x\psi'''(x - y)(dx - dy),$$

$$dp + dq = \frac{p}{x}(dx - dy) - 2x\varphi'''(x + y)(dx + dy);$$

& chacune de ces équations ſera l'intégrale première de l'équation aux différences ſecondes, de la même manière que la différentielle précédente en eſt l'intégrale ſeconde complète; c'eſt même parce que ces deux intégrales premières ſont exprimées en différentielles ordinaires, ou parce qu'elles comportent une intégration qu'on ne peut qu'indiquer, que l'intégrale finie conſerve ſa forme différentielle.

Nous avons donc donné à nos expreſſions la valeur que leur donnent tous les autres Géomètres; c'eſt donc en parlant comme eux, qu'on doit dire que l'équation propoſée aux différences ſecondes partielles, a, de même que toutes celles dont l'intégrale ſeconde eſt poſſible, ſes deux intégrales premières, par chacune deſquelles on paſſe également, ſoit en allant par l'intégration des différences ſecondes à l'intégrale finie, ſoit en retournant par la différenciation de celle-ci aux différences ſecondes.

XIX.

Nous ferons remarquer cependant, que c'eſt ſeulement ce qu'exprime l'une ou l'autre des équations *(A)* & *(B)*, qui eſt néceſſaire: leurs formes ne ſont pas uniques, & l'on conçoit qu'en exécutant, au moins en partie, les intégrations indiquées, on peut arriver à des réſultats équivalens & de formes différentes.

XX.

La manière dont nous avons trouvé les intégrales premières *(A)* & *(B)*, *article XV*, ſuppoſoit que la forme de l'intégrale finie étoit connue: nous n'avons pas indiqué comment on pouvoit trouver les valeurs de k & de ω, indépendamment de la connoiſſance de cette forme; nous

Digitized by Google

allons l'expoſer ici pour donner un exemple de conduite dans l'emploi de la méthode dont il s'agit.

Les deux équations ſimultanées aux différences ordinaires, & qui repréſentent la propoſée, ſont, en employant la première racine,

$$dx - dy = 0$$
$$dp - dq = \frac{2p\,dx}{x};$$

le premier membre de la ſeconde eſt déjà une différentielle complète, il reſte à faire en ſorte que l'intégrale du ſecond membre ſoit poſſible. Or nous ſavons que les fonctions arbitraires qui entreront dans l'intégrale ſmie, ſeront compoſées des quantités différentes $x + y = a$, & $x - y = a'$; donc ſi l'on prend dans ces deux dernières équations les valeurs de x & de dx, ou a, a' & da, pour les ſubſtituer dans le ſecond membre de l'équation à intégrer, elle deviendra, à cauſe de $da' = 0$,

$$dp - dq = \frac{2p}{a + a'}\,da,$$

équation qui ſeule ne repréſente pas encore la propoſée, parce qu'il ne ſuffit pas de faire uſage de l'équation $da' = 0$; pour l'employer, il faut de plus introduire une fonction arbitraire de a'; ainſi la propoſée n'eſt encore repréſentée que par le ſyſtème des équations ſimultanées

$$da' = 0,$$
$$dp - dq = \frac{2p}{a + a'}\,da.$$

Mais ſi l'on ſuppoſe que la quantité ω contienne une fonction arbitraire de a', l'équation

$$(a) \quad dp - dq = \frac{2p}{a + a'}\,da + \omega\,da'$$

ſeule, pourra repréſenter la propoſée, & le ſera en effet lorſqu'on aura déterminé ω, de manière à ne rien dire de trop général: or, l'intégrale du ſecond membre de cette

équation ne pouvant être qu'une fonction de a & de a', que nous indiquerons par V, l'intégrale de l'équation sera

$$p - q = V,$$

V devant être telle que l'on ait

$$\frac{dV}{da} = \frac{2p}{a+a'};$$

& ces deux équations simultanées tiendront encore lieu de la proposée, lorsqu'on aura déterminé V, de manière qu'elle n'ait que la généralité nécessaire à cet effet.

Ces deux dernières équations donnent

$$(b)\quad p = \frac{a+a'}{2}\,\frac{dV}{da},$$

$$(c)\quad q = \frac{a+a'}{2}\,\frac{dV}{da} - V.$$

Différenciant la première par rapport à x, la seconde par rapport à y, on a, à cause de $da + da' = 2\,dx$,

$$r = \frac{dV}{da} + \frac{a+a'}{2}\,\frac{ddV}{dx\,da},$$

$$t = -\frac{dV}{dy} + \frac{a+a'}{2}\,\frac{ddV}{dy\,da}.$$

Substituant ces valeurs dans la proposée $r - t - \frac{2p}{a} = 0$, on a

$$\frac{a+a'}{2}\left(\frac{ddV}{dx\,da} - \frac{ddV}{dy\,da}\right) + \frac{dV}{dy} - \frac{dV}{da} = 0,$$

équation à laquelle V doit satisfaire, pour que les équations *(b)* & *(c)*, prises simultanément, énoncent la même chose que la proposée.

Si l'on transforme les différences partielles de V, prises par rapport à x & y, en différences prises par rapport à a & a', cette équation de condition devient

$$(a + a')\,\frac{ddV}{da\,da'} - \frac{dV}{da} = 0,$$

Digitized by Google

dont l'intégrale première eſt,

$$\frac{dV}{da'} = (a + a')\psi''' a' = 2x\psi'''(x - y);$$

or, c'eſt cette quantité $\frac{dV}{da'}$ que nous avons repréſentée par u dans l'équation *(a)*; donc en ſubſtituant cette valeur, l'équation *(a)* deviendra

$$dp - dq = \frac{p}{u}(dx + dy) + 2x\psi'''(x - y),$$

qui coïncide avec une de celles de l'*article XVIII*, & dont l'intégrale, qui eſt l'équation *(A)*, eſt une des intégrales premières de la propoſée, & énonce ſeule la même choſe qu'elle.

Ou bien intégrant encore l'équation,

$$\frac{dV}{da'} = (a + a')\psi''' a',$$

on a

$$V = (a + a')\psi'' a' - \psi' a' + \varphi' a,$$

dans laquelle φ eſt une fonction arbitraire, & qui donne, en différenciant par rapport à a,

$$\frac{dV}{da} = \psi'' a' + \varphi'' a.$$

Actuellement que les quantités V & $\frac{dV}{da}$ ſont déterminées, ſi on ſubſtitue leurs valeurs dans *(b)* & *(c)*, on aura

$$p = \frac{a + a'}{2}(\varphi'' a + \psi'' a'),$$

$$q = \frac{a + a'}{2}(\varphi'' a + \psi'' a') - (a + a')\psi'' a' + \psi' a' - \varphi' a,$$

qui, en mettant pour a & a' leurs valeurs, deviennent

$$p = x[\varphi''(x + y) + \psi''(x - y)],$$

$$q = x[\varphi''(x + y) - \psi''(x - y)] + \psi'(x - y) - \varphi'(x + y);$$

Digitized by Google

équations qui ſont les mêmes que celles de l'*article XVI*, & qu'on intégrera en quantités finies de la même manière.

XXI.

Nous n'avons tant inſiſté ſur cet exemple, que pour mettre en état de tirer les concluſions ſuivantes.

1.° Lorſque des deux équations aux différences ordinaires

$$A\,dy^2 - B\,dx\,dy + C\,dx^2 = 0,$$
$$A\,dp\,dy + C\,dq\,dx + D\,dx\,dy = 0,$$

que nous avons données, *article VIII*, & auxquelles on eſt conduit par la méthode de ce Mémoire, on peut en déduire une autre en dx, dy, dz, intégrable, de manière que les deux ſolutions de cette intégrale ſoient

$$V = a,\ V' = a';$$

il n'eſt pas néceſſaire que l'autre équation ſoit auſſi intégrable, ni même qu'elle le devienne en vertu de la précédente, pour que l'on puiſſe exprimer l'intégrale première de la propoſée : cela eſt néceſſaire ſeulement pour que cette intégrale première ſoit exprimée par une équation unique, & par conſéquent de la forme $U = \varphi V$, $U' = \psi V'$, V & V' étant en x, y, z. Mais, lors même que la ſeconde équation aux différences ordinaires ne ſera pas intégrable, l'intégrale première pourra ſouvent être repréſentée, comme dans l'exemple précédent, par le ſyſtème de deux équations ſimultanées qu'on pourra encore eſpérer d'intégrer en quantités finies, mais par d'autres méthodes, parce qu'elles ne ſeront pas linéaires par rapport à p & à q.

2.° On ne pourra avoir en x, y, z, les quantités dont doivent être compoſées les deux fonctions arbitraires de l'intégrale finie, que quand des deux équations aux différences ordinaires il ſera poſſible d'en déduire une autre en dx, dy, dz, qui ſoit intégrable. Si l'on ne peut former d'équations intégrables qu'en dx, dy, dz, dp, dq, il faudra

Digitized by Google

en avoir deux pour que les deux intégrales premières puiſſent être exprimées chacune par une équation unique de la forme

$$U = \varphi V,$$

dans laquelle U & V ſoient toutes deux compoſées de x, y, z, p, q; mais, dans ce cas même, il ne ſera pas néceſſaire d'en avoir deux pour que les intégrales premières ſoient expreſſibles analytiquement, & ſouvent lorſqu'une ſeule des équations aux différences ordinaires ſera intégrable, il ſera poſſible de repréſenter chacune des intégrales premières par le ſyſtème de deux équations ſimultanées, dont l'une ſera deſtinée, dans certains cas, à éliminer une indéterminée, & dans d'autres, à déterminer la forme d'une fonction ſurabondante. Nous aurons, un peu plus loin, l'occaſion d'éclaircir cela par un exemple.

Nous ne nous permettrons plus qu'une ſeule remarque, qu'il eſt néceſſaire de faire pour ne pas tomber dans de grandes erreurs.

XXII.

Lorſque des deux équations aux différences ordinaires intégrables, & qui ſont d'abord toutes deux du ſecond degré, l'une ne s'abaiſſe pas au premier degré en vertu de l'intégrale de l'autre; leurs intégrales ont chacune deux ſolutions,

$$\left.\begin{matrix} V = a \\ V' = a' \end{matrix}\right\} \text{ pour la première,}$$

$$\left.\begin{matrix} U = b \\ U' = b' \end{matrix}\right\} \text{ pour la ſeconde,}$$

qui donneroient quatre combinaiſons, deux à deux, & par conſéquent quatre équations qu'on pourroit d'abord regarder comme les intégrales premières de la propoſée. De ces quatre équations, il n'y en a que deux qui appartiennent à la propoſée, & qui la repréſentent chacune complétement; les deux autres ſont, pour ainſi dire, étrangères à la queſtion,

& l'on n'a de moyen pour diſtinguer les combinaiſons qui conviennent à l'objet, que de différencier & de reconnoître par-là celles qui ſatisfont à la propoſée. Nous en avons déjà donné un exemple dans le Mémoire précédent, ſur l'expreſſion analytique de la génération des ſurfaces courbes, où nous avons fait voir, *articles IX & XV*, que deux ſurfaces courbes, dont les générations ſont très-diſférentes, & qui n'ont ni les mêmes équations aux différences partielles, ni les mêmes équations en quantités finies, ſont cependant toutes deux repréſentées par le même ſyſtème de deux équations ſimultanées aux différences ordinaires du ſecond degré. Cela arrive toutes les fois que la propriété de la ſurface eſt qu'il y ait une certaine relation entre deux quantités qui ſont les racines inégales d'une même équation algébrique : ſi, dans cette relation, c'eſt toujours la même racine qui eſt employée, on a une première ſurface; mais ſi les différentes racines ſont mêlées, on a d'autres ſurfaces très-diſtinctes, & dont les équations ne ſont pas les mêmes. Nous allons en apporter un autre exemple.

XXIII.

EXEMPLE II. Soit propoſé d'intégrer l'équation

$$(D)\ (1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0;$$

qui eſt celle de la ſurface dont l'aire eſt un *minimum*, & que M. le Chevalier de Borda a publiée dans les Mémoires de l'Académie. Cette équation exprime cette propriété, remarquée par M. Meuſnier, que les deux rayons de courbure ſont par-tout égaux entr'eux & dirigés en ſens contraire. En effet, ſi l'on fait pour abréger

$$\begin{aligned} r(1 + q^2) - pqs &= \alpha, \\ t(1 + p^2) - pqs &= \beta, \\ s(1 + p^2) - pqr &= \gamma, \\ s(1 + q^2) - pqt &= \delta, \\ 1 + p^2 + q^2 &= k; \end{aligned}$$

l'expreſſion

l'expreſſion des deux rayons de courbure d'une ſurface courbe, donnée par M. Euler, eſt,

$$R = k^2 \left\{ \frac{-\alpha - \beta + [\sqrt{(\alpha-\beta)^2 + 4\gamma\delta}]}{2(\alpha\beta - \gamma\delta)} \right\};$$

or, pour exprimer que les deux rayons de courbure ſont égaux entr'eux & de ſignes contraires, il faut faire

$$\alpha + \beta = 0,$$

ou

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0,$$

qui eſt la propoſée. Mais pour exprimer que les deux rayons de courbure ſont égaux & de mêmes ſignes, il faut égaler à zéro le radical, ce qui donne

$$(E) \quad [(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t]^2 - 4(rt - s^2)(1 + p^2 + q^2) = 0;$$

équation qui eſt très-différente de la précédente, & qui cependant ſera repréſentée par le même ſyſtême d'équations aux différences ordinaires ſimultanées, comme nous allons le voir.

XXIV.

Si l'on applique à la propoſée *(D)*, ce que nous avons dit, *article VIII*, les équations aux différences ordinaires ſimultanées qui la repréſenteront, ſeront

$$(1 + q^2)dy^2 + 2pq\,dx\,dy + (1 + p^2)dx^2 = 0,$$
$$(1 + q^2)dp\,dy + (1 + p^2)dq\,dx = 0;$$

& par conſéquent

$$(1 + q^2)dp^2 - 2pq\,dp\,dq + (1 + p^2)dq^2 = 0.$$

De ces trois équations, deux quelconques comportent la troiſième; la dernière s'intègre facilement par le moyen que nous avons donné pour les équations élevées, dans

les Mémoires de l'Académie, *année 1783*, & ſon intégrale eſt

$$(1 + q^2)a^2 - 2apq + 1 + p^2 = 0,$$

a étant la conſtante arbitraire; ce qui donne les deux ſolutions ſuivantes,

$$(F) \qquad a = \frac{pq + \sqrt{(-1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2},$$

$$(G) \qquad a' = \frac{pq - \sqrt{(-1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2}.$$

Cela poſé, ſelon que ce ſera l'une ou l'autre de ces deux ſolutions, que l'on combinera avec une des ſolutions de l'autre équation, ce ſera l'une ou l'autre des deux ſurfaces dont nous venons de parler, que l'on exprimera. Par exemple, ſi l'on prend la première équation aux différences ordinaires, qui a de même ſes deux racines,

$$(H) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-pq + \sqrt{(-1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2},$$

$$(J) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-pq - \sqrt{(-1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2},$$

& que l'on combine enſemble celles où les ſignes du radical ſont les mêmes, on aura les deux équations ſimultanées *(F)*, *(H)*, ou *(G)*, *(J)*, qui appartiendront à la ſurface dont l'aire eſt un *minimum*; elles ſeront de la même généralité que la propoſée *(D)*, & elles exprimeront enſemble exactement la même choſe qu'elle. Mais ſi l'on combine les ſolutions où les ſignes du radical ſont différens, chacun des ſyſtèmes d'équations ſimultanées *(F)*, *(J)*, ou *(G)*, *(H)*, appartiendra à l'autre ſurface, & repréſentera exactement l'équation *(E)*, comme on peut s'en aſſurer par la différenciation.

XXV.

Il pouvoit donc ſe faire que l'on prît l'un de ces derniers

Digitized by Google

ſyſtèmes, parce qu'ils préſentent des facilités de calcul, & l'on auroit eu les deux équations ſimultanées

$$(F) \qquad a = \frac{pq + \sqrt{(-1-p^2-q^2)}}{1+q^2},$$

$$(J) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-pq - \sqrt{(-1-p^2-q^2)}}{1+q^2};$$

de ces deux équations on auroit tiré $dy + a\,dx = 0$, dont l'intégrale $y + ax = b$ auroit donné, en faiſant $b = \varphi a$,

$$y + x\left[\frac{pq+\sqrt{(-1-p^2-q^2)}}{1+q^2}\right] = \varphi\left[\frac{pq+\sqrt{(-1-p^2-q^2)}}{1+q^2}\right],$$

pour intégrale première ; & parce que l'équation *(F)* donne $aq - p = \sqrt{(-1-a^2)}$, qui, étant elle-même linéaire, s'intègre par notre méthode, & produit $z + x\sqrt{(-1-a^2)} = \downarrow a$, on auroit pu regarder l'intégrale de la propoſée *(D)*, comme étant le réſultat de l'élimination de a entre les deux équations

$$y + ax = \varphi a,$$
$$z + x\sqrt{(-1-a^2)} = \downarrow a,$$

ce qui n'auroit pas été vrai. Ce réſultat eſt l'intégrale finie & complète de l'équation *(E)*, & appartient à la ſurface dont les deux rayons de courbure ſont par-tout égaux & dans le même ſens. Voilà l'erreur contre laquelle nous avons voulu prémunir, & qu'on peut éviter avant que d'intégrer, en recherchant, par la différenciation, quel eſt le ſyſtème d'équations ſimultanées qui reproduit la propoſée.

XXVI.

Pour avoir l'intégrale de l'équation *(D)*, il faut donc employer ſimultanément les ſolutions dans leſquelles le radical a le même ſigne, par exemple, les deux équations ſuivantes :

Digitized by Google

(F) $$a = \frac{pq + \sqrt{(1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2},$$

(H) $$\frac{dy}{dx} = \frac{-pq + \sqrt{(1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2}.$$

Si l'on fait, pour abréger, $a' = \frac{pq - \sqrt{(1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2}$, la dernière équation devient

$$dy + a'dx = 0,$$

dans laquelle a' n'eſt pas conſtant, & dont l'intégrale ne peut être repréſentée que par les deux équations ſimultanées

$$y + a'x = \pi a' + \varphi a,$$
$$\pi' a' = x;$$

donc l'intégrale première de l'équation *(D)*, qui appartient à la ſurface dont l'aire eſt *minimum*, eſt compriſe dans les deux équations

$$y + x\,\frac{pq - \sqrt{(1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2} = \pi\left\{\frac{pq - \sqrt{(1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2}\right\} + \varphi\left\{\frac{pq + \sqrt{(1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2}\right\},$$
$$\pi'\left\{\frac{pq - \sqrt{(1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2}\right\} - x = 0,$$

dont l'une eſt deſtinée à déterminer la forme de la fonction ſurabondante.

En prenant le ſyſtème des deux équations *(G)*, *(J)*, & en opérant de la même manière, on auroit eu pour l'autre intégrale première les deux équations ſimultanées

$$y + ax = \varpi a + \psi a',$$
$$\varpi' a = x.$$

Actuellement, pour arriver à l'intégrale finie, il faudroit

Digitized by Google

tirer, de ces deux intégrales premières, les valeurs de p & de q, & les substituer dans l'équation

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

& l'intégrale de cette équation seroit l'intégrale demandée. Cette opération ne peut pas s'exécuter, mais nous pouvons en faire l'équivalent. En effet, les deux équations *(F)*, *(G)*, donnent

$$(a - a')p = a\sqrt{(-1 - a'^2)} + a'\sqrt{(-1 - a^2)},$$
$$(a - a')q = \sqrt{(-1 - a'^2)} + \sqrt{(-1 - a^2)},$$

& par conséquent,

$$(a - a')dz = (a\,dx + dy)\sqrt{(-1 - a'^2)} + (a'dx + dy)\sqrt{(-1 - a^2)}.$$

Mais les deux intégrales premières donnent

$$dy + a'dx = \varphi' a\,da,$$
$$dy + a\,dx = \psi' a'\,da';$$

donc on a en même temps

$$(a - a')\,dx = \psi' a'da' - \varphi' a\,da,$$
$$(a - a')\,dy = a\varphi' a\,da - a'\psi' a'da',$$
$$(a - a')\,dz = \psi' a'da'\sqrt{(-1 - a'^2)} + \varphi' a\,da\sqrt{(-1 - a^2)};$$

donc enfin l'intégrale seconde de l'équation *(D)*, est le résultat de l'élimination des deux indéterminées a & a', entre les trois équations suivantes,

$$x = \int \frac{\psi' a'\,da' - \varphi' a\,da}{a - a'},$$
$$y = \int \frac{a\varphi' a\,da - a'\psi' a'\,da'}{a - a'},$$
$$z = \int \frac{\psi' a'da'\sqrt{(-1 - a'^2)} + \varphi' a\,da\sqrt{(-1 - a^2)}}{a - a'};$$

Digitized by Google

& en effet, ſi, en différenciant ce ſyſtème d'équations ſimultanées, on fait diſparoître les deux fonctions arbitraires, & ſi on élimine les deux indéterminées a & a', ce qui eſt alors poſſible, on reproduit l'équation (D).

XXVII.

Nous n'abuſons pas des termes en diſant que le ſyſtème de ces trois équations ſimultanées repréſente l'intégrale ſeconde de la propoſée (D), parce que, dans ce ſyſtème, il n'eſt plus queſtion d'aucunes différences partielles, ni du premier ordre, ni du ſecond, & qu'elles ſont ſuppléées par deux fonctions arbitraires. Quant aux intégrations aux différences ordinaires qui reſtent à faire, & qu'on ne peut qu'indiquer, elles tiennent à la nature des choſes, & elles viennent de ce que la génération de la ſurface que l'on conſidère eſt tranſcendante. Pour éclaircir ce que nous entendons par-là, il faut ſe rappeler que toute équation aux différences partielles eſt l'expreſſion de la génération d'une ſurface courbe, indépendamment des courbes qui ſervent à cette génération & dont il n'eſt pas queſtion dans l'équation. Toutes les fois que la génération pourra s'exprimer algébriquement, les fonctions arbitraires entreront d'une manière algébrique dans l'intégrale finie de l'équation aux différences partielles; & les équations particulières des ſurfaces compriſes dans cette génération, ne pourront devenir tranſcendantes que quand les courbes génératrices, & les fonctions dont ces courbes déterminent la forme, ne ſeront pas algébriques. Ainſi, par exemple, une ſurface de révolution ne peut jamais être tranſcendante, par cela ſeul qu'elle eſt de révolution, & elle ne peut le devenir que quand ſa courbe génératrice n'eſt pas algébrique. Mais lorſque cette génération ſera elle-même tranſcendante, les fonctions arbitraires entreront auſſi d'une manière tranſcendante dans l'intégrale finie, & il ſera impoſſible d'exprimer cette intégrale autrement que par des différences ordinaires, ou, ce qui revient au même, ſans employer

Digitized by Google

des intégrations indiquées; & les équations particulières des ſurfaces compriſes dans cette génération, ne pourront devenir algébriques que dans les cas très-rares, où les tranſcendantes introduites par la génération, ſeront détruites par celles qu'introduiront les courbes génératrices.

XXVIII.

Quoique les intégrales finies des équations des deux ſurfaces courbes que nous venons de conſidérer, ne puiſſent être repréſentées chacune en particulier que par le ſyſtème de deux équations ſimultanées pour la première, & de trois pour la ſeconde; néanmoins on peut, ſans les diſtinguer, les intégrer par notre méthode, & obtenir une équation unique & finie qui les exprime toutes deux enſemble.

En effet, reprenons les deux équations aux différences ordinaires de l'*article XXIV*,

$$(1 + q^2)\,dy^2 + 2pq\,dx\,dy + (1 + p^2)\,dx^2 = 0,$$
$$(1 + q^2)\,dp^2 - 2pq\,dp\,dq + (1 + p^2)\,dq^2 = 0,$$

qui, priſes ſimultanément, appartiennent à ces deux ſurfaces. L'intégrale de la ſeconde, comme nous l'avons déjà dit, eſt

$$(1 + q^2)\,a^2 - 2apq + 1 + p^2 = 0.$$

La première peut être miſe ſous la forme ſuivante,

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0;$$

& ſon intégrale peut être repréſentée par

$$\int V(dx^2 + dy^2 + dz^2) = b,$$

conſtante arbitraire. Les deux racines de cette équation étant égales, on peut déjà conclure que les deux fonctions qui compléteront l'intégrale finie ſeront compoſées de la même quantité b. Donc en faiſant $a = \varphi b$, l'intégrale première ſera

$$(1 + q^2)\,[\varphi \int V(dx^2 + dy^2 + dz^2)]^2$$
$$- 2pq\varphi \int V(dx^2 + dy^2 + dz^2) + 1 + p^2 = 0.$$

Digitized by Google

Actuellement, pour intégrer encore une fois cette équation, nous conſervons la quantité a, pour abréger, & nous la mettons ſous cette forme,

$$aq - p = \sqrt{(-1 - a^2)},$$

qui, étant linéaire, ſe traite par la méthode de l'*article III*, & donne pour équation aux différences ordinaires,

$$dz + dx\sqrt{(-1 - a^2)} = 0,$$
$$dy + a\,dx = 0,$$
$$a\,dz - dy\sqrt{(-1 - a^2)} = 0.$$

Si de deux de ces trois équations on élimine la quantité a, on aura encore

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0,$$

qui tiendra lieu d'une d'entr'elles; & ſi on combine cette dernière avec une des autres, par exemple, avec la ſeconde, ces deux équations comprendront toute la queſtion.

Or, de ces deux équations, la première donne, comme ci-deſſus,

$$\int\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} = b,$$

& l'intégrale de la ſeconde, puiſque a eſt conſtante, eſt $y + ax = c$, conſtante arbitraire. Donc, l'intégrale en quantités finies, commune aux deux ſurfaces, eſt

$$y + ax = \downarrow b,$$

qui, à cauſe de $a = \varphi b$, peut être miſe ſous la forme ſymétrique

$$y\varphi\int\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} + x\downarrow\int\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} + 1 = 0.$$

XXIX.

Pour nous aſſurer que cette équation eſt l'intégrale commune aux deux ſurfaces, dont les deux rayons de courbure

courbure ſont par-tout égaux entr'eux, ſans diſtinction de ſens, il faut faire évanouir les deux fonctions φ & $\downarrow$, ce qui ſe fait commodément par le procédé de l'*article I.er* Pour cela, mettons-la ſous la forme

$$y + x\varphi = \downarrow;$$

& nous aurons les deux équations aux différences ordinaires

$$dy + dx\varphi = 0,$$
$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0,$$

ou

$$(1 + q^2)dy^2 + 2pq\,dx\,dy + (1 + p^2)dx^2 = 0;$$

& éliminant $\frac{dy}{dx}$ entre la première & la troiſième, on aura pour différentielle première

$$(K)\quad (1 + q^2)\varphi^2 - 2pq\varphi + 1 + p^2 = 0.$$

Le même procédé donnera encore les deux équations aux différences ordinaires

$$(L)\quad q(s\,dx + t\,dy)\varphi^2 - \left\{\begin{matrix} p\varphi(s\,dx + t\,dy) \\ q\varphi(r\,dx + s\,dy)\end{matrix}\right\} + p(r\,dx + s\,dy) = 0,$$

$$(M)\quad (1 + q^2)dx^2 + 2pq\,dx\,dy + 1 + p^2 = 0;$$

& éliminant les deux quantités φ & $\frac{dy}{dx}$ entre les trois équations *(K)*, *(L)*, *(M)*, la réſultante ſera compoſée des deux facteurs ſuivans :

$$(D)\quad (1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0;$$

$$(E)\quad [(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t]^2 - 4(1 + p^2 + q^2)(rt - s^2) = 0.$$

Le premier eſt la propoſée de l'*article XXIII*, c'eſt-à-dire, l'équation de la ſurface, dont les deux rayons de courbure ſont par-tout égaux entr'eux, & en ſens contraire, ou

dont l'aire eſt un *minimum* : le ſecond eſt l'équation de la ſurface pour laquelle les rayons de courbure ſont égaux, & dans le même ſens.

Cette diſtinction néceſſaire des racines des équations aux différences ordinaires, n'eſt pas une ſuite de la méthode que nous propoſons, elle tient à la nature même des choſes : il faudroit donc pareillement l'obſerver dans tout autre procédé d'intégration, & nous ne croyons pas qu'il y en ait qui fourniſſe pour cela des moyens auſſi ſimples & auſſi naturels.

XXX.

On nous a encore propoſé d'intégrer l'équation

$$r - t + 2bq = 0,$$

qu'on a coutume de regarder comme n'ayant point d'intégrales premières ; nous allons intégrer la ſuivante,

$$(A)\quad Ar + Bs + Ct + Dp + Eq + F = 0,$$

dont elle eſt un cas particulier, & dans laquelle tous les coéfficiens ſont ſuppoſés conſtans. Dans ce cas, les équations aux différences ordinaires de l'*article VIII*, deviennent

$$A\,dy^2 - B\,dx\,dy + C\,dx^2 = 0,$$

$$A\,dp\,dy + C\,dq\,dx + dx\,dy\,(D + Eq + F) = 0.$$

Les racines de la première ſont,

$$dy - k\,dx = 0, \text{ \& } dy - k'\,dx = 0;$$

k & k' étant les racines de l'équation algébrique

$$Ak^2 - Bk + C = 0.$$

En employant la première racine, la ſeconde équation devient

$$A(dp + k'\,dq) + dx\,(Dp + Eq + F) = 0;$$

& ſi l'on fait

$$dy - k\,dx = da,\ dy - k'\,dx = da',$$

Digitized by Google

ce qui donne $dx = \frac{dd' - da}{k - k'}$, & $dy = \frac{kdd' - k'da}{k - k'}$;

cette équation, à cauſe de l'hypothèſe $da = 0$, devient

$$A(dp + k'dq) + \frac{d\,d'}{k - k'}(Dp + Eq + F) = 0,$$

dont l'intégrale eſt repréſentée par le ſyſtème des deux équations ſimultanées

$$A(p + k'q) + \downarrow' d' = \varphi' a,$$
$$(k - k')\downarrow'' d' = Dp + Eq + F:$$

c'eſt le ſyſtème de ces deux équations, dont l'une eſt deſtinée à déterminer la forme de la fonction ſurabondante, qui eſt l'intégrale première complète de la propoſée. Actuellement, ſi de ces deux équations on tire les valeurs de p & de q, & qu'on les ſubſtitue dans $dz = pdx + qdy$, en employant pour dx & dy les valeurs trouvées plus haut; on a en intégrant

$$\left.\begin{array}{l} z(Dk' - E) - d'F + A(k - k')^2 \downarrow' d' \\ + (Dk - E)\downarrow d' - (Dk' - E)\varphi a \\ + \int[(Dk - E)\varphi' a\,da' - (Dk' - E)\downarrow' d'da \end{array}\right\} = 0,$$

qui eſt l'intégrale complète de l'équation *(A)*.

Il ſuit de-là, que l'intégrale complète de l'équation $r - t + 2bq = 0$, eſt

$$z = \varphi a + \downarrow d' - \tfrac{2}{b}\downarrow' d' - \int(\varphi' a\,da' + \downarrow' d'da);$$

dans laquelle on a fait, pour abréger,

$$y - x = a, \text{ \& } y + x = a'.$$

De l'intégration des équations aux différences partielles linéaires du troiſième ordre.

XXXI.

Soit fait pour abréger

$$dr = \alpha dx + \beta dy,$$

Digitized by Google

$$ds = \beta dx + \gamma dy,$$

$$dt = \gamma dx + \epsilon dy,$$

de manière que α, β, γ, ϵ, ſoient les quatre différences partielles du troiſième ordre; & ſoit propoſé d'intégrer l'équation linéaire générale

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + D\epsilon + E = 0,$$

dans laquelle les coéfficiens A, B, C, D, E, ſoient donnés, d'une manière quelconque, en x, y, z, p, q, r, s, t. Si de cette équation & des trois précédentes, on élimine trois des quatre quantités α, β, γ, ϵ, les trois dernières, par exemple, on aura

$$\left.\begin{array}{l} \alpha(Ady^3 - Bdy^2dx + Cdydx^2 - Ddx^3) \\ \quad + dy^2(Bdr + Cds + Ddt) \\ \quad - dxdy(Cdr + Dds) \\ \quad + dx^2Ddr \\ \quad + Edy^3 \end{array}\right\} = 0.$$

Cette équation devant avoir lieu indépendamment de α, qui ne peut être déterminé, donne les deux équations aux différences ordinaires

$$Ady^3 - Bdy^2dx + Cdydx^2 - Ddx^3 = 0,$$

$$dy^2(Bdr + Cds + Ddt) - dxdy(Cdr + Dds) + Ddx^2dr + Edy^3 = 0.$$

Cela poſé, ſi ces deux équations ſont immédiatement intégrables, ou ſi on peut en déduire deux autres qui le ſoient, ou ſi l'une le devient en vertu de l'intégrale de l'autre . . .&c. & que les deux intégrales ſoient

$$V = a,$$

$$U = b,$$

Digitized by Google

a & b étant les conſtantes arbitraires introduites par intégration, l'intégrale première de la propoſée ſera

$$V = \varphi U.$$

Nous ne nous permettrons qu'un ſeul exemple.

XXXII.

Soit propoſé d'intégrer l'équation des ſurfaces engendrées d'une manière quelconque, par le mouvement d'une ligne droite, & qui en faiſant, pour abréger,

$$-s + V(s^2 - rt) = u,$$

eſt $t^3\alpha + 3t^2u\beta + 3tu^2\gamma + u^3\epsilon = 0$;

les deux équations aux différences ordinaires de l'*article précédent*, deviennent, dans ce cas,

$$t^3dy^3 - 3t^2udy^2dx + 3tu^2dydx^2 - u^3dx^3 = 0,$$
$$dy^2(3t^2dr + 3tuds + u^2dt) - dxdy(3utdr + u^2ds) + u^2dx^2dr = 0.$$

La première a les trois racines égales,

$$(A) \quad tdy - udx = 0;$$

& la ſeconde, en vertu de cette racine, devient

$$(B) \quad u^2dt + 2utds + t^2dr = 0:$$

ainſi les deux équations *(A)* & *(B)*, priſes ſimultanément, renferment toute la queſtion.

Or l'intégrale de *(B)* eſt $\frac{u}{t} = a$,

& celle de *(A)*, puiſque $\frac{u}{t}$ eſt conſtant, eſt

$$y = ax + b;$$

donc l'intégrale première de la propoſée, eſt

$$y = \frac{u}{t}x + \varphi\left(\frac{u}{t}\right).$$

Cette équation n'eſt pas linéaire, & cependant on peut

Digitized by Google

encore la traiter par la méthode de ce Mémoire; car elle exprime que si l'on fait $\frac{u}{t} =$ constante $= a$, ce qui donne, en mettant pour u sa valeur,

$$r + 2as + a^2 t = 0,$$

on a $$y = ax + \varphi a,$$

Or l'intégrale complète de la première est

$$z = x\downarrow(ax - y) + \pi(ax - y),$$

qui, en vertu de la seconde, devient

$$z = x\downarrow a + \pi a;$$

donc l'intégrale troisième & complète de la proposée, est représentée par le système des deux équations simultanées

$$y = ax + \varphi a,$$
$$z = x\downarrow a + \pi a,$$

c'est-à-dire, qu'elle est le résultat qu'on obtiendroit en éliminant l'indéterminée a entre ces deux équations; ce que nous avons déjà fait voir ailleurs.

XXXIII.

Si les deux équations aux différences ordinaires avoient toutes deux plusieurs racines inégales, il faudroit les distinguer d'une manière analogue à celle que nous avons employée pour le second ordre.

XXXIV.

Il est facile de voir que le procédé que nous venons de détailler pour les trois premiers ordres, est applicable à tous les ordres supérieurs, & que le raisonnement qui nous a conduit, tant dans la nouvelle manière de différencier, que dans le procédé d'intégration qui en résulte, contient la véritable métaphysique du calcul aux différences partielles.

Digitized by Google

De l'intégration des Équations aux différences partielles linéaires, pour un nombre quelconque de Variables principales.

Nous nous contenterons d'expoſer la méthode pour le cas des trois variables principales & pour les deux premiers ordres ; il ſera facile enſuite de l'appliquer aux autres cas.

XXXV.

Soient u, x, y, les trois variables principales, & z la variable qui en dépend ; ſoit auſſi

$$dz = p\,du + q\,dx + r\,dy,$$

de manière que les trois différences partielles du premier ordre, ſoient exprimées par p, q, r. Cela poſé, ſi l'on a l'équation générale linéaire

$$Ap + Bq + Cr + D = 0,$$

dans laquelle les coéfficiens A, B, C, D ſoient donnés d'une manière quelconque en u, x, y, z ; au moyen de la valeur de dz, on pourra chaſſer une des trois quantités p, q, r, ce qui donnera l'une des trois équations

$$\begin{aligned}
Adz + Ddu &= \quad q(Adx - Bdu) + r(Ady - Cdu),\\
Bdz + Ddx &= -p(Adx - Bdu) + r(Bdy - Cdx),\\
Cdz + Ddy &= -p(Ady - Cdu) - q(Bdy - Cdx).
\end{aligned}$$

Chacune de ces équations devant avoir lieu indépendamment des valeurs de p, q, r, qui ne doivent pas être déterminées, même l'une d'elles, en une autre ſeule, il s'enſuit que les coéfficiens de ces quantités doivent être ſimultanément égaux à zéro, & qu'on doit avoir en même temps les ſix équations ſuivantes :

$$\begin{aligned}
Adz + Ddu &= 0,\\
Bdz + Ddx &= 0,\\
Cdz + Ddy &= 0,
\end{aligned}$$

Digitized by Google

$$Adx - Bdu = 0,$$
$$Bdy - Cdx = 0,$$
$$Cdu - Ady = 0,$$

dont trois quelconques comportent les trois autres.

Actuellement, si de ces six équations, trois quelconques sont intégrables immédiatement, ou si on peut en composer trois autres qui soient intégrables, ou si l'une étant intégrée, deux autres quelconques deviennent intégrables en vertu de l'intégrale de la première, &c. enfin si on peut en tirer d'une manière quelconque trois intégrales complètes,

$$V = a$$
$$U = b$$
$$W = c,$$

qui tiennent lieu de trois d'entr'elles, a, b, c étant les constantes arbitraires introduites par intégration, ces trois intégrales simultanées exprimeront la même chose que la proposée: or elles signifient, non que les quantités V, U, W, sont constantes chacune en particulier, mais que l'une quelconque étant constante, les deux autres le sont nécessairement, ou que l'une est fonction arbitraire des deux autres; donc l'équation

$$V = \phi(U. \& W),$$

exprimera la même chose que la proposée, & sera son intégrale complète.

XXXVI.

Il est facile de voir que l'équation générale linéaire du premier ordre, & pour un nombre quelconque de variables principales, se traitera de la même manière; & par un semblable raisonnement, on trouve que si $\alpha', \alpha'', \alpha''' \ldots \alpha^{(m)}$, sont les variables principales en nombre m, & que l'on ait l'équation linéaire

$$A\frac{dz}{d\alpha'} + B\frac{dz}{d\alpha''} + C\frac{dz}{d\alpha'''} \ldots + M\frac{dz}{d\alpha^{(m)}} + N = 0,$$

dans

dans laquelle les coéfficiens $A, B, C, \ldots M, N$, ſoient donnés d'une manière quelconque en fonctions de toutes les variables, il faudra poſer les m équations ſuivantes aux différences ordinaires,

$$\begin{aligned} A\,d\zeta + N\,d\alpha' &= 0,\\ B\,d\zeta + N\,d\alpha'' &= 0,\\ C\,d\zeta + N\,d\alpha''' &= 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ M\,d\zeta + N\,d\alpha^{nn} &= 0. \end{aligned}$$

Cela fait, ſi toutes ces équations ſont immédiatement intégrables, ou ſi les unes ſont intégrables en vertu des intégrales des autres, ou ſi on peut en déduire d'une manière quelconque un nombre m d'autres équations qui les comportent toutes & qui ſoient toutes intégrables, & que les conſtantes arbitraires de toutes ces intégrales ſoient

$$a, b, c, \ldots\ldots\ldots\ldots \mu,$$

l'intégrale complète de la propoſée ſera

$$a = \varphi(b, c, \ldots\ldots\ldots\ldots \mu).$$

XXXVII.

Les variables principales étant encore comme ci-devant u, x, y, ſoit l'équation linéaire générale aux ſecondes différences

$$\left.\begin{aligned} &A\frac{d\,d\zeta}{du^2} + B\frac{d\,d\zeta}{dx^2} + C\frac{d\,d\zeta}{dy^2}\\ &+ D\frac{d\,d\zeta}{dx\,dy} + E\frac{d\,d\zeta}{dy\,du} + F\frac{d\,d\zeta}{du\,dx} + G \end{aligned}\right\} = 0,$$

dans laquelle les coéfficiens ſont fonctions des quatre variables & des différences partielles premières; on a d'ailleurs toujours

$$d.\frac{d\zeta}{du} = \frac{d\,d\zeta}{du^2}du + \frac{d\,d\zeta}{du\,dx}dx + \frac{d\,d\zeta}{du\,dy}dy,$$

Digitized by Google

$$d.\frac{d\zeta}{du} = \frac{dd\zeta}{dudx}\,du + \frac{dd\zeta}{dx^2}\,dx + \frac{dd\zeta}{dxdy}\,dy,$$

$$d.\frac{d\zeta}{dy} = \frac{dd\zeta}{dudy}\,du + \frac{dd\zeta}{dxdy}\,dx + \frac{dd\zeta}{dy^2}\,dy.$$

Si l'on substitue dans la proposée, à la place des différences partielles

$$\frac{dd\zeta}{du^2},\ \frac{dd\zeta}{dx^2},\ \frac{dd\zeta}{dy^2},$$

leurs valeurs prises dans les trois dernières équations, on aura

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dd\zeta}{dxdy}(Ddudxdy - Bdudy^2 - Cdudx^2)\\
+\ &\frac{dd\zeta}{dudy}(Edudxdy - Adxdy^2 - Cdu^2dx)\\
+\ &\frac{dd\zeta}{dudx}(Fdudxdy - Adx^2dy - Bdu^2dy)\\
+\ &Adxdyd\frac{d\zeta}{du} + Bdudyd.\frac{d\zeta}{dx}\\
+\ &Cdudxd\frac{d\zeta}{dy} + Gdudxdy
\end{aligned}\right\} = 0;$$

équation dans laquelle aucune des trois quantités

$$\frac{dd\zeta}{dxdy},\ \frac{dd\zeta}{dudy},\ \frac{dd\zeta}{dudx},$$

ne doit être déterminée, & qui devant avoir lieu indépendamment des valeurs de ces trois quantités, donne les quatre équations simultanées suivantes,

$$\begin{aligned}
Cdx^2 - Ddxdy + Bdy^2 &= 0,\\
Ady^2 - Edydu + Cdu^2 &= 0,\\
Bdu^2 - Fdudx + Adx^2 &= 0,\\
Adxdyd.\frac{d\zeta}{du} + Bdudyd.\frac{d\zeta}{dx}&\\
+\ Cdudxd.\frac{d\zeta}{dy} + Gdudxdy &= 0.
\end{aligned}$$

Digitized by Google

De ces quatre équations, les trois premières étant entre les deux quantités

$$\frac{du}{dy} \quad \& \quad \frac{du}{dz},$$

ne peuvent avoir lieu elles-mêmes, à moins que l'équation de condition suivante ne soit satisfaite,

$$AD^2 + BE^2 + CF^2 = 4ABC + DEF.$$

Donc, 1.° la proposée n'est intégrable que lorsque les coéfficiens satisfont à cette condition ; 2.° ces quatre équations aux différences ordinaires n'en représentent réellement que trois, à cause de l'équation de condition.

Actuellement, si de ces quatre équations, la dernière & deux des autres sont intégrables immédiatement, ou si on peut en déduire d'une manière quelconque trois autres qui soient intégrables & qui en comportent trois en y comprenant toujours la dernière, & que les constantes arbitraires qui complèteront ces intégrales soient a, b, c; une des intégrales premières de la proposée sera,

$$a = \varphi\,(b, c).$$

XXXVIII.

En raisonnant de même, on trouvera les équations aux différences ordinaires, dont les intégrales donneront celles des équations aux différences partielles des ordres supérieurs; mais on trouvera aussi que le nombre des conditions auxquelles les coéfficiens doivent satisfaire pour que l'équation soit intégrable, est toujours moindre d'une unité que l'ordre des différentielles, dans les cas de trois variables principales.

Nous n'entrerons pas, à cet égard, dans de plus grands détails, & nous terminerons cet article en répétant encore que les équations simultanées aux différences ordinaires sont ensemble de la même généralité que l'équation aux différences partielles. Le travail de l'intégration ne consiste

Digitized by Google

donc plus, lorſqu'elle eſt poſſible, qu'à transformer ces équations en d'autres qui les comportent toutes & qui ſoient intégrables.

De l'intégration des Équations aux différences partielles élevées.

L'intégration des équations aux différences partielles élevées ayant une très-grande analogie avec celles des équations aux différences ordinaires qui ne ſont pas linéaires, nous allons répéter ici, d'une manière un peu plus générale, ce que nous avons dit ſur ce dernier objet, dans un Mémoire imprimé dans le volume de l'Académie, de 1782.

Si dans une équation algébrique quelconque, délivrée de radicaux & de diviſeurs, les coëfficiens A, B, C, D.... &c. des différens termes ſont indépendans les uns des autres, c'eſt-à-dire, s'ils ſont regardés comme donnés immédiatement; qu'enſuite on différencie cette équation un certain nombre de fois, & qu'après chaque différenciation on élimine une des conſtantes A, B, C, D.... &c. l'équation différentielle à laquelle on arrivera, ſera toujours linéaire par rapport aux plus hautes différences. Par exemple, ſi l'on a l'équation

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1,$$

& qu'on la différencie trois fois de ſuite, ce qui donnera, en faiſant $ddx = 0$,

$$2Axdx + B(xdy + ydx) + 2Cydy = 0,$$
$$2Adx^2 + B(xddy + 2dxdy) + 2C(dy^2 + yddy) = 0,$$
$$B(xd^3y + 3dxddy) + 2C(3dyddy + yd^3y) = 0;$$

ſuivant qu'on éliminera entre la propoſée & la première différentielle, l'une des trois conſtantes A, B, C, on aura

Digitized by Google

une des trois différentielles premières, dans chacune desquelles les différences dx, dy, seront linéaires; parce que dans chaque élimination on ne multiplie jamais, les uns par les autres, les termes d'une même équation, & que chaque terme de la seconde ne doit être multiplié que par des termes de la première qui ne contiennent point de différence.

Pareillement, selon qu'on éliminera entre la proposée & les deux premières différentielles, deux quelconques des trois coëfficiens A, B, C, on aura l'une des trois différentielles secondes, dans chacune desquelles la quantité ddy sera linéaire; parce que dans cette opération on n'aura multiplié chaque terme de la troisième que par des termes pris dans les deux autres, qui ne contiennent point de secondes différences.

Enfin, si on élimine entre les quatre équations, les trois coëfficiens, l'équation unique à laquelle on sera conduit, contiendra d^3y linéaire, par la même raison.

Mais, si dans la proposée, les coëfficiens A, B, C, ne sont pas considérés comme donnés immédiatement & qu'ils soient fonctions données d'autres quantités a, b, c, élevées à différentes puissances dans les différens coëfficiens, lorsque par la différenciation on fera disparoître une des quantités a, b, c, l'équation différentielle ne sera pas linéaire. Par exemple, si l'on avoit

$$(a + b)^2x^2 + (a - b)^2y^2 = 1,$$

& si après avoir différencié une première fois, ce qui donneroit

$$(a + b)^2xdx + (a - b)^2ydy = 0,$$

on vouloit éliminer ou a ou b, pour avoir l'une des deux différentielles premières; l'équation à laquelle on arriveroit contiendroit dx^2, dy^2 & $dxdy$, parce que dans l'élimination entre des équations élevées, on multiplie les unes par les autres, des fonctions qui contiennent chacune des termes pris dans les deux équations.

Digitized by Google

Il ſuit donc de-là qu'une équation aux différences ordinaires n'eſt élevée, que parce que la conſtante arbitraire a fait diſparoître par la différenciation, n'étoit pas linéaire dans l'intégrale.

X L.

Actuellement, ſi l'on différencie une des deux différentielles premières de l'équation précédente, par exemple, celle qui ne contient que b, & qu'on élimine encore cette conſtante, la différentielle ſeconde qu'on obtiendra, & qui ſera délivrée de deux conſtantes a & b, ſera la même que celle qu'on auroit eue en regardant chacun des coéfficiens $(a + b)^x$, $(a - b)^x$ de l'intégrale comme indépendant; & par conſéquent, dans cette équation, la quantité ddy ſera linéaire. On pourra donc trouver, de cette équation, deux intégrales premières différentes, dans chacune deſquelles la conſtante arbitraire ſera linéaire; & en éliminant entre ces deux intégrales premières la quantité $\frac{dy}{dx}$, on arrivera à l'équation $Ax^2 + By^2 = 1$. Si l'on veut que cette intégrale, qui contient deux conſtantes arbitraires, ne ſoit pas plus générale que la différentielle première qui ne contient que b, il faut ſubſtituer dans cette différentielle pour y & pour $\frac{dy}{dx}$, les valeurs que fournit l'intégrale, & déterminer A en B de manière que l'équation réſultante ſoit ſatisfaite indépendamment de x.

X L I.

Il ſuit de-là que ſi l'on a une équation élevée aux différences ordinaires

$$V = 0,$$

de l'ordre m, & dont l'intégrale ſoit algébrique, & que l'on différencie ſucceſſivement une, deux, trois... fois cette équation, en faiſant évanouir à chaque fois une conſtante, s'il y en a, ou une variable, s'il n'y a pas de conſtante, on

Digitized by Google

arrivera, après un certain nombre n d'opérations, à une équation différentielle linéaire de l'ordre $m + n$. Cette équation aura un nombre $m + n$ d'intégrales premières poſſibles, dans chacune deſquelles la conſtante arbitraire ſera linéaire; ſi l'on en trouve ſeulement un nombre m, & qu'entre ce nombre m d'équations & les autres dont le nombre eſt encore n, on élimine les quantités

$$\frac{dy}{dx}, \frac{ddy}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots\ldots\ldots \frac{d^{m+n-1}y}{dx^{m+n-1}}.$$

on aura en x, y, & conſtantes arbitraires, l'intégrale finie & complète de la propoſée.

Il eſt facile de voir que la même choſe auroit encore lieu, quand même la propoſée ne ſeroit intégrable qu'au moyen des logarithmes & des arcs-de-cercle; en ſorte que le procédé que nous venons d'expoſer contient la méthode d'intégrer toutes les équations élevées dont les intégrales ſont expreſſibles en quantités finies.

XLII.

Tout ce que nous venons de dire, peut s'appliquer aux équations aux différences partielles. En effet, lorſque les fonctions arbitraires qui ſe trouvent dans une équation intégrable ſont toutes linéaires, & que les quantités qui entrent ſous les fonctions ſont toutes données immédiatement, l'équation qu'on obtient en faiſant évanouir les fonctions arbitraires, eſt elle-même toujours linéaire. Mais, 1.° ſi les fonctions arbitraires ſont élevées à différentes puiſſances dans les différens termes de l'intégrale; 2.° ſi les quantités, ſous les fonctions, ne ſont données que par d'autres équations dans leſquelles elles ſe trouvent encore ſous des fonctions arbitraires, & que dans ce cas elles ne ſoient pas linéaires par-tout, l'équation aux différences partielles, qui énonce la même choſe que l'intégrale, eſt toujours élevée. Il y a donc deux eſpèces d'équations aux différences partielles qui ne ſont pas linéaires: les unes ont pour

Digitized by Google

intégrale finie une équation unique; l'intégrale des autres ne peut être exprimée en quantité finie que par le ſyſtème de pluſieurs équations ſimultanées, entre leſquelles il faudroit éliminer les indéterminées qui ſe trouvent ſous des fonctions arbitraires. Néanmoins nous ne les diſtinguerons pas, parce que la méthode que nous allons propoſer convient également aux unes & aux autres.

XLIII.

Des Équations aux différences partielles élevées du premier ordre.

Une équation aux différences partielles n'étant élevée que parce que la fonction arbitraire qu'on a fait évanouir en différenciant ſon intégrale, ou l'indéterminée qu'on a éliminée, n'étoit pas linéaire; il s'enſuit que ſi l'on eût regardé les différentes puiſſances de la fonction, comme des fonctions différentes, ou celles de l'indéterminée, comme d'autres fonctions arbitraires de cette même quantité, en faiſant diſparoître toutes ces fonctions par des différenciations, on ſeroit arrivé à une équation dont l'ordre auroit été plus haut, & qui auroit été linéaire. C'eſt cette équation linéaire qu'il faut retrouver par la différenciation, lorſque cela eſt poſſible, pour l'intégrer enſuite par la méthode que nous avons donnée précédemment.

Soit (A) $\quad W = 0$

une équation compoſée d'une manière quelconque en x, y, z, p, q; & poſons qu'en la différenciant aux différences ordinaires, on ait

$$Adp + Bdq + Cdx + Ddy = 0.$$

Comme la différenciation qui fait diſparoître une fonction arbitraire eſt hypothétique, c'eſt-à-dire, qu'elle eſt toujours priſe en ſuppoſant entre dx & dy, un certain rapport, au moyen

moyen duquel on chaſſe enſuite $\frac{dy}{dx}$ de l'équation, poſons que ce rapport ſoit tel que l'on ait $Cdx + Ddy = 0$; nous aurons donc les deux équations ſimultanées

$$Adp + Bdq = 0,$$
$$Cdx + Ddy = 0,$$

entre leſquelles, éliminant la quantité $\frac{dy}{dx}$, on aura

$$(B) \quad ADr + (BD - AC)s - BCt = 0,$$

équation qui doit être regardée comme le réſultat de la différenciation de l'équation *(A)*. Actuellement, ſi, dans cette équation, quelqu'une des conſtantes qui entrent dans la première, a diſparu, elle ſera l'équation linéaire dont l'intégrale donnera celle de la propoſée, comme nous le ferons voir dans un moment. Mais ſi l'équation *(B)* contient encore toutes les conſtantes de l'équation *(A)*, il faudra en éliminer une; & ſi le réſultat de l'élimination eſt linéaire par rapport aux différences ſecondes, ce ſera encore l'équation qu'il faudra intégrer: enfin, ſi par l'élimination d'aucune conſtante, on n'arrive à un réſultat linéaire, il faudra traiter ce réſultat par la méthode des équations élevées du ſecond ordre.

Suppoſons d'abord que dans l'équation *(B)*, quelques-unes des conſtantes de la propoſée, ou quelque variable, s'il n'y a pas de conſtante, ait diſparu. En traitant cette équation par la méthode de l'*article VIII*, on a les deux équations aux différences ordinaires,

$$ADdy^2 - (BD - AC)\,dxdy - BCdx^2 = 0,$$
$$ADdpdy - BCdqdx = 0.$$

La première a deux racines, $Cdx + Ddy = 0$, & $Ady - Bdx = 0$; ſi l'on employoit la première racine, on ſeroit reconduit à la propoſée, tandis que l'objet eſt de

trouver l'autre intégrale première de l'équation aux différences ſecondes, ce qu'on ne peut obtenir qu'à l'aide de la ſeconde racine: ainſi on aura les deux équations ſimultanées

$$(C) \quad Ady - Bdx = 0,$$
$$(D) \quad Cdq - Ddp = 0.$$

Actuellement, ſi ces deux équations aux différences ordinaires, que l'on peut encore réduire par l'équation *(A)*, ſont intégrables, ou ſi l'une peut s'intégrer en vertu de l'intégrale de l'autre, ou enfin ſi on peut en déduire d'une manière quelconque deux autres qui les comportent, & qui ſoient intégrables, en ſorte que leurs intégrales complètes étant

$$V = \alpha,$$
$$U = \varphi\alpha,$$

on puiſſe, à l'aide de ces deux équations, éliminer p & q de la propoſée; le réſultat de l'élimination ſera en x, y, z, α, l'intégrale complète de la propoſée, indépendamment de la valeur de α: donc ſi on différencie ce réſultat en ne faiſant varier que α, on aura deux équations ſimultanées qui comprendront l'intégrale demandée.

XLIV.

Si, en éliminant les quantités p & q, l'indéterminée α diſparoît en même temps, l'intégrale complète de la propoſée ſera une équation unique, dans laquelle la fonction arbitraire ſera élevée à différentes puiſſances dans les différens termes. Nous allons éclaircir ce procédé par des exemples ſimples.

XLV.

Exemple I. Soit propoſé d'intégrer l'équation

$$(ap + q)^2 - ax(ap + q) + a^2z = 0.$$

Digitized by Google

En différenciant, on a

$$adp + dq = 0,$$
$$dx - ady = 0;$$

par conſéquent les équations *(C)* & *(D)* deviennent

$$ady - dx = 0,$$
$$adq + dq = 0;$$

donc les intégrales ſont

$$ay - x = \alpha$$
$$ap + q = \varphi\alpha = \varphi(ay - x).$$

Subſtituant pour $ap + q$, cette valeur dans la propoſée, on trouve pour intégrale complète,

$$[\varphi(ay - x)]^2 + x\varphi(ay - x) + z = 0;$$

dans cette intégrale, l'indéterminée α diſparoît en même temps que les différences partielles p & q, parce que la propoſée n'eſt élevée qu'en vertu de la première cauſe que nous avons rapportée.

XLVI.

EXEMPLE II. Soit propoſé d'intégrer

$$a^2(1 + p^2 + q^2) = (z - px - qy)^2,$$

qui eſt l'équation des ſurfaces développables circonſcrites à la ſphère, dont le centre eſt à l'origine, & dont le rayon eſt a. En la différenciant aux différences ordinaires, on trouve $C = 0$, $D = 0$, c'eſt-à-dire, qu'il n'y a pas de termes affectés de dx & de dy, & que cette différentielle ſe réduit à la forme

$$Mdp + Ndq = 0;$$

d'où l'on tire

$$p = \varphi q.$$

Digitized by Google

Subſtituant cette valeur de p dans la propoſée, on a

$$a^2 [1 + q^2 + (\varphi q)^2] = (z - x\varphi q - qy)^2,$$

qui doit avoir lieu indépendamment de la valeur de q; donc, ſi on différencie cette équation, en ne faiſant varier que q, ce qui donne

$$a^2 [q + (\varphi q)(\varphi' q)] - (z - x\varphi q - qy)(x\varphi' q + y) = 0,$$

on aura deux équations ſimultanées qui comprendront l'intégrale de la propoſée.

XLVII.

EXEMPLE III. Si l'on avoit eu

$$a^2 + b^2 p^2 + c^2 q^2 = (z - px - qy)^2,$$

a, b, c étant des conſtantes, on auroit trouvé pareillement $p = \varphi q$, & l'intégrale complète auroit été le réſultat de l'élimination de q entre les deux équations ſuivantes,

$$a^2 + b^2 (\varphi q)^2 + c^2 q^2 = (z - x\varphi q - qy)^2,$$
$$b^2 (\varphi q)(\varphi' q) + c^2 q - (z - x\varphi q - qy)^2 (x\varphi' q + y).$$

Cette équation eſt celle des ſurfaces développables circonſcrites à une ſurface du ſecond degré, dont le centre eſt à l'origine, & dont les axes a, b, c ſont dirigés ſuivant ceux des x, y, z.

XLVIII.

En général, ſi en repréſentant par M la quantité $z - px - qy$, on a une équation compoſée d'une manière quelconque en p, q, M, elle donnera, comme les précédentes, $p = \varphi q$, & elle appartiendra par conſéquent à une ſurface développable. Si donc on met partout φq à la place de p, dans cette équation, & qu'on la différencie enſuite en regardant q comme ſeule variable, on aura deux équations ſimultanées qui comprendront

Digitized by Google

l'intégrale de la propoſée, indépendamment de l'indéterminée q; il faut en excepter le cas où M diſparoîtroit, parce qu'alors cette méthode ne donneroit rien.

XLIX.

EXEMPLE IV. Soit propſée $z^2(1 + p^2 + q^2) = a^2$, dans laquelle a eſt une conſtante: en la différenciant aux différences ordinaires, on a

$$A = pz,$$
$$B = qz,$$
$$C = p(1 + p^2 + q^2),$$
$$D = q(1 + p^2 + q^2);$$

par conſéquent, les équations *(C)*, *(D)* de l'*article XLIII*, deviennent

$$pdy - qdx = 0,$$
$$pdq - qdp = 0.$$

Pour les intégrer, faiſons

$$p - Vq = 0,$$

& elles deviendront

$$dp - Vdq = 0,$$
$$dx - Vdy = 0.$$

De ces trois dernières équations, multipliant la première par dz, la ſeconde par z, & ajoutant les trois enſemble, on a

$$pdz + zdp + dx - V(qdz + zdq + dy) = 0;$$

cette équation devant avoir lieu, indépendamment de l'indéterminée V, que nous avons introduite, donne les deux équations ſimultanées,

$$pdz + zdp + dx = 0,$$
$$qdz + zdq + dy = 0,$$

Digitized by Google

qui énoncent la même chose que les deux premières équations aux différences ordinaires simultanées, & dont les intégrales sont

$$pz + x = \alpha,$$
$$qz + y = \varphi\alpha.$$

Substituant dans la proposée pour p & q les valeurs que donnent les deux intégrales, on aura

$$(x - \alpha)^2 + (y - \varphi\alpha)^2 + z^2 = a^2;$$

& différenciant cette équation, en ne faisant varier que α, ce qui donne

$$x - \alpha + (y - \varphi\alpha)\varphi'\alpha = 0,$$

on aura deux équations, qui, prises simultanément, comprendront l'intégrale demandée.

De ces deux équations, la première est celle d'une sphère constante de rayon, & dont le centre est sur une courbe tracée dans le plan des x & y, l'équation de cette courbe étant $y = \varphi x$; la seconde énonce qu'on ne considère dans chaque sphère que les points dont les coordonnées x, y, z, ne varient point quand α varie; elles expriment donc ensemble que la surface à laquelle elles appartiennent, est l'enveloppe d'une suite de sphères constantes de rayon, & dont les centres sont placés sur une courbe quelconque tracée dans le plan des x & y.

L.

L'hypothèse que nous avons adoptée dans la différenciation de l'*article XLIII*, & qui consistoit à faire

$$Cdx + Ddy = 0,$$

& à substituer ensuite dans l'autre équation la valeur de $\frac{dy}{dx}$, que fournit celle-ci, étoit arbitraire, & on peut, au lieu d'elle, employer toutes celles qui, en faisant disparoître une constante, conduisent à une équation aux différences

Digitized by Google

ſecondes que l'on ſache traiter. Cette conſidération, qui donne de l'étendue à la méthode que nous propoſons, la rend auſſi plus vague, & même indéterminée; elle nous a conduit à des réſultats qui pourront paroître curieux, & que nous allons expoſer.

Si les trois quantités L, M, N, ſont données d'une manière quelconque en x, y, z, p, q, mais qu'il y ait entr'elles cette relation que des trois équations ſuivantes aux différences ordinaires

$$dL = 0,$$
$$dM = 0,$$
$$dN = 0,$$

deux quelconques étant poſées, la troiſième s'enſuive néceſſairement; & que l'on ait une équation aux différences partielles, compoſée d'une manière quelconque des trois quantités L, M, N, & repréſentée par

$$F(L, M, N,) = 0,$$

dans laquelle la forme de la fonction F ſoit tout ce qu'on voudra, déterminée, ou arbitraire, algébrique, ou tranſcendante; en la différenciant aux différences ordinaires, on aura une équation de cette forme,

$$A\,dL + B\,dM + C\,dN = 0.$$

Et ſi l'on prend pour hypothèſe, que l'une de ces trois différentielles ſoit nulle, on aura, par exemple, les deux équations ſimultanées

$$A\,dL + B\,dM = 0,$$
$$dN = 0,$$

qui ſignifient que la ſeconde étant ſuppoſée, on a M égale à une fonction de L; mais par la condition entre ces trois quantités, on a auſſi N égale à une fonction des deux autres; on aura donc les trois équations ſimultanées

Digitized by Google

$$L = \alpha,$$
$$M = \varphi\alpha,$$
$$N = \psi\alpha:$$

on a d'ailleurs, en vertu de la propoſée,

$$F(\alpha, \varphi\alpha, \psi\alpha) = 0.$$

Si donc entre ces quatre équations, on élimine p, q, & une des deux fonctions arbitraires, on aura une équation $V = 0$, en x, y, α, & une fonction arbitraire, qui devra avoir lieu indépendamment de l'indéterminée α, & qui, priſe ſimultanément avec l'équation $\frac{dV}{d\alpha} = 0$, comportera l'intégrale complète de la propoſée.

L I.

EXEMPLE I. Soit propoſée

$$(ax + by + cz - 1)^2(1 + p^2 + q^2) = h^2 (c - ap - bq)^2,$$

dans laquelle les coéfficiens a, b, c, h, ſont conſtans; ſi l'on fait pour abréger

$$1 + p^2 + q^2 = k^2,$$

on pourra la mettre ſous la forme ſuivante:

$$a\left(x + \frac{hp}{k}\right) + b\left(y + \frac{hq}{k}\right) + c\left(z - \frac{h}{k}\right) = 1.$$

Or, les trois quantités qui entrent dans cette équation ſont telles, que deux des trois équations

$$d\left(x + \frac{hp}{k}\right) = 0,$$
$$d\left(y + \frac{hq}{k}\right) = 0,$$
$$d\left(z - \frac{h}{k}\right) = 0;$$

étant

étant posées, la troisième s'ensuit nécessairement, indépendamment de l'objet de la question : en posant donc

$$x + \frac{hp}{k} = \alpha,$$

$$y + \frac{hq}{k} = \varphi\alpha,$$

$$z - \frac{h}{k} = \downarrow\alpha,$$

ce qui donne en éliminant p & q,

$$(a)\quad (x-\alpha)^2 + (y-\varphi\alpha)^2 + (z-\downarrow\alpha)^2 = h^2;$$

l'intégrale de la proposée sera le résultat de l'élimination de l'indéterminée α & d'une des deux fonctions arbitraires φ ou $\downarrow$, entre cette équation & les deux suivantes,

$$(b)\ a\alpha + b\varphi\alpha + c\downarrow\alpha = 1,$$

$$(c)\ x - \alpha + (y-\varphi\alpha)\varphi'\alpha + (z-\downarrow\alpha)\downarrow'\alpha = 0.$$

L'élimination actuelle de la fonction surabondante est facile; nous ne la faisons pas, pour laisser au calcul sa simplicité: ainsi l'intégrale de la proposée est réellement comportée par le système de deux équations simultanées.

De ces trois équations *(a)*, *(b)*, *(c)*, la première est celle de la surface d'une sphère dont le centre est indéterminé; la seconde énonce que le centre est toujours dans le plan, dont l'équation rapportée à l'origine générale, est

$$ax + by + cz = 1;$$

la troisième exprime qu'on ne considère sur la surface de la sphère que les points dont les coordonnées x, y, z ne varient pas lorsque le paramètre α, qui détermine la position du centre, varie: elles expriment donc ensemble que la surface à laquelle appartient la proposée, est l'enveloppe d'une suite de sphères dont le rayon est h, & dont les centres sont placés sur une courbe quelconque, tracée dans un certain plan donné de position dans l'espace.

LII.

EXEMPLE II. Si la propoſée avoit été

$$k^2\,[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2+k^2-g^2]^2 \\ +4\,k^2\,[(x-a)p+(y-b)q-(z-c)]^2\Big\}=0,$$

dans laquelle a, b, c, h, g ſont des conſtantes, & où l'on a de même

$$1+p^2+q^2=k^2,$$

on auroit pu la mettre ſous la forme ſuivante:

$$\Big[a-\Big(x+\frac{hp}{k}\Big)\Big]^2+\Big[b-\Big(y+\frac{kq}{k}\Big)\Big]^2 \\ +\Big[c-\Big(z-\frac{k}{k}\Big)\Big]^2=g^2;$$

& en raiſonnant comme dans l'*exemple précédent*, on auroit trouvé que l'intégrale complète de la propoſée auroit été comportée par le ſyſtème des trois équations

$$(x-\alpha)^2+(y-\varphi\alpha)^2+(z-\downarrow\alpha)^2=k^2,$$
$$(a-\alpha)^2+(b-\varphi\alpha)^2+(c-\downarrow\alpha)^2=g^2,$$
$$(x-\alpha)+(y-\varphi\alpha)\varphi'\alpha+(z-\downarrow\alpha)\downarrow'\alpha=0,$$

qu'il eſt facile de réduire à deux, par l'élimination actuelle d'une des deux fonctions arbitraires.

De ces trois équations, la première & la troiſième ſont les mêmes que dans l'*exemple précédent*; mais la ſeconde exprime que le centre de la ſphère eſt généralement ſur la ſurface d'une autre ſphère, dont le rayon eſt g, & dont les coordonnées du centre ſont a, b, c. dans les ſens des x, y, z: donc la propoſée appartient à l'enveloppe d'une ſuite de ſphères dont les centres ſont placés ſur une courbe quelconque, tracée ſur la ſurface d'une autre ſphère donnée de rayon & de poſition.

LIII.

Quand même la fonction F dans l'équation

Digitized by Google

$$F(L, M, N) = 0,$$

de l'*article L*, ſeroit tranſcendante, l'intégration dont nous venons de parler ne s'en feroit pas moins de la même manière.

Par exemple, ſi la propoſée étoit

$$z - \frac{k}{k} = a.\text{arc. ſin.} \frac{y + \frac{kq}{k}}{(x + \frac{kp}{k})^2 + (y + \frac{kq}{k})^2},$$

ſon intégrale complète ſeroit compriſe dans les trois équations ſuivantes :

$$(x - \alpha)^2 + (y - \varphi\alpha)^2 + (z - \psi\alpha)^2 = k^2,$$

$$\psi\alpha = a.\text{arc. ſin.} \frac{\varphi\alpha}{\alpha^2 + (\varphi\alpha)^2},$$

$$x - \alpha + (y - \varphi\alpha)\varphi'\alpha + (z - \psi\alpha)\psi'\alpha = 0,$$

qu'on peut toujours réduire à deux par l'élimination actuelle de la fonction ψ.

De ces trois équations, la ſeconde énonce que le centre de la ſphère doit ſe trouver ſur la ſurface du filet d'une vis à filet carré, dont l'axe coïncide avec celui des z, & dont le produit de la circonférence de la baſe, multipliée par la hauteur du pas, eſt a ; elles expriment donc enſemble que la propoſée eſt l'équation de l'enveloppe d'une ſuite de ſphères de même rayon k, & dont les centres ſont placés dans une courbe quelconque, tracée ſur la ſurface que nous venons de définir.

LIV.

En général, les quantités L, M, N, P, Q...&c. étant compoſées chacune d'une manière quelconque en x, y, z, p, q, avec cette condition que deux quelconques des équations ſuivantes aux différences ordinaires,

Digitized by Google

$$dL = 0,$$
$$dM = 0,$$
$$dN = 0,$$
$$dP = 0,$$
$$dQ = 0 \ldots\ldots \&c.$$

étant posées, toutes les autres s'ensuivent nécessairement; si l'on a une équation aux différences partielles, composée d'une manière quelconque des quantités L, M, N, P, Q, & représentée par

$$F(L, M, N, P, Q \ldots) = 0,$$

pour l'intégrer, il faudra poser les équations

$$L = \alpha,$$
$$M = \varphi\alpha,$$
$$N = \downarrow\alpha,$$
$$P = \pi\alpha,$$
$$Q = \varpi\alpha \ldots\ldots \&c.$$

& éliminer entre toutes ces équations, les quantités p & q, ce qui donnera autant d'équations moins une, qu'il y a de fonctions arbitraires $\varphi, \downarrow, \pi, \varpi \ldots\ldots \&c$, entre lesquelles on aura d'ailleurs, en vertu de la proposée, l'équation

$$F(\alpha, \varphi\alpha, \downarrow\alpha, \pi\alpha, \varpi\alpha \ldots\ldots) = 0.$$

Cela fait, on éliminera entre toutes ces équations, comprise la dernière, toutes les fonctions arbitraires moins une, & on aura une équation unique

$$V = 0,$$

qui ne contiendra que x, y, z, α & une fonction arbitraire; & en la combinant avec sa différentielle prise en ne faisant venir que α, & qui est

$$\frac{dV}{d\alpha} = 0,$$

Digitized by Google

on aura deux équations qui comprendront l'intégrale de la proposée.

L V.

Lorsque la fonction F, de l'*article précédent*, sera de forme algébrique, l'élimination des fonctions surabondantes pourra toujours se faire, & l'intégrale complète de la proposée pourra toujours être représentée par le système des deux équations simultanées

$$V = 0,$$

$$\frac{dV}{da} = 0;$$

mais lorsque cette forme sera transcendante, l'élimination ne sera pas praticable en général, & l'intégrale sera représentée par un système d'équations dont le nombre sera plus grand d'une unité que celui des fonctions qui resteront.

L V I.

Enfin, lors même que la fonction F contiendra des fonctions arbitraires, & que l'équation

$$F(L, M, N, P, Q \ldots\ldots\ldots \&c.) = 0,$$

sera par conséquent l'intégrale d'une équation d'ordre supérieur, son intégrale finie se trouvera de la même manière. Par exemple:

1.° Si l'on avoit

$$z - \frac{kx}{k} = \pi\left[\left(x + \frac{kp}{k}\right)^2 + \left(y + \frac{kq}{k}\right)^2\right],$$

dans laquelle π est une fonction arbitraire, son intégrale complète seroit le résultat de l'élimination d'une des deux fonctions φ ou $\downarrow$ & de l'indéterminée α, des trois équations suivantes,

Digitized by Google

$$(x-a)^2+(y-\varphi a)^2+(z-\downarrow a)^2=k^2,$$
$$x-a+(y-\varphi a)\varphi' a+(z-\downarrow a)\downarrow' a=0,$$
$$\downarrow a=\pi[a^2+(\varphi a)^2];$$

& elle appartiendroit à l'enveloppe d'une ſuite de ſphères de même rayon, & dont les centres ſeroient placés dans une courbe quelconque tracée ſur une ſurface quelconque de révolution autour de l'axe de z, ſans rien ſtatuer d'ailleurs, ni ſur la courbe génératrice de la ſurface de révolution, ni ſur la courbe qui, dans cette ſurface, doit contenir les centres des ſphères.

2.° Si la propoſée étoit le réſultat de l'élimination de l'indéterminée β entre les deux équations ſuivantes,

$$z-\frac{k}{k}=(x+\frac{kp}{k})\pi\beta+(y+\frac{kq}{k})\varpi\beta+\beta,$$
$$(x+\frac{kp}{k})\pi'\beta+(y+\frac{kq}{k})\varpi'\beta+1=0,$$

dans leſquelles les fonctions π & ϖ ſont arbitraires; ſon intégrale ſeroit le réſultat de l'élimination d'une des fonctions φ ou $\downarrow$, & des deux indéterminées α, β, entre les quatre équations ſuivantes,

$$(x-a)^2+(y-\varphi a)^2+(z-\downarrow a)^2=k^2,$$
$$x-a+(y-\varphi a)\varphi' a+(z-\downarrow a)\downarrow' a=0,$$
$$\downarrow a=a.\pi\beta+\varphi a\varpi\beta+\beta,$$
$$a\pi'\beta+\varphi a\varpi'\beta+1=0,$$

qu'on peut facilement réduire à trois par l'élimination actuelle de la fonction $\downarrow$; & elle appartiendroit à l'enveloppe d'une ſuite de ſphères de même rayon, & dont les centres ſeroient ſur une courbe quelconque tracée ſur une ſurface développable quelconque, ſans rien ſtatuer d'ailleurs, ni ſur la nature de la ſurface développable, ni ſur celle de la courbe qui, dans cette ſurface, doit contenir les centres des ſphères.

Digitized by Google

LVII.

Il n'y a aucune équation aux différences partielles du premier ordre, qui ne ſoit ſuſceptible d'être ramenée à la forme que nous venons de conſidérer, & qui ne pût s'intégrer par cette dernière méthode, ſi l'on avoit un procédé pour trouver les quantités L, M, N, P...&c. qui toutes ſont fonctions de deux d'entr'elles, & qui entrent ſeules dans la compoſition de la propoſée; mais cette recherche comporte en général des difficultés auſſi grandes que celles du calcul intégral des équations aux différences partielles; & ce que nous avons dit depuis l'*article L*, ne peut être utile que dans des cas très-particuliers. Néanmoins, le nombre de ſyſtèmes de quantités L, M, N, qui ſatisfont à la condition que nous avons énoncée, eſt infini; nous allons en rapporter quelques-uns des plus ſimples.

1.° Les trois quantités

$$L = x + \frac{a^2 p}{\sqrt{(a^2 p^2 + b^2 q^2 + c^2)}},$$

$$M = y + \frac{b^2 q}{\sqrt{(a^2 p^2 + b^2 q^2 + c^2)}},$$

$$N = z - \frac{c^2}{\sqrt{(a^2 p^2 + b^2 q^2 + c^2)}},$$

ſont telles que les différences ordinaires de deux d'entre elles étant égales à zéro, celle de la troiſième devient nulle; & ſi dans tous les exemples que nous avons rapportés on met pour L, M, N, ces nouvelles valeurs, toutes les équations aux différences partielles que l'on aura, n'appartiendront plus à des enveloppes de ſuites de ſphères, mais à des enveloppes de ſuites de ſurfaces du ſecond degré, dont les axes ſont conſtans, & toujours parallèles à ceux des coordonnées x, y, z, & dont les centres ſe meuvent d'une manière indiquée dans chaque cas par la propoſée. Ainſi, en faiſant, pour abréger,

$$a^2 p^2 + b^2 q^2 + c^2 = k^2,$$

Digitized by Google

l'intégrale de l'équation

$$A\left(x+\frac{a^2p}{k}\right)+B\left(y+\frac{b^2q}{k}\right)+C\left(z-\frac{c^2}{k}\right)=1,$$

analogue à celle de l'*article LI*, ſeroit le réſultat de l'élimination d'une des deux fonctions arbitraires φ ou $\downarrow$, & de l'indéterminée α entre les trois équations ſuivantes,

$$b^2c^2(x-\alpha)^2+a^2c^2(y-\varphi\alpha)^2+a^2b^2(z-\downarrow\alpha)^2=a^2b^2c^2,$$
$$b^2c^2(x-\alpha)+a^2c^2(y-\varphi\alpha)\varphi'\alpha+a^2b^2(z-\downarrow\alpha)\downarrow'\alpha=0,$$
$$A\alpha+B\varphi\alpha+C\downarrow\alpha=1,$$

& appartiendroit à l'enveloppe d'une ſuite de ſurfaces du ſecond degré, dont les axes conſtans a, b, c, ſeroient toujours parallèles à ceux des coordonnées x, y, z, & dont les centres ſeroient placés ſur une courbe quelconque tracée dans le plan, dont l'équation ſeroit

$$Ax+By+Cz=1.$$

2.° En donnant aux quantités L, M, N, les valeurs ſuivantes,

$$L=\frac{x}{p}(px+qy-z),$$
$$M=\frac{y}{q}(px+qy-z),$$
$$N=-z(px+qy-z),$$

qui ſont encore telles que l'on a à la fois

$$dL=0,\ dM=0,\ dN=0,$$

toute équation compoſée de ces trois quantités, eſt toute intégrée par le procédé que nous venons de donner, & elle appartient à l'enveloppe d'une ſuite de ſurfaces du ſecond degré, dont les centres ſont à l'origine, & dont les axes, dirigés ſuivant ceux des coordonnées x, y, z, varient de longueur, ſuivant une loi donnée par la propoſée. Ainſi, l'intégrale de l'équation

$$(px+qy-z)(Aqx+Bpy-Cpqz)=pq,$$

qui

qui peut être mise sous la forme

$$AL + BM + CN = 1,$$

est le résultat de l'élimination d'une des deux fonctions φ ou ψ, & de l'indéterminée α entre les trois équations

$$x^2\varphi\alpha\psi\alpha + y^2\alpha\psi\alpha + z^2\alpha\varphi\alpha = \alpha\varphi\alpha\psi\alpha,$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2(\varphi\alpha\psi'\alpha + \varphi'\alpha\psi\alpha) \\ + y^2(\psi\alpha + \alpha\psi'\alpha) \\ + z^2(\varphi\alpha + \alpha\varphi'\alpha) \end{array}\right\} = \varphi\alpha\psi\alpha + \alpha\psi\alpha\varphi'\alpha + \alpha\varphi\alpha\psi'\alpha,$$

$$A\alpha + B\varphi\alpha + C\psi\alpha = 1;$$

& elle appartient à l'enveloppe d'une suite de surfaces du second degré, dont les centres sont à l'origine, & dont les axes a, b, c, toujours dirigés suivant ceux des coordonnées x, y, z, varient de grandeur, d'une manière quelconque, en satisfaisant néanmoins à l'équation

$$Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 = 1.$$

LVIII.

Quant à la manière de trouver *a priori* un système de trois quantités L, M, N, composées en x, y, z, p & q, & telles qu'une quelconque soit fonction des deux autres; si l'on prend une équation quelconque $V = 0$, qui soit en x, y, z, & trois paramètres, & que de cette équation & des deux suivantes,

$$\frac{dV}{da} = 0,$$

$$\frac{dV}{dy} = 0,$$

on tire les valeurs de ces trois paramètres, ces valeurs satisferont à la condition énoncée, c'est-à-dire, qu'en égalant à zéro les différences ordinaires de deux d'entr'elles, celle de la troisième deviendra nulle, en vertu des premières.

LIX.

Avant que de quitter cette matière, nous croyons devoir faire remarquer une propriété analogue dans les équations aux différences ordinaires de tous les ordres. Supposons que pour abréger, on faſſe

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{dp}{dx} = q, \quad \frac{dq}{dx} = r \ldots . \&c.$$

Cela poſé, ſi deux quantités M, N, compoſées toutes deux en $x, y, p,$ ſont telles, que l'une des deux équations ſuivantes,

$$dM = 0,$$
$$dN = 0,$$

étant poſée, l'autre ait lieu néceſſairement, & qu'on ait à intégrer une équation aux différences ordinaires du premier ordre, compoſée d'une manière quelconque en M & N, repréſentée par

$$F(M, N) = 0,$$

en éliminant p & une des deux conſtantes arbitraires a, b, entre les trois équations ſuivantes:

$$M = a,$$
$$N = b,$$
$$F(a, b) = 0,$$

on aura en x, y, & une conſtante arbitraire l'intégrale complète de l'équation propoſée; car de ces trois équations, les deux premières ayant lieu indépendamment de la nature de la queſtion, elles expriment en général que b eſt une fonction de a; & la troiſième qui réſulte de la propoſée, détermine la forme de cette fonction.

EXEMPLE I. L'intégrale de $F[p, (y \quad px)] = 0$, eſt le réſultat de l'élimination de p & d'une des conſtantes arbitraires a ou b des trois équations

Digitized by Google

$$p = a,$$
$$y - px = b,$$
$$F(a, b) = 0,$$

ou, ce qui revient au même, elle eſt compriſe dans les deux équations ſuivantes:

$$y = ax + b,$$
$$F(a, b) = 0,$$

dont la ſeconde eſt deſtinée à éliminer la conſtante arbitraire ſurabondante.

EXEMPLE II. L'une des deux équations

$$d\left[x - \frac{ph}{\sqrt{(1+p^2)}}\right] = 0,$$
$$d\left[y + \frac{h}{\sqrt{(1+p^2)}}\right] = 0,$$

étant poſée, l'autre s'enſuit néceſſairement; ſi donc on a une équation aux différences ordinaires de cette forme,

$$F\left[\left(x - \frac{ph}{\sqrt{(1+p^2)}}\right), \left(y + \frac{h}{\sqrt{(1+p^2)}}\right)\right] = 0,$$

ſon intégrale ſera le réſultat de l'élimination de p & d'une des deux arbitraires a ou b entre les trois équations

$$x - \frac{ph}{\sqrt{(1+p^2)}} = a,$$
$$y + \frac{h}{\sqrt{(1+p^2)}} = b,$$
$$F(a, b) = 0;$$

ou parce qu'on peut d'abord éliminer p des deux premières, l'intégrale ſera compriſe dans les deux équations

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = h^2,$$
$$F(a, b) = 0.$$

Quant à la manière de trouver *a priori* deux quantités M, N, telles que, poſant $dM = 0$, on ait $dN = 0$; ſi l'on a une équation $V = 0$, qui ſoit en x, y & deux

paramètres, & que de cette équation & de la ſuivante $dV = 0$, on tire les valeurs de ces deux paramètres, ces valeurs ſatisferont à la condition énoncée.

L X.

Si l'on a trois quantités M, N, P, compoſées en x, y, p, q, & telles, qu'une des trois équations ſuivantes,

$$dM = 0,$$
$$dN = 0,$$
$$dP = 0,$$

étant poſée, les deux autres s'enſuivent néceſſairement; & qu'il faille intégrer une équation aux différences ordinaires du ſecond ordre, compoſée d'une manière quelconque des trois quantités M, N, P, repréſentée par

$$F(M, N, P) = 0,$$

on éliminera p, q, & une des trois conſtantes arbitraires a, b, c, des quatre équations

$$M = a,$$
$$N = b,$$
$$P = c,$$
$$F(a, b, c) = 0,$$

& le réſultat ſera en x, y & deux conſtantes arbitraires, l'intégrale complète & finie de la propoſée. En effet, de ces quatre équations, les trois premières ayant lieu ſimultanément, quel que ſoit d'ailleurs l'objet de la queſtion, il en réſulte généralement, en x, y, a, b, c, une équation, dans laquelle les trois conſtantes arbitraires ſont indépendantes, & la propoſée établit la relation qu'ont entr'elles ces trois conſtantes, dans la queſtion dont il s'agit.

EXEMPLE. Les trois quantités

$$M = x - \frac{p(1+p^2)}{q},$$
$$N = y + \frac{1+p^2}{q},$$

Digitized by Google

$$P = \frac{(1+p^2)^3}{q^2},$$

étant telles, que l'on a ſimultanément $dM = 0$, $dN = 0$, $dP = 0$, il s'enſuit que l'intégrale finie & complète d'une équation aux différences ordinaires du ſecond ordre, repréſentée par

$$F\{[x - \frac{p(1+p^2)}{q}], [y + \frac{1+p^2}{q}], \frac{(1+p^2)^3}{q^2}\} = 0,$$

eſt le réſultat de l'élimination de p & de q, & d'une des conſtantes arbitraires entre les quatre équations

$$x - \frac{p(1+p^2)}{q} = a,$$

$$y + \frac{1+p^2}{q} = b,$$

$$\frac{(1+p^2)^3}{q^2} = c,$$

$$F(a, b; c) = 0;$$

ou parce qu'on peut toujours éliminer p & q des trois premières, elle eſt le réſultat de l'élimination d'une des conſtantes a, b, c, entre les deux équations

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c,$$

$$F(a, b, c) = 0.$$

LXI.

En général, ſi l'on a un nombre n de quantités $M, N, P, Q, R \ldots$.&c. compoſées en $x, y, p, q, r, s \ldots$.&c. juſqu'aux différences de l'ordre $n - 1$ inclusivement, & telles, qu'une des équations ſuivantes,

$dM = 0$, $dN = 0$, $dP = 0$, $dQ = 0$, $dR = 0 \ldots$.&c.

étant poſées, les autres s'enſuivent néceſſairement, & qu'on ait une équation aux différences ordinaires de l'ordre $n - 1$, compoſée d'une manière quelconque des quantités $M, N, P, Q, R \ldots$.&c. repréſentée par

$$F(M, N, P, Q, R \ldots\ldots \&c.) = 0;$$

ſon intégrale finie & complète ſera le réſultat de l'élimination des $(n - 1)$ quantités $p, q, r, s \ldots$.&c. & d'une

Digitized by Google

des conſtantes arbitraires $a, b, c, d, e \ldots$ &c, entre les $n + 1$ équations

$$M = a,$$
$$N = b,$$
$$P = c,$$
$$Q = d,$$
$$R = e,$$
$$\ldots\ldots$$
$$F(a, b, c, d, e \ldots\ldots\ldots \&c.) = 0,$$

& ce réſultat ſera en x, y & $(n - 1)$ conſtantes arbitraires.

Nous n'inſiſterons pas davantage ſur cette matière, & nous ne dirons plus qu'un mot des équations aux différences partielles élevées du ſecond ordre.

Des Équations aux différences partielles élevées du ſecond ordre.

LXII.

Soit $W = 0$ une équation aux différences partielles compoſée d'une manière quelconque en x, y, z, p, q, r, s, t. Poſons qu'en la différenciant aux différences ordinaires, & en faiſant

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$
$$dp = r\,dx + s\,dy,$$
$$dq = s\,dx + t\,dy,$$

on ait

$$A\,dr + B\,ds + C\,dt + D\,dx + E\,dy = 0.$$

Cela poſé, ſi par une certaine hypothèſe faite dans cette équation ſur la valeur de $\frac{dy}{dx}$, l'équation aux différences partielles du troiſième ordre, à laquelle on arrivera, contient une conſtante de moins, & eſt linéaire, ou de la forme de celle que l'on ſait traiter; on prendra les trois intégrales premières de cette équation, dont l'une ſera la

Digitized by Google

propoſée, & toutes les fois que de ces trois intégrales il ſera poſſible d'éliminer en même temps les cinq quantités p, q, r, s, t, le réſultat ſera l'intégrale finie demandée.

Suppoſons qu'en faiſant

$$(A) \quad Ddx + Edy = 0,$$

ce qui donne

$$(B) \quad Adr + Bds + Cdt = 0,$$

on faſſe diſparoître une conſtante, ou quelque variable s'il n'y a pas de conſtante; en ſubſtituant dans (B) pour $\frac{dy}{dx}$ la valeur que donne (A), on aura l'équation aux différences partielles du troiſième ordre, & linéaire

$$AE\,\frac{d^3\zeta}{dx^3} + (BE - AD)\,\frac{d^3\zeta}{dx^2dy} + (CE - BD)\,\frac{d^3\zeta}{dxdy^2} - CD\,\frac{d^3\zeta}{dy^3} = 0,$$

qui, traitée par la méthode de l'*article XXXI*, donne les deux équations aux différences ordinaires

$$(Ady^2 - Bdxdy + Cdx^2)\,(Ddx + Edy) = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} dr\,[(BE - AD)dy^2 - (CE - BD)dxdy - CDdx^2] \\ + ds\,dy\,[(CE - BD)dy + CDdx] \\ - CDdtdy^2 \end{aligned}\right\} = 0.$$

La première de ces deux équations a deux facteurs rationels; ſi l'on employoit le ſecond, l'intégrale première que l'on obtiendroit ſeroit la propoſée elle-même, & l'on auroit fait un travail inutile. Ainſi il ne faut faire uſage que du premier facteur; mais en vertu de ce facteur, la ſeconde équation ſe ſimplifie, en ſorte que les deux équations aux différences ordinaires qui doivent donner les deux autres intégrales de l'équation aux troiſièmes différences ſont,

$$(C) \quad Ady^2 - Bdxdy + Cdx^2 = 0,$$

$$(D) \quad AEdydr + ds(CEdx - ADdy) - CDdxdt = 0.$$

Digitized by Google

Chacune des racines de l'équation *(C)*, prise simultanément avec l'équation *(D)*, produira une intégrale, & toutes les fois que de ces deux intégrales & de la proposée il sera possible d'éliminer d'une manière quelconque les quantités p, q, r, s, t, on aura l'intégrale finie de la proposée.

LXIII.

EXEMPLE. Soit proposé d'intégrer

$$2bx(a^2r + 2as + t) + q\sqrt{(a^2r + 2as + t)} - 2ab(ap + q) = 0;$$

en la différenciant aux différences ordinaires, les équations *(A)* & *(B)* deviennent

$$a^2dr + 2ads + dt = 0,$$
$$dx - ady = 0,$$

dans lesquelles la constante b a disparu. Les équations *(C)* & *(D)* reproduisent encore les mêmes équations aux différences otdinaires, & l'on a en intégrant

$$a^2r + 2as + t = \varphi(x - ay);$$

substituant cette valeur dans la proposée, elle devient

$$ap + q = a\varphi(x - ay) + 4ab^2x[\varphi(x - ay)]^2,$$

qui, étant linéaire, s'intègre facilement, & donne pour intégrale complète & finie

$$z = \downarrow(x - ay) + x\varphi(x - ay) + 2b^2x^2[\varphi(x - ay)]^2.$$

Il est facile de faire de semblables raisonnemens pour les équations des ordres supérieurs; mais aussi l'on voit qu'à mesure que l'ordre des équations sera plus élevé, les cas où, par ce procédé, on pourra les intégrer complétement, seront plus rares.

OBSERVATION

OBSERVATION
SUR UN GRAND NOMBRE DE MORSURES
Faites à une même perſonne, par un chien enragé, traitées avec ſuccès.

Par M. SABATIER.

Lu le 13 Novembre 1784.

RIEN ne prouve plus l'incertitude où l'on eſt encore ſur la meilleure manière de traiter les plaies faites par des animaux enragés, que le jugement que la Société royale de Médecine a porté, en 1782, ſur les Mémoires qui ont concouru pour le Prix qu'elle avoit propoſé à ce ſujet : elle a cru devoir en couronner trois, quoique les vues curatives que chacun de leurs auteurs propoſe, ſoient différentes. Il eſt donc eſſentiel de fixer l'attention du public, & celle des gens de l'art, ſur cet objet important, & de leur faire connoître les faits qui conſtatent la préférence que l'on doit donner à une méthode ſur les autres : celui dont je vais rendre compte, ne me paroît laiſſer aucun doute ſur les avantages de celle que j'ai ſuivie.

Le 17 Février dernier, un chien deſtiné à la garde d'une maiſon iſolée, en bleſſa le Jardinier à la lèvre ſupérieure, qui fut déchirée de manière à former un lambeau aſſez conſidérable. Comme cet animal n'étoit pas méchant, on eut quelque ſoupçon qu'il pouvoit être malade, & on l'enferma dans le jardin, où on lui deſcendoit des alimens par une fenêtre. On crut qu'il en avoit uſé, & on commença à ſe raſſurer ſur ce qu'il répondoit à la voix & venoit chaque fois qu'il étoit appelé. Un jeune homme de vingt-deux ans, grand & robuſte, ſe haſarda, le ſurlendemain 19 au matin, à entrer dans le jardin avec un plat où il y avoit de la viande, & une terrine pleine

d'eau. Le chien qu'il appela, vint assez paisiblement, mais quand il aperçut l'eau, il recula de quelques pas, & s'élança sur lui avec impétuosité. Le jeune homme, forcé de se défendre, jeta ce qu'il avoit dans les mains, afin de pouvoir saisir l'animal par le cou, & de s'en rendre maître. Il étoit déjà blessé en plusieurs endroits, & il appeloit des secours que la crainte rendit tardifs. Enfin il parvint à se coucher sur le chien qu'il avoit terrassé, & à le tenir pendant assez long-temps dans cette situation, pour que le maître de la maison, armé d'un couteau de chasse, le tuât sous lui.

Il avoit été mordu aux deux mains, à l'avant-bras & à l'épaule droite, & à la partie supérieure & antérieure de la jambe gauche. En outre, il étoit égratigné en divers endroits & sur-tout au ventre, & il étoit difficile de juger si c'étoit par les dents ou par les griffes de l'animal. Plusieurs des morsures ne portoient que l'empreinte des dents qui avoient pénétré toute l'épaisseur de la peau; mais celles de l'avant-bras & de l'épaule offroient des plaies assez étendues, & celle de la jambe, plus considérable que les autres, avoit au moins un pouce & demi de longueur & de largeur, & une profondeur telle que le tibia, & l'aponévrose qui couvre les muscles de sa partie antérieure & externe, étoient à nu.

Le Jardinier, dont on avoit pansé la plaie à la manière de celle qui résulte du bec-de-lièvre, étoit tranquille; mais le jeune homme & les personnes de la maison, qui prenoient intérêt à lui, ne l'étoient pas. Il demanda à consulter, & je fus prié de le voir le soir du même jour. Je lui dis que pour le mettre en sûreté, il falloit élargir celles de ses blessures qui en avoient besoin, & les cautériser toutes à une assez grande profondeur. Il le desiroit avec empressement; mais il n'étoit pas sûr que le chien fut enragé. L'opération que je me proposois de lui faire, pouvoit avoir des suites fâcheuses, vu le nombre, l'étendue & la profondeur de ses plaies: il pouvoit se faire qu'il

Digitized by Google

reſtât eſtropié. Je ne voulus rien entreprendre que je n'euſſe l'aveu d'un parent qu'il avoit à Paris, & qui veilloit ſur lui. Cette circonſtance me fit différer juſqu'au lendemain vers midi, c'eſt-à-dire, vingt-ſept à vingt-huit heures après l'accident. Les morſures & les plaies étoient au nombre de vingt-cinq, & les égratignures remarquables, au nombre de cinquante. Je n'eus pas beſoin d'inſpirer du courage au malade, quoique le ſupplice auquel il alloit être expoſé, dût être bien long. Les ouvertures faites par les dents de l'animal, & les égratignures furent inciſées en étoile à une profondeur plus ou moins grande ; enſuite je cautériſai les premières avec le beurre d'antimoine liquide, dans lequel j'avois trempé des pinceaux de linge roulé ſur des brins de bouleau, & je brûlai les ſecondes, à pluſieurs repriſes, avec des groſſes aiguilles montées ſur des alumettes, & rougies à la flamme d'une bougie. Je portai de même le cauſtique ſur tous les points de la ſurface & des bords des plaies, de manière que la ſphère de ſon activité répondît à la grandeur de leurs dimenſions, & il n'y eut d'autre différence à cet égard, ſi ce n'eſt que je n'y fis point d'inciſions préparatoires, parce qu'elles étoient ſuffiſamment ouvertes. Il me fallut plus de deux heures pour achever ce terrible procédé, dont j'étois plus fatigué que le malade : tant la crainte de la rage avoit fait d'impreſſion ſur lui.

Je craignois des accidens relatifs aux plaies ; il n'en ſurvint point, & les parties malades n'éprouvèrent qu'un léger gonflement. La ſuppuration s'établit ſucceſſivement dans les différentes parties, & les eſcares ſe détachèrent ; les plaies légères furent guéries en aſſez peu de temps. Il ne reſtoit plus que celles dont les dimenſions étoient plus grandes. Celles-ci éprouvèrent les mêmes révolutions que les autres, & celle de la jambe, ſur-tout, ſuppura très-long-temps avant de ſe cicatriſer.

Le 14 Avril ſuivant, cinquante-cinq jours après ſa bleſſure, le Jardinier, qui s'applaudiſſoit de ſa ſécurité,

Digitized by Google

& qui ne pouvoit ſe perſuader que le chien qui les avoit bleſſés eût été malade, commença à perdre l'appétit; il dîna fort peu & ne ſoupa point. Le lendemain il ſe plaignit que ſa plaie étoit douloureuſe, & dit qu'il ſe ſentoit oppreſſé & qu'il avoit des envies de vomir. On lui demanda s'il étoit altéré, à quoi il répondit qu'il avoit grand ſoif, mais qu'il ne pouvoit pas boire. Effectivement, il lui fut impoſſible d'avaler l'eau qu'on lui préſenta, quoiqu'il ſe fût efforcé de la porter à ſa bouche. On lui fit prendre avec peine trois grains d'émétique dans quelques cuillerées d'eau, ce qui lui procura des évacuations abondantes, dont il ne reçut aucun ſoulagement. La ſuffocation devenoit de plus en plus forte; il y avoit beaucoup d'agitations; le malade, quoique d'une conſtitution vigoureuſe, ſe ſoutenoit avec peine quand il s'efforçoit de ſe lever: ſon état étoit décidé. On ſe détermina à le conduire à l'Hôtel-Dieu dans la ſoirée. L'impreſſion de l'air ſur ſon viſage, le mit dans une fureur momentanée, qui ſe renouvela pluſieurs fois pendant la nuit. Il ne put rien avaler de ce qu'on lui préſenta, & mourut hydrophobe, le lendemain 16, à ſept heures du ſoir.

Le jeune homme que j'ai ſoigné, jouit encore de la meilleure ſanté, quoiqu'il y ait bientôt huit mois accomplis qu'il a été bleſſé; quoique ſes plaies aient été au nombre de ſoixante-quinze; quoique pluſieurs de ces plaies, & notamment celles des mains & des poignets, lui aient été faites à nu, & qu'il ſoit d'une vraiſemblance qui approche de la certitude, que celles de l'avant-bras, de la jambe & de l'épaule, qui étoient fort grandes, ont été couvertes & infectées de la bave de l'animal; quoique je n'aie pris aucune précaution pour prolonger la ſuppuration des plaies, dont le plus grand nombre s'eſt cicatriſé aſſez promptement; quoiqu'enfin le malade n'ait fait uſage intérieurement que de quelques gouttes d'alkali volatil, que je lui ai laiſſé prendre chaque matin, dans la vue de calmer ſon imagination troublée, plutôt que dans celle de le mettre à l'abri

Digitized by Google

du mal dont il ſe croyoit menacé, puiſque j'ai vu périr, entre mes mains pluſieurs perſonnes mordues par des animaux enragés, auxquelles on l'avoit adminiſtré à forte doſe.

A quoi donc eſt-il redevable de ſa guériſon? à l'action du cauſtique & à celle du feu qui ont détruit le virus en même-temps que le tiſſu des parties qui en étoient imprégnées. Les morſures des animaux enragés peuvent être comparées aux plaies que l'on fait pour inſérer le levain de la petite vérole. Il ſe fait une véritable inoculation, dont on préviendra les effets ſi on cautériſe les plaies avant que le virus ait eu le temps de déployer ſon énergie & de l'exercer ſur l'économie animale. La facilité avec laquelle ces ſortes de plaies guériſſent pour l'ordinaire, & la longueur du temps qui s'écoule avant que les malades en éprouvent les ſuites, montrent qu'il y reſte d'abord ſans action; ce n'eſt guère qu'entre trente & quarante jours que les malades ſont incommodés. Ils commencent pour lors à reſſentir un mal-aiſe, de l'agitation, des inſomnies, de légers mouvemens convulſifs, une altération dans les traits du viſage, des dégoûts & de l'oppreſſion, ſimptômes avant-coureurs par où la maladie s'annonce d'une manière particulière. Peut-être le procédé qui m'a ſi bien réuſſi, peut-il être employé avec ſuccès juſqu'à cette époque. Le fait que je viens de rapporter, montre du moins qu'on peut tarder vingt-quatre heures & plus ſans y avoir recours. Mais, ſans les circonſtances particulières qui m'ont forcé de différer, j'en aurois fait uſage auſſi-tôt que j'ai été averti, & je crois prudent de ne pas perdre un inſtant ſans venir au ſecours des bleſſés.

Ce cas n'eſt pas le ſeul où j'aie employé la cautériſation pour prévenir la rage. En 1775, je fis brûler un cylindre d'amadou ſur la plaie d'un Soldat atteint à la poitrine, au-deſſous du mamelon gauche, par un coup de croc qu'un chien lui avoit donné; l'eſcarre fut profonde, & ſa ſéparation fut ſuivie d'une ſuppuration qui dura aſſez

Digitized by Google

long-temps. Un autre homme, mordu par le même chien en pluſieurs endroits de la tête, tomba dans les accidens de l'hydrophobie, cinquante-deux jours après, & mourut en moins de vingt-quatre heures. Cependant celui que j'ai cautériſé n'en a pas eu le moindre reſſentiment : je l'ai revu bien portant quatre à cinq ans après ſa bleſſure. Depuis ce temps, j'ai conſeillé le même procédé pour un enfant mordu à l'un des avant-bras, près le poignet. Il a guéri, & l'on m'a aſſuré qu'une autre perſonne, mordue par le même chien, étoit morte de la rage quelque temps après. Enfin j'ai coupé, en 1780, l'extrémité du pouce de la main droite & celle du doigt indicateur de la main gauche, à un Officier & à un Soldat, bleſſés tous deux par un même chien, ſur l'état duquel il y avoit des doutes bien fondés. Mais il s'en faut de beaucoup que ces obſervations ſoient concluantes. Le premier Soldat avoit été bleſſé à travers la bandoulière de ſon fourniment & à travers ſes habits, de ſorte que la dent de l'animal avoit pu être eſſuyée avant qu'elle lui perçât la peau. Je n'ai pas vu périr la perſonne mordue par le chien qui avoit bleſſé l'enfant, & la nature de la maladie à laquelle cette perſonne a ſuccombé ne me paroît pas bien conſtatée. Enfin il eſt poſſible que le chien qui a bleſſé l'Officier & le dernier Soldat, ne fût pas enragé. Mais toutes les circonſtances de l'obſervation qui fait le ſujet de ce Mémoire, ſe ſont paſſées ſous mes yeux, & le chien qui a ſi fort maltraité le malade à qui j'ai donné des ſoins, étoit certainement attaqué de la rage, puiſque le Jardinier, bleſſé plus de quarante-huit heures avant lui, eſt mort avec les ſimptômes qui caractériſent cette maladie.

Je ne dois pas diſſimuler que la cautériſation des plaies faites par des animaux enragés, eſt un procédé fort connu. Preſque tous ceux qui ont écrit ſur le traitement de ces ſortes de plaies en ont recommandé l'uſage, mais comme celui d'un moyen purement auxiliaire, auquel ils n'ont pas attaché toute l'importance qu'il mérite, & ſans recom-

Digitized by Google

mander comme je le fais, de la porter assez loin pour que toutes les particules vénéneuses inoculées soient détruites. Si on excepte M. le Roux, de l'Académie des Sciences, Arts & Belles-Lettres de Dijon, l'un de ceux qui ont partagé le prix de la Société royale de Médecine, dont les idées sont presque entièrement conformes aux miennes, ils ne se sont proposé d'autre but que celui d'obtenir une suppuration qui durât long-temps, & des dégorgemens à la faveur desquels les miasmes virulens pussent être entraînés au dehors; comme si le mouvement qui s'excite dans les plaies, pouvoit empêcher que les substances qui sont en contact avec elles, pénètrent à l'intérieur. Il y a des exemples de morsures qui ont suppuré avec abondance & qui n'ont point eu de suites. N'est-il pas plus sûr de dénaturer & d'anéantir le virus dont les parties sont infectées, en cautérisant profondement avec des caustiques, en consumant avec le feu, ou en extirpant la partie blessée, lorsqu'on ne peut employer l'un ou l'autre de ces procédés sans de grands inconvéniens, & lorsque le retranchement de cette partie n'emporte pas avec lui le danger de la vie? Voilà ce que l'insuffisance des remèdes les plus accrédités dont j'avois fait usage sans succès, & sur-tout ce que la réflexion & l'analogie m'avoient fait penser depuis long-temps. Il falloit que des circonstances malheureuses me missent à portée de faire les nouvelles épreuves dont j'avois besoin: j'ai saisi celles qui se sont présentées. Les premières m'avoient laissé des doutes de toute espèce; la dernière les a totalement dissipés, & je suis enfin convaincu que c'est de la Chirurgie seule que l'on doit attendre des secours vraiment efficaces, contre l'une des plus affreuses maladies qui aient jamais affligé l'humanité.

Digitized by Google

MÉMOIRE
SUR UNE PLANTE DU PÉROU,
Nouvellement connue en France.

Par M. FOUGEROUX DE BONDAROY.

Présenté le 17 Déc. 1784.

LA ſcience de la Botanique eſt redevable à M. Dombey *, de pluſieurs Plantes naturelles au Pérou, qu'il a envoyées au Jardin royal, de la nouvelle Eſpagne, en fruits ou en graines, & dont pluſieurs ont réuſſi.

C'eſt M. Dombey, qui, en 1780, adreſſa à l'Académie la manière de deſſécher la pomme de terre ou patate, & de conſerver pluſieurs années les tubéroſités de cette plante, de manière à pouvoir ſervir d'aliment aux hommes & aux animaux.

Cette même année 1780, M. Dombey envoya à l'Académie & au Jardin du Roi, une graine, ſous le nom de *quinoa*, ajoutant les uſages qu'on faiſoit de cette graine à Lima, & les grands avantages dont elle pouvoit être en France, ſi nous parvenions à l'y multiplier.

On donna de ces graines à tous les cultivateurs, mais elles n'ont réuſſi nulle part, il y a même apparence que la graine envoyée avoit été deſſéchée, & peut-être mondée, contre le gré de M. Dombey.

J'ai ſemé cette graine de quinoa, & en vain; un ſeul pied d'une autre plante, qui me ſembloit nouvelle pour nous, a levé dans une des terrines; je l'ai cultivée avec le plus grand ſoin.

Je n'ai pas tardé à me convaincre que cette plante

* Médecin-botaniſte du Roi, correſpondant de l'Académie des Sciences de Paris, envoyé par Sa Majeſté le Roi de France, au Pérou (de retour en France lors de l'impreſſion de ce Mémoire).

n'étoit

n'étoit pas le quinoa, puiſqu'on l'a dit de la famille du *chenopodium*, & que la plante nouvelle indiquoit être d'un genre tout différent. Cette nouvelle plante a fleuri la même année qu'elle a été ſemée ; elle eſt annuelle, & tous les ans, depuis cette époque, j'obtiens pluſieurs pieds des ſemences recueillies à Denainvilliers ; mais comme cette plante mérite par ſa feuille & ſa fleur d'être connue, & que nous pourrions la perdre par la réunion de diverſes circonſtances, puiſqu'elle eſt annuelle, j'ai cru devoir en donner une deſcription particulière, & la conſigner dans les volumes de l'Académie.

Je ne crois pas, d'après les recherches que j'ai faites, qu'aucun Botaniſte ait décrit cette plante, qui, par les caractères propres aux parties de ſa fructification, doit être rangée dans la *didinamie angioſpermie* de Linné, ce qui le rapproche beaucoup, comme nous le ferons voir dans la ſuite, de la famille des bignognes, des martynia, &c. Cependant M. de Juſſieu, de cette Académie, ayant eu la complaiſance de me permettre de viſiter l'herbier que M. de Juſſieu ſon oncle a raſſemblé au Pérou ; j'y ai trouvé cette plante deſſinée au trait, par feu M. Joſeph de Juſſieu, avec ſon caractère, tiré de ſa fleur & de ſon fruit, & un exemplaire de la même plante deſſéchée, avec le lieu où il l'a trouvée, ainſi indiqué ; *Achochillas del monte, camino de canelos.*

Deſcription de la Plante.

Cette plante, au ſortir de la terre, porte deux feuilles ſéminales, oppoſées, épaiſſes, non dentelées, dont les nervures ont peu d'apparence, & qui ſont ovoïdes, fort échancrées dans leur petit diamètre, à l'extrémité ſupérieure, ainſi que du côté de leur pédicule : la plante dont nous parlons, court & s'étend de douze à quinze pieds, ſes branches ſont herbacées, mais elles ſe ſoutiennent en s'accrochant à l'aide de ſes vrilles qui ſont bifurquées &

terminées par des crochets ; c'eſt ainſi que la plante, en ſe prolongeant, adhère aiſément & fortement à ce qu'elle touche. Elle n'eſt ligneuſe que près de ſa racine, les branches & les tiges ſont herbacées, & tiennent de la plupart des labiées, en ce que les tiges ſont anguleuſes & comme quadrangulaires, avec des eſpèces de ſéparations ou de renflemens aux endroits d'où ſortent les branches latérales, *fig. 1.* De ce renflement de la tige, ou de cette eſpèce d'articulation, ſortent deux branches oppoſées, ou deux feuilles, & de chaque inſertion une vrille ou le pédicule d'une vrille. Il ſe forme enſuite, à quatre ou cinq pouces de cette première articulation, un ſecond renflement d'où partent deux pédicules qui ſoutiennent deux nouvelles feuilles ; ainſi de ſuite. Chacun de ces pédicules qui portent les feuilles, ſe diviſe ordinairement en trois autres pédicules plus déliés, & ces trois-ci portent une foliole : ces folioles ſont découpées & dentées irrégulièrement. Quelquefois, une ou deux des principales nervures ſe prolongent & ſervent à former une quatrième ou une cinquième foliole ; ainſi on doit regarder la feuille comme étant compoſée de deux folioles oppoſées & d'une impaire, quoiqu'elle en ait ſouvent quatre & cinq. La vrille, qui, comme nous l'avons déjà dit, ſe trouve à l'inſertion des branches & des feuilles, eſt auſſi ſurcompoſée ; le pédicule principal de cette vrille ſe diviſe ordinairement en trois : elle ſe roule ſouvent en ſpirale déliée, & toujours ſe termine par deux crochets qui ont beaucoup de force, & qui ſe briſent plutôt que d'abandonner la partie à laquelle ils adhèrent. Les nervures de chacune de ces folioles, ſur-tout la principale & longitudinale, ſont très-relevées en deſſous & profondes en-deſſus ; la couleur de la foliole, eſt d'un vert aſſez foncé. Des poils fins & blancs ſe remarquent ſur les pédicules des feuilles & ſur les tiges, ils ſont ſur-tout placés ſur les angles ; on voit auſſi de ces poils diſpoſés par touffes à l'inſertion des articulations. Toutes les branches ſont ſi herbacées,

Digitized by Google

& les feuilles ſi aqueuſes, qu'il eſt difficile de les bien deſſécher, & elles ſe réduiſent, entre du papier, à un très-petit volume.

La fleur eſt diſpoſée en épis de 4 à 5 pouces. Cet épi eſt terminé par cinq, ſix & même dix fleurs incomplètes qui n'ont qu'un calice d'une ſeule pièce, diviſé en deux lèvres principales, comme dans le calice des fleurs complètes dont nous allons parler. La principale & la plus grande lèvre du calice de ces fleurs incomplètes, puiſqu'elles manquent de corolle, eſt comme ployée & ſouvent dentée vers ſon extrémité ſupérieure; l'autre eſt étroite & pointue. Ce calice eſt coloré d'un rouge très-foncé, juſque vers ſon fond qui eſt vert. Les fleurs du reſte de l'épi ſont compoſées d'un calice, auſſi d'une ſeule pièce & diviſé en deux lèvres principales, comme dans les fleurs incomplètes: l'une de ces lèvres, moins large que dans celles incomplètes, eſt ſouvent colorée d'un rouge-foncé, elle eſt plus grande que la ſeconde lèvre, & comme creuſée un peu en gouttière ou en cueilleron; la ſeconde lèvre, qui eſt le plus ſouvent verte, eſt plus étroite que celle que nous venons de décrire & un peu pointue. L'ouverture de la corolle ſe trouve du côté de la plus grande lèvre.

La corolle eſt compoſée d'un tuyau d'inégale forme & largeur, ſa moindre extrémité eſt renfermée dans le calice; ce tuyau continue à s'évaſer, puis il forme une petite lèvre qui ſe rabat ſur le tuyau, tandis que l'autre partie, qu'on peut conſidérer comme formant la lèvre ſupérieure, imite la figure d'un caſque, d'une toque ou d'un capuchon très-obtus, ouvert ſur le côté qui forme la partie antérieure de la fleur, & cette ouverture eſt garnie d'un petit rebord qui d'un côté & de l'autre ſe rabat ſur la fleur: toute la corolle eſt d'une belle couleur bleuâtre très-foncée, qui tire ſur le violet.

On voit, en ouvrant la fleur, quatre étamines attachées à la corolle, dont deux ſont plus longues que les deux

autres, & quelquefois le filet ou la naiſſance d'une cinquième étamine. Les antères de chaque étamine ſont doubles; chaque bourſe ovale s'ouvre en deux parties qui répandent une pouſſière fécondante jaune & aſſez abondamment.

Du fond du calice, part un piſtil compoſé d'un ovaire hériſſé dès ſon jeune âge de petits poils fins, ſurmonté d'un ſtil de la longueur du pétale, & terminé par un ſtigmate aigu: le pédicule propre à la fleur, eſt peu alongé, & porte à ſon inſertion une *bractée* ou petite feuille peu apparente.

La carolle abandonne le calice, enſuite tombe le calice; & l'ovaire groſſiſſant, devient un fruit long d'environ deux pouces, hériſſé de filets durs, & dont l'extrémité eſt terminée par un crochet aſſez ſemblable par ſa forme à ceux des vrilles; mais celui du fruit a encore plus de force & de réſiſtance.

Si on coupe ce fruit horizontalement, on le voit compoſé de quatre loges principales, formées par des cloiſons qui ſe prolongent ſuivant la longueur du fruit: ce fruit, à l'extérieur, & par les pointes dont il eſt hériſſé, a des rapports avec celui du *xanthium* ou *lappa minor*, (bardanne).

Dans chacune de ces loges, il y a des ſemences appliquées le long de la cloiſon, & qui par leurs poſitions ſe recouvrent en partie les unes les autres: ces ſemences ſont ovales, & entourées d'une membrane mince qui les rend ailées, la membrane eſt fort échancrée dans ſa partie poſtérieure. L'enveloppe hériſſée de pointes, forme à ce fruit comme une eſpèce de brou qui recouvre les quatre loges plus intérieures, où ſont diſpoſées les ſemences, ce qui le diviſe comme en huit parties; & par-là, ce fruit ſe rapproche du *martinia*.

On voit par cette deſcription, que la plante dont il s'agit, doit être placée dans la *didinamie angioſpermie* de Linné, qu'elle tient & ſe rapproche beaucoup de la famille des bignognes par les quatre étamines qui ſont adhérentes à la corolle, dont deux ſont plus courtes, &

Digitized by Google

par la naiſſance d'une cinquième, qui n'eſt apparente que dans certaines fleurs; par ſes feuilles qui ſont ſurcompoſées comme dans pluſieurs eſpèces de bignognes; par ſes vrilles encore propres à pluſieurs bignognes; enfin par ſon fruit, les différentes loges qui le partagent, & par ſes ſemences ailées qui ſe recouvrent les unes les autres, & qui ſont enfermées dans une gouſſe, par conſéquent par des rapports tirés de ſes feuilles, de ſa fleur & de ſon fruit. Mais comme le genre des bignognes eſt nombreux, que la Nature ſemble avoir indiqué des diviſions, en ayant égard à la différence que préſentent leurs feuilles entières ou compoſées, leurs fleurs dont la corolle eſt plus ou moins campanulée, & diviſée plus ou moins régulièrement, les fruits plus ou moins longs, plus ou moins gros, la quantité des cloiſons qui les ſéparent; enfin, que les fruits des bignognes ſont unis ou épineux, on pourroit aiſément en faire autant de genres particuliers, ſur-tout ſi on fait attention aux cloiſons & au nombre des loges qui diviſent les fruits. En ſe ſervant de ces différences, ce ſeroit un moyen aiſé pour former des diviſions dans ce genre des bignognes déjà nombreux.

Nous croyons voir dans la plante que nous décrivons, un caractère qui lui eſt propre, puiſque ſa corolle, au lieu d'être campanulée, eſt formée en un tuyau long & renflé irrégulièrement, qui ſe termine, comme dans certaines labiées, par une toque ou capuchon obtus; enfin puiſque la cloiſon à quatre ailes qui ſépare ſon fruit, n'eſt commune à cette plante avec aucune des eſpèces de bignognes déjà décrites.

Il convient donc d'en faire un genre particulier. Ayant appris que M. Dombey avoit adreſſé à M. de Juſſieu, des fruits de cette même plante & l'avoit nommée; en reſpectant les intentions de ce zélé Botaniſte, & une perſonne connue avantageuſement des Savans, je nommerai la plante dont il eſt queſtion,

La Tourretia *caule volubili quadrangulari, cyrrhoſo, foliis plerumque trifidis, foliolis dentatis, fructu hiſpido, xanthii ſeu lappæ minori ferè ſimili.* Act. Reg. Par.

Digitized by Google

Explication de la Planche qui repréſente la Tourretia.

Fig. 1. Les feuilles ſeminales qui durent & perſiſtent quelque temps.

Fig. 2. La plante.

a, la feuille avec ſon pédicule qui ſe diviſe en trois folioles, ayant chacune ſon pedicule; une des dentelures de la foliole qui s'alonge, & forme quatre ou cinq folioles, au lieu de trois.

b, les vrilles qui ſont elles-mêmes ſurcompoſées, le crochet qui termine chaque vrille.

c, l'épi de fleurs qui ſort ſouvent de la bifurcation des tiges, & à ces endroits où les tiges de la plante forment un renflement. A l'extémité ſupérieure de l'épi de fleurs, il y a ſouvent cinq ou ſix fleurs incomplètes,

d, & compoſées d'un ſeul calice coloré, ſans pétale.

Fig. 3. La fleur avec tous ſes détails.

e, le bouton de la fleur.

f, la fleur vue de côté avec ſon calice.

g, la fleur vue en face.

h, le calice ouvert.

i, le calice dans lequel on voit l'embryon.

k, l'embryon avec ſon ſtil.

l, la corolle ouverte & les quatre étamines.

m, une étamine ſéparée.

n, le jeune fruit toujours accompagné, dans le jeune âge, de deux ſtipules ou bractées.

Fig. 4. Le fruit en ſon état de maturité.

Fig. 5. Le fruit coupé tranſverſalement où l'on voit les quatre loges formées par les cloiſons, & le brou qui les enveloppe.

Fig. 6. Les graines attachées aux cloiſons.

o, la graine ſéparée & ailée.

p, une de ces pointes ou crochets qui garniſſent le deſſus du fruit.

Digitized by Google

J. le vicomte sculp.

Digitized by Google

Digitized by Google

MÉMOIRE

SUR L'ABRICOTIER DE SIBÉRIE.

Par M. FOUGEROUX DE BONDAROY.

Lû le 3 Août 1785.

LE travail que j'ai entrepris depuis plus de dix ans, pour donner une nouvelle édition du Traité des arbres & arbuſtes, publié par M. du Hamel-du-Monceau, en 1755, m'a obligé de revoir en même temps certains arbres fruitiers, & en particulier l'eſpèce d'abricotier de Sibérie dont je vais parler.

Quoique la ſéparation entre les abricotiers, amandiers, pêchers, & les pruniers, ſoit difficile à fixer; cependant M. du Hamel, en traitant des abricotiers, les a diſtingués avec raiſon des pruniers, puiſque, ſans changer des dénominations reçues vulgairement, la fleur & les fruits de l'abricotier ſont ſeſſiles, l'ovaire & le fruit velus, le noyau ovale, uni, renflé, &c. le temps de la maturité, différent & plus prématuré, ſont des caractères ſuffiſans pour les différencier des pruniers.

M. du Hamel, dans ſon Traité des arbres & arbuſtes, a donné à l'abricotier de Sibérie, la phraſe d'Amman, *armeniaca betulæ folio & facie, fructu exſucco;* Amman, *Ruth.* & en a parlé dans ſon Traité des bons fruits, ſous le nom d'*abricot noir; tome I, page 142.*

M. Pallas, dans ſon premier volume, 1.ere partie des plantes Ruſſes, donne ſous le nom de *prunus Sibirica*, la deſcription & la figure de cet abricotier; il y indique auſſi la couleur de ſon fruit, d'un rouge-noir, & donne tous les détails concernant ſon bois, ſa feuille & ſes fleurs, *tab. VIII, page 15.*

En 1757, M. du Hamel ignoroit d'où lui étoit venu cet arbre qu'il cultivoit; mais d'après la deſcription qu'en

Digitized by Google

a donnée dernièrement M. Pallas, celles qu'on avoit de Gmelin & d'Amman, je crois ne pouvoir plus douter que ſon lieu originaire ne ſoit la Sibérie.

Linné, qui a compris l'abricotier & le pêcher dans le genre des pruniers, regarde avec raiſon cet arbre de Sibérie, comme devant former une eſpèce, puiſqu'il varie peu par ſes ſemences. Jamais il ne devient un ſi gros arbre ni ſi élevé que l'abricotier commun; cependant il pouſſe des jets longs & grêles, ſouvent terminés par une pointe dure. Sa feuille eſt ovale, alongée, & finit par un prolongement très-aigu; elle eſt dentée finement, d'un vert-foncé en-deſſus, ſoutenue par des pétioles longs, & reſſemblant par-là aux feuilles de bouleau auxquelles on l'a comparée avec aſſez de juſtice. Les fruits de celui que nous poſſédons, ſont attachés à un très-court pédicule, en quoi il diffère principalement du premier, & ne deviennent pas plus gros qu'une prune de damas: ils ſont arrondis, ayant leurs diamètres à peu-près égaux, & de dix-huit lignes environ; l'œil eſt peu enfoncé. Ce fruit eſt couvert d'un duvet léger & fin; ſa couleur eſt violette très-foncée, preſque noire, & ſa chair uniformément pourpre; ſa peau & ſa chair ſont colorées de la même manière du côté du ſoleil & de la muraille, s'il eſt en eſpalier; le noyau eſt liſſe & bombé, figuré en cœur comme celui de l'abricotier, étant plus renflé ſur un côté qu'il ne l'eſt ſur l'autre: celui aplati porte une arête principale, & à côté de celle-là deux autres moins marquées; elles ſont ſemblables à ce qu'on remarque ſur les noyaux d'abricots: celui de Sibérie en diffère ſeulement par un ſillon qui ſe voit ſur le côté oppoſé à l'arête, & qui eſt renflé, par-là il ſe rapproche de la prune; mais on ſait que ce ſillon ſe trouve auſſi ſur quelques eſpèces d'abricot, que ſur d'autres, c'eſt un véritable tuyau, dans lequel on peut paſſer un crin ou fil de laiton fin; que d'ailleurs il manque à quelques eſpèces de prunes. Quoique ce ſillon ſoit apparent ſur toute la longueur du noyau, dans le fruit

que

que nous examinons, on ne peut disconvenir qu'il tient plus, par sa forme, du noyau d'abricot que de celui de la prune: son amande est légèrement amère; il mûrit avec les abricots, à la fin de Juillet ou au commencement d'Août; son eau est sucrée, mais a peu de goût. Amman & Pallas donnent ce fruit comme n'ayant aucune saveur, mais la culture peut avoir corrigé celle naturelle à l'arbre sylvestre: il faut cependant convenir qu'il ne mérite d'être placé dans nos vergers, que par la singulière couleur de son fruit.

Ces descriptions de la feuille & du fruit ayant la plus grande conformité avec celles données par Amman, Gmelin, Linné & Pallas, je crois qu'il n'y a pas lieu de douter que l'arbre que je viens de décrire, ne soit originaire de la Sibérie, & que c'est celui qui y croît dans des lieux montagneux & entre des rochers.

M. Pallas ajoute que « peut-être ce prunier de Sibérie n'est-il qu'une simple variété du prunier-abricotier que le changement de climat & de position a fait dégénérer; « c'est ce que la culture dans les jardins fera connoître par « la suite ». Nous avons déjà dit que cet abricotier se régénère par les semences, ainsi ce seroit une espèce; d'ailleurs, ne semble-t-il pas qu'on dût retrouver la première Nature dans les climats & contrées de la Sibérie, où la main de l'homme n'auroit encore produit aucun changement? S'il est assez constant que l'abricotier que nous cultivons, a été transporté de la Perse dans l'Arménie & en Grèce * pourquoi les parties les plus septentrionales de notre globe n'auroient-elles pas aussi une espèce d'abricot? ce qui devient confirmé par le fait que nous venons de rapporter.

J'ajoute ici la synonimie de cet arbre.

Prunus inermis, foliis ovato-cordatis, longè mucronatis, fructibus excussis. Gmelin, flor. Sib. III, pag. 172.

* *Voyez* le voyage de M. Pockocke, pour l'abricot de damas: & le voyage de M. Otter, pour ceux d'Alep & d'Aintab.

Prunus floribus ſeſſilibus, foliis ovato-oblongis. Linné, ſyſt. II, pag. 486, n.° 8.

Armeniaca betulæ folio & facie, fructu exſucco. Amman, Stirp. Ruth. p. 192, n.° 272, tab. XXX. Du Hamel, arb. & arb. tom. I, pag. 74.

Prunus inermis, foliis ovato-cordatis, longè mucronatis, fructibus exſuccis (ſeſſilibus), Pallas, plant. Roſ. 1.ª pars, tom. I, pag. 15, tab. VIII.

Digitized by Google

MÉMOIRE
SUR UNE
NOUVELLE ESPÈCE D'ORME.

Par M. FOUGEROUX DE BONDAROY.

Présenté le 1.er Sept. 1784.

PARMI plusieurs grands arbres qui par différentes émigrations garnissent maintenant nos forêts, nos bois & nos plantations, & qu'on a associés avec le chêne qui couvroit uniquement l'ancienne Gaule, nous pouvons citer l'orme comme étant une des acquisitions des plus utiles & qui nous procure le plus de diverses jouissances.

Nous possédons l'orme depuis long-temps en France; il est indigène dans quelques parties de l'Europe, il se trouve aussi naturellement dans quelque parties de l'Asie; plusieurs variétés semblables aux nôtres sont aussi en Canada & dans l'Amérique septentrionale.

Depuis peu, en France, on cultive une espèce d'orme provenant de la Floride, & elle n'est nullement sensible aux fortes gelées; enfin l'on cultive un orme nain qu'on croit avoir été tiré du Japon, mais celui-là souffre des gelées, & demande des protections contre les froids rigoureux.

M. du Hamel, dans son *Traité des Arbres & Arbustes*, nous donne les phrases de dix ormes, mais dans ce nombre, il n'a pas prétendu, quoique sous le titre d'espèces, n'y avoir pas réuni plusieurs variétés. Il ne connoissoit pas, en 1757, les deux espèces étrangères, celles de la Floride & du Japon. Nous devons la description de ces deux-ci à M. Richard, qui maintenant, à Cayenne, travaille à reculer les limites de nos connoissances en Botanique.

J'aurois tort de prétendre avoir introduit en France une nouvelle espèce d'orme, puisqu'elle y existoit depuis

Digitized by Google

long-temps ; mais comment, après les Tournefort, Vaillant, & les Juſſieux, eſt-il reſté un arbre différent de preſque toutes les eſpèces de ce genre, ſans qu'ils l'aient fait connoître ? Admirateur de leur zèle & de leurs talens, c'eſt un haſard s'il m'eſt reſté à glaner après de pareils maîtres, auſſi attentifs à récolter en matière de Sciences.

L'orme commun ſe plaît dans notre climat, il végète dans des terres qui ont peu de fond quand la terre de la ſuperficie eſt végétative, ſes racines s'étendent au loin & vont chercher la nourriture qui lui eſt néceſſaire : le chêne périroit où l'orme ſubſiſte. Mais quand il eſt placé dans une terre fertile qui a du fond, il pivote & en peu de temps s'élève, & quoiqu'étant planté proche d'autres ormes il acquiert de la groſſeur ; les progrès de cet arbre ſont encore plus rapides lorſqu'il eſt placé dans un fond frais & un peu humide.

Perſonne n'ignore l'utilité & les grands avantages qu'on retire de l'orme que nous cultivons, & dont quelques eſpèces ou variétés ſont préférées à juſte titre ; les Charrons emploient beaucoup d'ormes, ils en font ſur-tout les moyeux des roues & les jantes, &c. c'eſt avec l'orme qu'on fait la preſſe des preſſoirs, certaines parties des moulins à eau & à vent, &c. & on achette de préférence, pour les moyeux & les jantes, l'orme appelé *tortillard*.

Avant de parler encore de la nouvelle eſpèce d'orme découverte, il convient de rapeler les caractères propres au genre, & de ne citer que les différences qui caractériſent l'eſpèce dont nous parlons.

La fleur, dans le genre de l'orme, eſt compoſée d'un calice plus ou moins découpé, mais d'une ſeule pièce preſque toujours colorée en rouge ; ce calice qui perſiſte juſqu'à la maturité du fruit, porte depuis quatre juſqu'à cinq & même ſix étamines du double plus longues que le calice ; il eſt donc difficile de donner à ce genre une place dans la méthode du célèbre Linné, puiſqu'elle devroit être réglée ſur ce nombre d'étamines.

Digitized by Google

Mais ce qui déroute encore celui qui cherche dans cette même méthode une place assignée au genre de l'orme, c'est que sur le même arbre il se trouve des fleurs à étamines, d'autres hermaphrodites, & que certains individus ont plus ou moins de l'une ou de l'autre de ces fleurs; l'espèce d'orme qu'on nomme *tortillard*, & qui est principalement recherchée par les Charrons, est très-sujette à donner des graines stériles, ou à n'en point produire, parce que des individus souvent ne portent que des fleurs incomplètes.

Ces fleurs naissent par petits paquets, elles sont sessiles, & il leur succède des capsules membraneuses, aussi sessiles, au milieu desquelles on voit une loge qui contient une seule semence: la forme de la capsule est un ovoïde soutenu à la branche par son petit diamètre, & chacun de ses côtés est arrondi; l'extrémité opposée à celle de son pédicule, est échancrée en forme de cœur.

A l'espèce nouvelle que je fais connoître aujourd'hui, la fleur varie aussi dans le nombre de ses étamines qui en contient depuis quatre jusqu'à six. Le calice ne diffère des autres espèces d'ormes qu'en ce que le calice de celles connues est campanulé, & le fond, dans l'espèce que je décris, est très-pointu; d'ailleurs ce qui lui sert de différence & la caractérise, c'est que, dans cette espèce, la fleur est soutenue par un long pédicule, & n'est pas sessile comme dans la plupart des espèces décrites.

Le fruit soutenu aussi par ce même pédicule fort alongé, a la forme d'un ovoïde dont le grand axe porte par une de ces extrémités dans le calice, & l'autre extrémité très-pointue, est fendue, & séparée jusque vers la loge qui renferme la semence; enfin le pédicule & le fruit sont garnis de poils ou filets blancs & soyeux qui les rendent comme velus: ces parties, en mûrissant, changent peu de couleur & conservent en grande partie la teinte verte qu'elles avoient sur l'arbre.

La feuille de cet arbre est grande, large; on y remarque

Digitized by Google

auſſi, comme dans beaucoup d'autres ormes, qu'un côté de la feuille ſe prolonge plus que l'autre côté ſur la nervure principale intermédiaire & longitudinale. Enfin, elle ſe diſtingue difficilement des ormes à grandes feuilles, & qu'on a nommés mal-à-propos *ormes femelles.*

L'écorce me paroît raboteuſe, & aſſez approchante auſſi de celle de l'orme femelle, ſans y pouvoir remarquer ces ſillons tortueux, comme on les diſtingue dans l'orme tortillard; variété de l'orme femelle.

Le tronc, quoique l'arbre s'élève & ait un beau port, ſes branches s'étendant, devient fort gros: je ne puis parler de la qualité de ſon bois, ne m'étant pas trouvé à portée d'en faire débiter.

J'ai dit que pluſieurs ormes, quoique grainant beaucoup, ne donnoient que des ſemences infructueuſes: je ſoupçonne que quelques parties de la fructification ſont viciées ou incomplètes dans ces individus, & que l'orme dont nous parlons a ce défaut, car la plupart des capſules ſont dépourvues de graines, & je n'ai pu encore parvenir à le faire lever de graines; mais d'autres perſonnes ont été plus heureuſes, & d'ailleurs on peut ſe le procurer par le ſecours de la greffe.

On voit donc que je ne puis pas aſſurer que cet orme forme une eſpèce, mais les différences dans certaines parties de ſa fructification me le font conjecturer avec quelque eſpèce de certitude.

J'ai découvert cet orme premièrement au jardin de l'Arſenal de Paris; & depuis que je l'ai eu fait remarquer à différentes perſonnes, on s'eſt aſſuré qu'il ſe trouve encore dans pluſieurs autres endroits de la France.

Je dois ajouter qu'ayant eu à ma diſpoſition un catalogue de quelques arbres indigènes à la Ruſſie & à la Siberie, & y ayant quelques planches gravées de ces arbres, j'y ai vu l'orme que je cite avec les longs pédicules qui ſoutiennent ſes fleurs & ſes fruits, & qu'on y donne cet arbre comme étant l'eſpèce d'orme la plus commune en Sibérie, & d'un uſage très-avantageux pour les Arts.

Digitized by Google

ULMUS PEDUNCULATA

Mem. de l'Acad. R. des Sc. An. 1784. Pag. 214. t.

Digitized by Google

Digitized by Google

Il ſeroit difficile, comme je l'ai dit, de fixer le temps où l'orme a commencé à être introduit en France; nous ſavons ſeulement que du temps de François I.er il n'y en avoit preſque point en France: il ſeroit plus incertain encore de déterminer le pays d'où on l'a tiré; ſerions-nous redevables de cette eſpèce à la Ruſſie ou à la Siberie?

On pourroit déſigner cet orme ſous le nom trivial d'*ulmus pedunculata*, & ſous cette phraſe.

Ulmus foliis ovato-acuminatis duplicato-ſerratis baſi inæqualibus, fructu viridi bicorne villoſo, pedunculo filiforme longo, membranâ ſeminali ſubtiliſſimè reticulatâ. Act. R. Pariſ. 1784*.

* Depuis la lecture de ce Mémoire, M. Pallas a publié la première partie des plantes de la Ruſſie; il y annonce que l'*ulmus pedunculata* eſt l'orme le plus commun en Ruſſie, & le nomme *ulmus lævis*: il a fait graver ſa graine, & y décrit notre orme à fruit ſeſſile, comme étant l'orme le moins généralement répandu; ainſi cela confirmeroit ce que j'ai dit plus haut, que nous pourrions devoir cet orme à la Ruſſie ou à la Siberie.

Digitized by Google

DESCRIPTION

D'un Poiſſon du genre des Silures, appelé Shaid *ou* Shaiden *par les Allemands.*

Par M. FOUGEROUX DE BONDAROY.

Lû le 28 Juillet 1784.

M. BROUSSONET (maintenant de cette Académie) lut à l'Académie, le 14 Juillet 1784, un Mémoire ſur un Silure ou anguille tremblante, comparable au *gimnotus* annoncé par M. Adanſon, &c; & voyant une grande conformité entre le poiſſon qu'il décrivoit, & le shaid des Allemands, j'ai cru devoir faire part à la Compagnie, de ce que j'avois écrit ſur ce poiſſon.

Le shaid entre dans la claſſe ou ſection des poiſſons anguilliformes, & ſera partie de la ſuite au traité des Pêches, commencé par feu M. du Hamel-du-Monceau, & à laquelle je travaille.

Le shaid ou shaiden, ſchadem, welſs des Allemands, eſt le poiſſon décrit par Geſner, ſous le nom de *ſilurus (page 1047)*, ainſi que par Willughby *(page 128, tab. H 5;* c'eſt le *glanis ſalviani (page 210)* & d'Aldrovande; le *ſilurus glanis* de Linné, le *ſum harcha* ou *acchia* des Polonois, & le *sheat fish* des Anglois, le *glagno* à Conſtantinople, & enfin le *glanis*, eſpèce de ſilure, de Pline.

Bélon, après avoir parlé de l'eſturgeon, & du poiſſon *ictio colle hanſen ploſen*, cite le *ſilurus*, & ſemble avoir voulu parler du shaid, en annonçant un poiſſon d'eau douce qu'on vend journellement au marché de Conſtantinople, que le vulgaire nomme *glagnon*, & qui, ſuivant Bélon, eſt le vrai ſilure des Anciens.

Il paroît encore que les Auteurs ont reconnu pluſieurs eſpèces de ſilures; celui que nous décrivons eſt celui d'Artedy, *cirris quatuor in mento*, appendix 110. Ce poiſſon n'ayant

n'ayant été décrit qu'imparfaitement par les Ichtyologiſtes, & la figure qu'ils en ont donnée étant encore plus incomplète, j'ai cru devoir profiter d'un de ces poiſſons, envoyé par M. de Regemorte à M. du Hamel, pour le faire deſſiner; & comparant ce que les auteurs déjà cités en avoient dit, avec le poiſſon que j'avois ſous les yeux, ajouter ce qui manquoit à leur deſcription & aux gravures qu'ils en ont données *(a)*. Les Anciens ne ſuivoient aucune méthode, & omettoient de décrire dans les poiſſons, les parties caractériſtiques qui pourroient ſervir maintenant à faire connoître ceux qu'ils n'ont qu'indiqués. Les Ichtyologiſtes plus modernes ſont, je crois, encore trop concis, & nous laiſſent des deſcriptions imparfaites, de ſorte qu'en poiſſons, comme en plantes, nous ſommes ſujets à ſéparer des eſpèces ou variétés, au lieu de les rapporter aux genres & eſpèces connus: d'ailleurs, la plupart des figures laiſſées par les Ichtyologiſtes, ſont bien imparfaites; tâchons donc qu'on ne puiſſe pas nous faire les mêmes reproches.

Suivant Willughby, le ſhaid ou *ſilurus* a quelquefois quinze, ſeize pieds, & beaucoup plus de longueur: on en a vu, d'après les auteurs qui en ont parlé, qui peſoient 80, 120, 150 livres & plus. Il ſe trouve dans l'Elbe en Hongrie, dans le lac Newſilderſée, dans le Danube, principalement au-deſſous d'Offen, à quelque diſtance de Vienne, en ſorte qu'il fournit abondamment le marché de cette capitale; fort rarement en pêche-t-on depuis Offen en remontant vers Vienne: on en trouve auſſi dans la Viſtule. Geſner dit que quelques lacs de Suiſſe en fourniſſoient de ſon temps, mais on prétend qu'il ne s'y en trouve plus un ſeul. Il y a auſſi en Bavière, un lac où l'on y en prend quelquefois. On en a auſſi pêché dans

(a) Depuis la lecture de ce Mémoire à l'Académie, j'ai ſu que ce poiſſon étoit décrit dans les Mémoires de l'Académie de Stockolm, *année 1756, tab. III, pag. 34*, par M. Oſbeck, & dans le douzième volume des Mémoires de l'Académie de Copenhague, *figures 1 & 2, page 132*, ſous le nom de *Mallen*.

le Rhin en différens temps, & nommément trois vers l'année 1740. Bélon dit qu'on l'apporte à Conſtantinople, des prochains fleuves & des lacs de Macédoine.

Celui que nous avons eu entre les mains (en 1769), & dont nous allons donner la deſcription, venoit de Vienne en Autriche: ſa longueur depuis l'extrémité du muſeau *A*, juſqu'au bout de l'aileron de la queue *B*, étoit de deux pieds & demi; ſa plus grande largeur, très-charnue à l'endroit *(C)* des ouïes ou branchies, étoit de quatre pouces & demi.

La forme de ce poiſſon, conſidérée généralement, va en diminuant avec uniformité depuis les branchies juſqu'à la queue, en s'aplatiſſant un peu ſur les côtés; cet aplatiſſement devient conſidérable à l'endroit où eſt ſitué l'anus, & il continue de même juſqu'à la queue.

On ne trouve d'écailles très-apparentes *(b)* en aucune partie de la peau; elle eſt viſqueuſe & couverte d'une mucoſité, à peu-près comme la peau de l'anguille: cette ſimilitude, plutôt que la forme du corps du poiſſon, a engagé les Ichtyologiſtes à le ranger dans la claſſe des anguilliformes *(de piſcibus anguilliformibus)*. Bélon dit que ſa peau eſt liſſe & polie, ſans écailles comme l'anguille; que par cette raiſon, les Juifs s'en abſtiennent comme nourriture; qu'on ſe ſert de la peau de ce poiſſon pour en couvrir les inſtrumens, comme luth & guitare: cette peau eſt médiocrement épaiſſe, néanmoins plus en certains endroits que dans d'autres; elle revêt en général, ſans diſcontinuité, tout le corps, les ailerons, &c. mais ſa couleur varie. Dans le poiſſon qui nous a ſervi à faire cette deſcription, le corps étoit marbré de taches plus ou moins grandes, & de différentes formes, les unes rouges, les autres bleuâtres, jaunes, pâles ou brunes; le deſſous de la mâchoire & du ventre étoit blanc avec des

(b) Je ne voudrois pas aſſurer ſi avec attention on n'en découvriroit pas comme à l'anguille.

Digitized by Google

teintes rouges. Willughby ne parle que d'un mélange de ſillons noirs & blanchâtres ſur le ventre & ſur les côtés; les ſillons du nôtre étoient peu profonds & tracés ſur le dos & les côtés, non ſur le ventre, ſuivant diverſes directions, mais toujours de la tête vers l'extrémité oppoſée, indépendamment des ſillons ſuperficiels & parallèles qu'on apercevoit ſur le travers du poiſſon, où ils étoient produits, ſur-tout par les appendices latérales de la grande arête.

Geſner, qui diſtingue pluſieurs eſpèces de ce poiſſon, y obſerve des variétés de couleurs encore différentes de celle que nous citons : au reſte, on peut dire avec Willughby, qu'il y a beaucoup de poiſſons dont la couleur varie à raiſon de l'âge, du ſexe, & du lieu où ils vivent; de plus, certaines couleurs s'affoibliſſent beaucoup & promptement au ſortir de l'eau. La tête eſt large & aplatie en deſſus, à ſa partie antérieure, comme on le voit en *E, F, figure 2*, dans ce poiſſon dont la longueur totale étoit de deux pieds & demi; le travers de la bouche *E, F*, avoit trois pouces & demi d'un angle à l'autre, & le pourtour de ſon ouverture preſque onze pouces. Les lèvres ſont épaiſſes d'environ deux lignes & demie en tout ſens, ſuivant le contour des mâchoires : l'épaiſſeur de la partie garnie de dents à chaque mâchoire, eſt de quatre à cinq lignes, *G, figures 1 & 3*; ces mâchoires forment un demi-ovale, mais celle d'en bas eſt de trois quarts de pouce plus avancée que l'autre; toutes deux ſont diviſées au milieu de leur longueur par une ſymphiſe *G*, & entièrement garnies d'une multitude de dents courtes, fines, aiguës, fort ſerrées, & un peu inclinées vers le dedans de la bouche. À peu de diſtance de la mâchoire ſupérieure, on trouve au palais une zone de ſix lignes de largeur, en demi-cercle, formée de pareilles dents, mais qui ſont plus courtes. On aperçoit encore au fond du palais de chaque côté, une maſſe oſſeuſe, arrondie, ſaillante, longue d'environ un pouce, toute hériſſée de dents ſemblables à celles des mâchoires,

mais bien plus courtes & plus ſerrées; & ſur les mâchoires inférieures, au-deſſous de ces maſſes, ſont deux autres garnitures pareilles qui ont une forme rhomboïdale d'environ un pouce & demi de longueur : toutes ces parties dentées, qu'on peut comparer en quelque ſorte à des limes, ſont d'une couleur jaunâtre qui contraſte ſenſiblement avec le blanc de l'intérieur de la bouche.

Aſſez près du bord de la lèvre ſupérieure, & à un pouce de l'articulation des os de la mâchoire, eſt de chaque côté un filet cartilagineux *H*, ferme, brun, long de ſept pouces, & terminé en pointe fine: la diſſection nous a fait voir que cette eſpèce de mouſtache, dont nous ignorons le vrai uſage, eſt mue par un nerf contigu au nerf optique, & par un muſcle très-fort; qu'elle eſt articulée à ſa baſe avec un nœud oſſeux qui lui donne un mouvement de genou. Benoît-Martin de Berne dit que ces fibres ſont des antennes, & que le poiſſon les projette en avant, comme pour tâter les objets.

En ſuivant le bord de la mâchoire ſupérieure, & avançant vers le milieu, un demi-pouce plus haut que l'inſertion de ces fibres, on aperçoit de chaque côté une petite ouverture *I*, garnie d'un tuyau qui y fait une ſaillie d'environ une ligne de longueur; ce trou communique par un canal intérieur, large & oſſeux, avec une autre ouverture moins apparente faite en fente, placée ſur la même ligne, à un pouce au-deſſus, & qui ne devient bien ſenſible que quand on a ſoulevé la membrane qui la couvre en partie.

Immédiatement derrière les mouſtaches, à un pouce de diſtance, ſont les yeux *K*; ils n'ont que trois lignes d'ouverture, ſont très-peu ſaillans, & revêtus d'une membrane épaiſſe. Deux os embraſſent chaque œil, un de ces os, à peu-près demi-circulaire, aſſez large, contigu au crâne, & ſaillant, en environne la partie antérieure; l'autre lui eſt oppoſé, mais a une forme approchante de celle des ailerons; il eſt étroit, en courbe alongée dans ſa

Digitized by Google

plus grande largeur, puis il ſe prolonge en ligne droite, & ſe termine en pointe par le haut ; il eſt logé entièrement dans la peau des joues.

Ce que nous appelons *joues*, ſont des parties fort charnues *L*, *fig. 1*, qui accompagnent l'œil, & dont la poſition ſe termine au bord de l'opercule des ouïes : cet opercule *M*, commençoit à trois pouces & demi de la lèvre ſupérieure dans ce poiſſon, & il avoit en cet endroit une articulation. Depuis-là, toute la largeur de l'opercule, ſur les côtés, n'étoit que d'un pouce & demi ; après avoir fait le tour de la tête, il s'étendoit juſque ſous la gorge, & les deux opercules ſe réuniſſoient en pointe, *N*, *fig. 4*, à deux pouces du bord antérieur de la lèvre. La partie oſſeuſe formoit tout au plus la moitié de cette largeur, le reſte étoit rempli par une ſubſtance charnue & pliſſée, dans laquelle étoient enclavées & fixées des arêtes fines & oſſeuſes. Sous chaque opercule ſont quatre branchies, dont les os ſont très-forts ; les deux de devant ont chacun, ſur un ſeul rang, une douzaine de petits oſſelets mobiles, pointus, & diſtans les uns des autres. Il y a ſur chacun des deux os poſtérieurs deux rangées parallèles de dents moins conſidérables & plus ſerrées ; ſes filets oſſeux & colorés ne forment qu'un ſeul plan de cinq à ſix lignes de largeur au bord de chaque os ; mais le plan eſt double à la partie poſtérieure.

A la mâchoire inférieure, ſont adhérens quatre filets *O*, *fig. 1*, *3* & *4*, cartilagineux, aſſez mous, blancs avec une légère teinte de rouge, longs d'un pouce & demi ou deux pouces, ſitués à treize ou quatorze lignes du bord de la lèvre, ſuivant aſſez le contour de la mâchoire, & eſpacés entr'eux de treize à quatorze lignes.

Geſner & pluſieurs autres Auteurs diſent que les ſix filets dont nous avons parlé, qui garniſſent la mâchoire ſupérieure & celle inférieure, tombent tous les ans, & qu'ils ſont remplacés par de nouveaux. Sur la même ligne que l'angle de la bouche, à trois pouces & demi en arrière,

Digitized by Google

ſous le bord de l'opercule des ouïes, eſt une nageoire, *P*, aſſez large, arrondie par le bas, compoſée de ſeize rayons cartilagineux, dont le plus grand a trois pouces de longueur, & les autres ſont graduellement plus courts, ſelon la forme de l'arrondiſſement qui les termine. Outre ces ſeize rayons, il y en a, ſur le bord antérieur, un autre *Q*, tout-à-fait oſſeux, très-fort, large de quatre lignes à ſa baſe, pointu, long de deux pouces & qui, n'ayant point ſenſiblement d'articulation ſéparée, eſt couvert de la même membrane que les autres rayons. Willughby obſerve, avec Kintmannus, que ce rayon oſſeux ſert d'arme défenſive au shaid, & qu'il eſt denté en ſcie à ſa partie poſtérieure. Nous convenons de cette denture qui n'eſt ſenſible que vers le bas; mais comme le rayon oſſeux eſt couvert de la membrane commune de toute la nageoire, que ſa pointe ſeule l'excède, & qu'il ne paroît pas pouvoir s'allonger, nous ne ſommes pas dans le cas de déterminer en aucune manière l'uſage de cette denture ainſi enfermée de la longueur d'environ un pouce.

Environ à onze pouces du bord antérieur de la mâchoire d'en bas, ſont deux ailerons *R*, preſque contigus, parallèles & entièrement cartilagineux; chacun compoſé de onze rayons qui ſe terminent en arrondiſſement, & dont le plus long a un pouce & demi. La plus grande largeur de ces ailerons eſt de quinze lignes.

Ils ſont ſitués un pouce en devant de l'anus *D*, au-deſſous duquel commence un grand aileron *SS*, dont les rayons ſont au nombre de quatre-vingt-dix. Il s'étend ſur une longueur d'environ dix-huit pouces, & ſe termine en s'arrondiſſant à-peu-près au milieu *T*, de la longueur de l'aileron de la queue; ſa largeur eſt de douze à treize lignes, & ſon arrondiſſement, à côté de la queue, fait comme un reſſaut bien ſenſible.

L'aileron de la queue *(B)* eſt entier, taillé obliquement, un peu frangé, formé de dix-ſept rayons cartilagineux & ſouples. La membrane qui le couvre eſt plus

Digitized by Google

épaiſſe que celle des autres ailerons; elle l'eſt ſur-tout au bord qui eſt une continuation du dos : comme il y a une coupe inclinée, ſon angle ſupérieur eſt à deux pouces cinq ou ſix lignes de l'articulation *(V)*, où cet aileron a un pouce & demi de largeur. Geſner paroît douter que cet aileron ſoit une continuité de celui du ventre. Willughby le nie poſitivement. A conſidérer ces deux ailerons en tant que recouverts en effet par une membrane commune, on pourroit n'admettre entr'eux aucune ſéparation; mais les rayons qui s'articulent au bas de la grande arête, ayant ſous cette même membrane une direction qui leur eſt propre depuis l'endroit où ſe termine l'arrondiſſement de l'aileron du ventre; & le concours de ces rayons formant autour du bord inférieur de la grande arête, un aileron comme dans la plupart des autres poiſſons, il ſemble qu'on peut très-bien diſtinguer cet aileron d'avec l'autre.

Sur le dos, à huit pouces du bord antérieur de la mâchoire d'en haut, eſt un ſeul aileron *(X)* dont le plus grand diamètre eſt de ſix à ſept lignes. Il eſt formé de trois rayons que l'on comprend devoir être écartés les uns des autres pour former cette étendue; le plus grand n'a qu'un pouce de largeur.

On ne trouve pas de langue dans ce poiſſon. Sur la voûte du palais, eſt un voile épais & tendineux qui n'a d'attache que par les côtés.

Nous avons dit que les opercules des ouïes alloient ſe réunir ſous le devant de la mâchoire inférieure. Quand on enlève la membrane qui tapiſſe par en-bas le dedans de la bouche, on trouve, à ce point de leur réunion, une loge charnue, dans laquelle eſt une oreillette ou aorte conſidérable, faite en poire, qui précède le cœur. Ce muſcle n'eſt pas échancré, il a une forme à peu-près priſmatique, foiblement convexe en deſſous, terminé en pointe par le bas, & taillé aſſez carrément à ſon extrémité

Digitized by Google

ſupérieure qui ne communique avec l'aorte que par un tuyau menu & court.

L'eſtomac commence au fond de la gorge; il eſt très-épais, long d'environ ſix pouces, large de trois pouces à ſon orifice ſupérieur, arrondi & un peu plus étroit par le fond. Le pylore ou orifice inférieur eſt ſitué plus bas que la moitié de la longueur totale : ce viſcère, liſſe & veiné par dehors, eſt intérieurement garni de rugoſités plus ou moins conſidérables, très-nombreuſes, & qui s'étendent en long ſur divers ſens, de manière qu'on aperçoit ſouvent une communication entr'elles.

Sur ce viſcère, eſt placé le foie diviſé en deux lobes conſidérables & inégaux, au milieu deſquels on trouve une petite veſſie qui contient du fiel, couleur de ſouci. La veſſie d'air eſt blanche, enveloppée d'une membrane brune & mince qui tient à la grande arête; mais on les ſépare auſſi facilement l'une de l'autre que le gant d'avec la main : cette veſſie eſt d'une ſubſtance forte & tendineuſe, longue d'environ ſix pouces, large de trois dans ſa partie moyenne, arrondie en bourſe ou ſac par le bas; telle étoit au moins celle de notre shaid. Nous n'y avons point vu cette diminution inſenſible en pointe, que Willughby attribue à cette veſſie, elle eſt ſéparée intérieurement de haut en bas par une forte cloiſon dont le bas ſe courbe en arc, & qui intercepte toute communication entre les deux loges.

Ce poiſſon n'a qu'une arête; elle règne depuis la tête juſqu'à la queue; ſes vertèbres ne ſont pas couvertes de mucilage comme celles de l'anguille, à la claſſe de laquelle Willughby rapporte le shaid; leurs apophyſes ou arêtes latérales ſont rangées parallèlement des deux côtés, aſſez droites, eſpacées à une ligne ou un peu plus. Il n'y a point de côtes courbes qui ſe prolongent pour enfermer les viſcères. Les apophyſes de ce côté-là ſont ſeulement plus courtes dans l'eſpace qu'occupent les viſcères; auſſi le ventre s'affaiſſe-t-il ſur lui-même, faute de ſoutien, dès qu'on

qu'on l'a vidé. Les œufs du shaid, que nous avons eus à la mi-Février, étoient très-menus, & raſſemblés en deux maiſes ovales terminées en pointe, longues de preſque trois pouces ſur un pouce de largeur.

Nous ne décrirons pas l'organe de l'ouïe de ce poiſſon; il nous ſuffira de dire qu'à l'extrémité du crâne, & près de la naiſſance des vertèbres, on trouve une loge à peu-près auſſi longue que large, qui renferme un mucilage, dans lequel ſont contenus ſéparément, l'un à droite, l'autre à gauche, deux oſſelets très-ſecs, nus, fort blancs, dont la forme approche de l'ovale, longs d'environ une ligne & demie, plats ſur leurs ſurfaces; mais il y en a une chargée d'un pareil os bombé, plus petit, moins blanc, & qui s'en détache par le moindre choc.

Ce poiſſon paſſe pour être des plus voraces, & en conſéquence à redouter parmi les autres poiſſons.

On le range au nombre des mets délicats. Le foie en eſt bon, les œufs ont une ſaveur fine, la peau qui eſt graſſe a un mérite particulier.

Nous l'avons mangé au bleu, ſuivant l'avis des connoiſſeurs qui nous l'avoient envoyé, mais une ſauce un peu relevée lui auroit ſervi de meilleur aſſaiſonnement; auſſi Willughby dit-il qu'on peut l'apprêter de toutes les mêmes manières que l'anguille.

Nous avons déjà prévenu qu'il y avoit pluſieurs eſpèces de Silure, & Geſner dit qu'il exiſte un poiſſon, connu ſous le nom de *blax*, qui lui reſſemble aſſez par la forme, mais qui eſt d'un ſi mauvais goût que les chiens ne veulent pas même en manger.

Tous les Auteurs s'accordent à donner une dimenſion & une peſanteur conſidérables à certains de ces poiſſons; c'eſt pour cela qu'on ne peut les vendre au marché qu'en les coupant par tranches ou morceaux: Geſner dit que le milieu du corps doit être préféré au reſte, comme étant plus ferme & moins fade.

Nous avons cité beaucoup d'endroits où l'on trouvoit

le shaid; il ſemble qu'il eſt devenu beaucoup plus rare qu'il ne l'étoit autrefois.

Le ſieur Diers, pêcheur diſtingué de Straſbourg, ayant entendu parler de ce poiſſon par ſon père, pêcheur comme lui, entreprit le voyage de Hongrie; & après avoir pris des inſtructions des Hongrois, il raſſembla quatre cents shaids de toutes grandeurs, convenables au tranſport, & les conduiſit, dans une baſcule, depuis Offen juſqu'à Ulen. Il les mit dans des tonneaux pour les mener par terre à Straſbourg. Aucun de ces poiſſons ne périt dans la baſcule; mais une douzaine des plus petits ne purent ſoutenir le charroi de terre. Depuis cette tentative, le même ſieur Diers entreprit de faire venir un ſecond convoi à-peu-près du même nombre, & de le faire arriver directement par terre, il a encore réuſſi; mais il a eu environ un tiers de perte, dont l'objet, du côté de l'intérêt, a été compenſé par la précaution de vendre en route ceux des poiſſons qu'il voyoit foiblir.

Dans les deux convois, ceux qui ſont arrivés à Straſbourg, ſe ſont très-bien ſoutenus, à la reſerve de cinq à ſix ſur chaque cent, & ont été vendus chèrement.

Le ſieur Diers avoit combiné la marche & les ſéjours; il les nourriſſoit de ces petits poiſſons communs auſſi dans la rivière de Seine, qu'on nomme *ables* ou *ablettes*, & dont on retire l'écaille qui recouvre la peau, pour en former la nacre des perles fauſſes. Il trouvoit à point nommé ou de ces ables, ou des petits poiſſons blancs pour la nourriture de ſes shaids, & des baſcules dans leſquelles il donnoit, en pleine eau, un jour de repos à ſon poiſſon après deux jours de marche. A Straſbourg, dans les baſcules, le ſieur Diers les nourriſſoit avec des ables écaillés, qui forment un commerce d'induſtrie pour ce pêcheur, qui, d'après ce qu'il a vu dans un de ſes voyages à Paris, a reconnu qu'il pouvoit trouver abondamment en Alſace, ce petit poiſſon propre à la fabrique des fauſſes perles; & il a établi une manufacture ou un dépôt de ces écailles

Digitized by Google

qu'il envoie à Paris, tandis que ſes shaids & ſes brochets mangent les poiſſons qui les ont fournies.

Je dois terminer cette deſcription, en ajoutant qu'un fond limoneux paroît mieux convenir à ce poiſſon que celui ſableux, & qu'il paſſe pour certain qu'il ne s'eſt jamais multiplié dans quelque lieu qu'il ait été tranſporté. Cependant le ſieur Diers ne déſeſpère pas, en lui trouvant une eau tranquille, & l'y laiſſant en liberté, de l'y voir frayer, & de réuſſir à le multiplier.

Ce poiſſon groſſit beaucoup & promptement, même dans les baſcules. On a reconnu qu'en neuf mois, ceux peſant dix-huit livres, en peſoient vingt-ſix; ceux d'une livre ont peſé trois livres après un an de ſéjour dans les baſcules. On a cru à propos de les tranſporter vivans pendant les chaleurs, c'eſt au mois de Juillet que le ſieur Diers les a fait voyager.

J'ai donné, d'après les Auteurs, 150, même 200 livres, comme l'excédant de peſanteur auquel peut parvenir ce poiſſon. Je dois cependant ajouter que la perſonne qui a fait, en Hongrie, l'acquiſition des shaids pour le ſieur Diers, aſſure qu'il s'y en trouve qui pèſent juſqu'à quatre cents livres, qu'on les coupe comme de la viande, & qu'on les vend par livre au marché.

EXPLICATION de la Planche repréſentant un Shaid, eſpèce de ſilure.

Fig. 1. Le poiſſon, vu de côté, & ſuivant ſa longueur.

A, muſeau.

B, la queue.

C, l'ouïe.

D, l'anus.

L, parties charnues auxquelles nous avons donné le nom de *joues*.

M, origine des opercules.

P, nageoire brachiale.

Q, rayon de cette nageoire, qui eſt oſſeux.

Digitized by Google

R, ailerons ventrals.

S, grand aileron qui prend depuis l'anus, & ſe prolonge juſqu'à l'aileron de la queue.

T, aileron de la queue.

V, articulation de cet aileron de la queue.

X, ſeul aileron du dos.

Fig. 2. *E E*, éminences charnues, que nous avons nommées *joues*.

F F, ouverture des mâchoires.

I, petite ouverture garnie d'un tuyau.

K, les yeux.

Fig. 3. *G*, lèvres qui bordent les mâchoires.

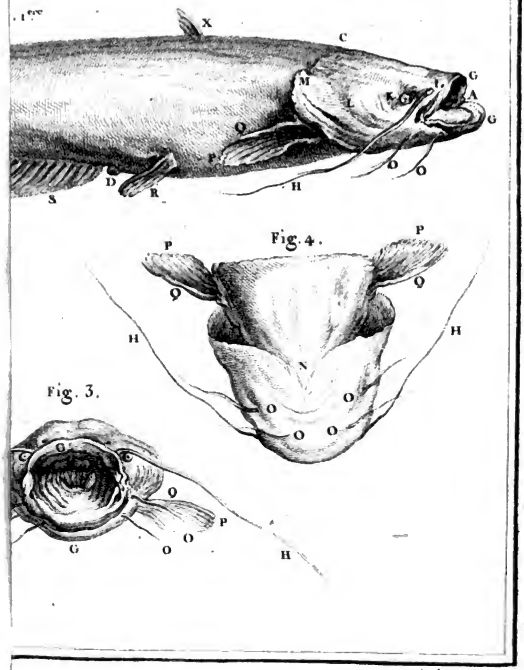
H, filet cartilagineux au bord de la lèvre ſupérieure, à un pouce de l'articulation des os de la mâchoire.

Fig. 4. *N*, réunion des opercules.

O, quatre filets cartilagineux & mous.

Digitized by Google

Mem. de l'Ac. R. des Sc. An. 1784. Pag. 228. Pl. III.



V. le Gouaz sculp

Digitized by Google

Digitized by Google

RECHERCHES

THÉORIQUES ET EXPÉRIMENTALES

Sur la force de torſion, & ſur l'élaſticité des fils de métal : Application de cette théorie à l'emploi des métaux dans les Arts & dans différentes expériences de Phyſique : Conſtruction de différentes balances de torſion, pour meſurer les plus petits degrés de force. Obſervations ſur les loix de l'élaſticité & de la cohérence.

Par M. COULOMB.

I.

Lû en 1784.

CE Mémoire a deux objets ; le premier, de déterminer la force élaſtique de torſion des fils de fer & de laiton, relativement à leur longueur, à leur groſſeur, & à leur degré de tenſion. J'avois déjà eu beſoin, dans un Mémoire ſur les Aiguilles aimantées, imprimé dans le *neuvième volume des Savans étrangers*, de déterminer la force de torſion des cheveux & des ſoies ; mais je ne m'étois point occupé des fils de métal, parce que l'objet utile à mes recherches, n'étoit pour lors que de choiſir, à forces égales, les ſuſpenſions les plus flexibles, & que j'avois trouvé que les fils de ſoie avoient incomparablement plus de flexibilité que les fils de métal. Le ſecond objet de ce Mémoire, eſt d'évaluer l'imperfection de la réaction élaſtique des fils de métal, & d'examiner quelles ſont les conſéquences que l'on en peut tirer, relativement aux loix de la cohérence & de l'élaſticité des corps.

Digitized by Google

II.

LA méthode pour déterminer la force de torſion, d'après l'expérience, conſiſte à ſuſpendre par un fil de métal, un poids cylindrique, de manière que ſon axe ſoit vertical ou dans la direction du fil de ſuſpenſion. Tant que le fil de ſuſpenſion ne ſera point tordu, le poids reſtera en repos; mais ſi l'on fait tourner ce poids autour de ſon axe, le fil ſe tordra, & fera effort pour ſe rétablir dans ſa ſituation naturelle; & pour lors l'on abandonne le poids, il oſcillera plus ou moins de temps, ſuivant que la réaction élaſtique de torſion ſera plus ou moins parfaite. Si dans ce genre d'expérience, l'on obſerve avec ſoin la durée d'un certain nombre d'oſcillations, il ſera facile de déterminer, par les formules du mouvement oſcillatoire, la force de réaction de torſion qui produit ces oſcillations. Ainſi, en faiſant varier la peſanteur du poids ſuſpendu, la longueur des fils de ſuſpenſion, & leur groſſeur, l'on peut eſpérer de déterminer les loix de la réaction de torſion, relativement à la tenſion, à la longueur, à la groſſeur, & à la nature de ces fils.

III.

SI le fil de métal étoit parfaitement élaſtique, ſi la réſiſtance de l'air n'altéroit pas l'amplitude des oſcillations, le poids ſoutenu par le fil de métal, une fois en mouvement, oſcilleroit juſqu'à ce qu'on l'arrêtât. La diminution des amplitudes des oſcillations ne peut donc être attribuée qu'à la réſiſtance de l'air, & qu'à l'imperfection de l'élaſticité de torſion; ainſi, en obſervant la diminution ſucceſſive de l'amplitude de chaque oſcillation, & en retranchant la partie de l'altération qu'il faut attribuer à la réſiſtance de l'air, l'on pourra, au moyen des formules du mouvement oſcillatoire, appliquées à ces expériences, déterminer ſuivant quelles loix cette force élaſtique de torſion eſt altérée.

Digitized by Google

IV.

Ce Mémoire ſera diviſé en deux ſections; dans la première, l'on déterminera la loi des forces de torſion, en ſuppoſant les forces de torſion proportionnelles à l'angle de torſion, ſuppoſition conforme à l'expérience, lorſque l'on ne donne pas une trop grande amplitude à l'angle de torſion: l'on donnera quelques applications de cette théorie à la pratique.

Dans la ſeconde ſection, l'on cherchera, par l'expérience, ſuivant quelles loix la force élaſtique de torſion eſt altérée dans les grandes oſcillations: l'on fera uſage de cette recherche pour déterminer les loix de la cohérence & de l'élaſticité des métaux & de tous les corps ſolides.

V.

Section première.

Formules du mouvement oſcillatoire, en ſuppoſant la réaction de la force de torſion proportionnelle à l'angle de torſion, ou altérée par un terme très-petit.

Un corps cylindrique B (*fig. 1, n.° 1*) eſt ſoutenu par un fil RC, de manière que l'axe du cylindre eſt vertical, ou ſe trouve dans la prolongation du fil de ſuſpenſion; l'on fait tourner ce cylindre autour de ſon axe, ſans déranger cet axe de ſon à-plomb: il faut déterminer, dans la ſuppoſition des forces de torſion proportionnelles à l'angle de torſion, les formules du mouvement oſcillatoire.

Le *n.° 2*, *fig. 1*, repréſente une ſection horizontale du cylindre; tous les élémens du cylindre ſont projetés ſur cette ſection circulaire en π, π', π'', &c. l'on ſuppoſe que l'angle primitif de torſion ſoit $ACM = A$, & qu'après le temps t, cet angle ſoit ACm, ou qu'il ſoit diminué de l'angle $MCm = S$, en ſorte que $ACm = (A - S)$.

Puiſque l'on ſuppoſe la force de torſion proportionnelle à l'angle de torſion, le *momentum* de cette force ſera

représenté par $n(A - S)$, n étant un coéfficient constant, dont la valeur dépendra de la nature du fil de métal, de sa longueur & de sa grosseur. Si l'on nomme v la vîtesse d'un point quelconque π, au bout du temps t, lorsque l'angle de torsion est ACm, l'on aura, par les principes de Dinamique,

$$n(A - S)\,dt = \int \pi r\,dv,$$

où r est la distance $C\pi$ du point π à l'axe de rotation G.

Mais si le rayon CA' du poids cylindrique $= a$, & que la vîtesse d'un point A' de la circonférence du cylindre, soit au bout du temps t, représentée par u, l'on aura $v = \frac{ru}{a}$; d'où résulte

$$n(A - S)\,dt = du \int \frac{\pi r^2}{a};$$

& comme $dt = \frac{a\,dS}{u}$, l'on aura pour l'équation intégrée

$$n(2AS - SS) = uu \int \frac{\pi r^2}{a^2},$$

d'où l'on tire

$$dt = \frac{dS \int (\pi r^2) \div}{\sqrt{(n)}\sqrt{(2AS - SS)}}.$$

Mais $\frac{dS}{\sqrt{(2AS - SS)}}$ représente un angle dont A est le rayon & S le sinus verse, qui s'évanouit lorsque $S = 0$, & qui devient égal à 90 degrés lorsque $S = A$.

Ainsi le temps d'une oscillation entière sera

$$T = \left(\int \frac{\pi r^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} 180^{d}.$$

VI.

POUR comparer la force de torsion avec la force de la gravité dans un pendule, il faut se ressouvenir que dans le

le pendule, le temps T d'une oſcillation entière

$$= \left(\frac{\lambda}{g}\right)^{\frac{1}{2}} 180^{d},$$

où λ eſt la longueur du pendule, & g la force de gravité. Ainſi un pendule iſochrone aux oſcillations du cylindre, donne

$$\int \frac{\pi r^{3}}{n} = \frac{\lambda}{g};$$

de cette formule, l'on tirera facilement la valeur de n, d'après l'expérience, puiſque les dimenſions du cylindre ou du poids ſont données, ainſi que le temps d'une oſcillation qui détermine la valeur λ.

Si l'on vouloit enſuite chercher un poids Q, qui, agiſſant à l'extrémité du levier b, eût un *momentum* égal au *momentum* de la force de torſion, lorſque l'angle de torſion eſt $(A - S)$, il faudroit faire $Q\,b = n(A - S)$.

VII.

Il faut actuellement chercher, pour un cylindre, la valeur de $\int \pi r^{3}$, que l'on trouvera égale à $\frac{\varphi \delta L . a^{4}}{4}$, où φ eſt le rapport de la circonférence au rayon, δ eſt la denſité du cylindre & a ſon rayon. Mais comme la maſſe M du cylindre $= \frac{\varphi \delta L a^{2}}{2}$, l'on a $\int \pi r^{3} = \frac{M a^{2}}{2}$, & conſéquemment $T = \left(\frac{M a^{2}}{2n}\right)^{\frac{1}{2}} 180^{d}$: en comparant, comme à l'*article précédent*, avec le pendule iſochrone, il en réſulte $\frac{\lambda}{g} = \frac{M a^{2}}{2n}$, & comme $g\,M$ eſt le poids P du cylindre, nous aurons $n = \frac{P a^{2}}{2\lambda}$; ce qui donne une formule très-ſimple pour déterminer n d'après l'expérience.

Digitized by Google

VIII.

Si la force de torſion, que nous avons ſuppoſée $n(A - S)$, étoit altérée par une quantité R, la formule du mouvement oſcillatoire donneroit pour lors

$$[n(A - S) - R]\,\partial t = \partial u \int \frac{\pi r^4}{a};$$

& mettant comme plus haut, à la place de ∂t, ſa valeur $\frac{a\,dS}{u}$, l'on a pour l'intégration

$$n(2AS - SS) - 2\int R\,dS = aa\int \frac{\pi r^4}{aa}.$$

Si l'on veut étendre cette intégration à une oſcillation entière, il faut la diviſer en deux parties, la première depuis M juſqu'en A, où la force de torſion accélère la vîteſſe u, tandis que la force retardatrice la diminue; la deuxième depuis A juſqu'en M, où toutes les forces concourent à retarder le mouvement.

EXEMPLE Ier Suppoſons $R = \mu(A - S)^m$, l'on aura, pour l'état de mouvement dans la première portion MA,

$$n(2AS - SS) + \frac{2\mu(A-S)^{m+1}}{m+1} - \frac{2\mu A^{m+1}}{m+1} = uu\int \frac{\pi r^4}{aa};$$

ainſi, lorſque l'angle de torſion ſera nul, ou que $(A - S) = 0$, l'on aura

$$nA^2 - \frac{2\mu A^{m+1}}{m+1} = UU\int \frac{\pi r^4}{aa};$$

Conſidérons actuellement l'autre partie du mouvement depuis A juſqu'en M', & ſuppoſons l'angle $AGm' = S'$, nous trouverons, en nommant U la vîteſſe au point A;

$$\frac{nS'^2}{2} + \frac{\mu S'^{m+1}}{m+1} = \frac{UU - uu}{2}\int \frac{\pi r^4}{aa}.$$

Subſtituant à la place de U^2 ſa valeur

$$\left(\frac{n A^{2} - \frac{2\mu A^{m+1}}{m+1}}{\int \frac{\pi r^{2}}{a^{2}}}\right),$$

l'on aura pour l'intégration totale, lorſque la viteſſe deviendra nulle, ou lorſque l'oſcillation ſera achevée,

$$(A - S') = \frac{2\mu}{n(m+1)} \cdot \frac{(A^{m+1} + S'^{m+1})}{A + S'};$$

& ſi les forces retardatrices ſont telles qu'à chaque oſcillation, l'amplitude ſoit peu diminuée, l'on aura, pour valeur très-approchée de $(A - S')$,

$$(A - S') = \frac{2\mu A^{m}}{n(m+1)};$$

& ſi cette quantité $(A - S')$ étoit aſſez petite pour être traitée comme une différentielle ordinaire, l'on auroit pour lors, pour un nombre Z d'oſcillations,

$$\frac{2\mu}{n(m+1)} Z = \frac{1}{m-1}\left(\frac{1}{S^{m-1}} - \frac{1}{A^{m-1}}\right),$$

où S repréſente ce que devient A après un nombre d'oſcillations Z. Ainſi l'on aura

$$S = \frac{1}{\left[\frac{2\mu.m-1}{n(m+1)} Z + \frac{1}{A^{m-1}}\right]^{\frac{1}{m-1}}},$$

qui détermine la valeur de S, après un nombre quelconque Z d'oſcillations.

EXEMPLE II. Si

$$R = \mu (A - S)^{m} + \mu' (A - S)^{m'},$$

μ' & m' ayant d'autres valeurs que μ & m, l'on aura, en ſuivant le procédé du dernier exemple,

$$n(A - S) = \frac{2\mu}{m+1}\left(\frac{A^{m+1} + S^{m+1}}{A + S}\right) + \frac{2\mu'}{m'+1}\left(\frac{A^{m'+1} + S^{m'+1}}{A + S}\right);$$

Digitized by Google

& ſi la force retardatrice eſt beaucoup moindre que la force de torſion, l'on aura pour valeur approchée,

$$n(A - S) = 2\mu \frac{A^m}{m+1} + \frac{2\mu' A^{m'}}{m'+1}.$$

En général, ſi

$$R = \mu(A-S)^m + \mu'(A-S)^{m'} + \mu''(A-S)^{m''} + \&c.$$

l'on aura toujours pour une oſcillation, en ſuppoſant R beaucoup plus petit que la force de torſion,

$$n(A-S) = \frac{2\mu A^m}{m+1} + \frac{2\mu' A^{m'}}{m'+1} + \frac{2\mu'' A^{m''}}{m''+1} + \&c.$$

IX.

Expériences pour déterminer les loix de la force de torſion.

Préparation.

SUR une petite planche KA, ſoutenue par quatre pieds, s'élève une potence ABD: le poteau montant AB, a quatre pieds de hauteur, la traverſe horizontale DE, gliſſe le long du montant, & ſe fixe au moyen d'une vis E: le cylindre ou le poids P, porte dans ſa partie ſupérieure, dans la prolongation de ſon axe, un bout d'aiguille b, fixée à ce cylindre. Cette aiguille eſt ſaiſie par la partie inférieure d'une double pince a, qui ſe ſerre par des vis; la partie ſupérieure de cette pince ſaiſit l'extrémité inférieure du fil de ſuſpenſion; la partie inférieure de cette même pince ſaiſit l'extrémité de l'aiguille fixée au cylindre. L'extrémité ſupérieure du fil de ſuſpenſion eſt priſe par une autre pince g, attachée à la traverſe DE. Sur la planche AK, qui ſert de baſe à l'appareil, l'on poſe un cercle diviſé en degrés, dont le centre C doit être placé dans la prolongation de l'axe du cylindre: l'on attache au-deſſous du cylindre un index eo, dont l'extrémité o réponde aux diviſions du cercle.

Digitized by Google

X.

Expériences ſur la torſion des fils de fer.

J'AI pris trois fils de clavecin, tels qu'on les trouve répandus dans le commerce, roulés ſur des bobines, & numérotés.

Le fil de fer, *n.° 12*, ſupporte, avant de ſe rompre, 3 livres 12 onces; les ſix pieds de longueur pèſent 5 grains.

Le fil de fer, *n.° 7*, ſupporte, avant de ſe rompre, un poids de 10 livres; les ſix pieds de longueur pèſent 14 grains.

Le fil de fer, *n.° 1*, caſſe ſous une tenſion de 33 livres; les ſix pieds de longueur pèſent 56 grains.

PREMIÈRE EXPÉRIENCE.

Fil de fer, n.° 12, *le cylindre peſant une demi-livre.*

L'ON a pris un cylindre de plomb peſant une demi-livre, que l'on a ſuſpendu au fil de fer, *n.° 12*; ce cylindre avoit 19 lignes de diamètre & 6 lignes $\frac{1}{2}$ de hauteur; le fil de ſuſpenſion avoit 9 lignes de longueur. L'on a fait tourner le cylindre autour de ſon axe, ſans déranger cet axe de ſon à-plomb, & l'on a eu les réſultats ſuivans:

Premier eſſai. Lorſque l'on fait tourner le cylindre autour de ſon axe, d'un angle plus petit que 180 degrés, il fait vingt oſcillations ſenſiblement iſochrones en... 120″.

Deuxième eſſai. Mais en tordant de trois cercles, les dix premières oſcillations ont été de 2 à 3 ſecondes plus longues que les dix premières; & après les dix premières oſcillations, l'amplitude des oſcillations, qui étoit d'abord de trois cercles, ſe trouvoit réduite à cinq quarts de cercle.

DEUXIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de fer, n.° 12, *cylindre peſant 2 livres.*

Premier eſſai. En ſuſpendant au même fil de fer, *n.° 12*,

Digitized by Google

un cylindre qui pesoit 2 livres, ayant le même diamètre que le précédent, mais 26 lignes de hauteur, l'on a eu, pour un angle de torsion de 180 degrés & au-dessous, vingt oscillations sensiblement isochrones en... 242″.

TROISIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de fer, n.° 7, *cylindre pesant une demi-livre.*

Premier essai. En suspendant au fil de fer, *n.° 7,* le cylindre d'une demi-livre, l'on a eu, pour une torsion de 180 degrés & au-dessous, vingt oscillations sensiblement isochrones en..... 42″

QUATRIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de fer, n.° 7, *cylindre pesant 2 livres*

Essai. En suspendant au même fil un poids de 2 livres, les vingt oscillations ont été achevées en..... 85″

CINQUIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de fer, n.° 1, *cylindre pesant une demi-livre.*

Essai. Lorsque l'on suspend à ce fil de fer de 9 pouces de longueur, un poids de demi-livre, sa roideur est si considérable, que ce poids n'est pas suffisant pour le redresser; en sorte que les oscillations sont très-irrégulières, parce qu'elles dépendent, non-seulement de l'angle de torsion, mais encore de la courbure que le fil de fer conserve en sortant de dessus la bobine, quoiqu'il soit tendu par un poids de demi-livre.

SIXIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de fer n.° 1, *cylindre pesant 2 livres.*

Essai. Mais en suspendant à ce fil de fer de 9 pouces de longueur, un poids de deux livres, le fil est sensi-

Digitized by Google

blement redreſſé, & l'on a, pour un angle de torſion de 45 degrés & au-deſſous, vingt oſcillations ſenſiblement iſochrones en..... 43".

Continuation des Expériences.

Fils de laiton.

L'on a pris trois fils de laiton, correſpondans par le numéro & à peu-près par la groſſeur, aux trois fils de fer que l'on vient de ſoumettre aux expériences.

Le fil de laiton, *n.° 12*, portoit, au moment de ſa rupture, 2 livres 3 onces: les ſix pieds de longueur pèſent 5 grains.

Le fil de laiton, *n.° 7*, portoit, au moment de ſa rupture, 14 livres: les ſix pieds de longueur pèſent 18 grains $\frac{1}{2}$.

Le fil de laiton, *n.° 1*, caſſe ſous une tenſion de 22 livres: les ſix pieds de longueur pèſent 66 grains.

SEPTIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de laiton n.° 12, *cylindre peſant une demi-livre.*

Eſſai. La longueur du fil de ſuſpenſion étoit de 9 pouces, comme dans les expériences qui précèdent; l'on y a ſuſpendu le cylindre peſant une demi-livre, & l'on a eu pour un angle de torſion de 360 degrés & au-deſſous, vingt oſcillations ſenſiblement iſochrones en..... 220".

Mais avec un angle primitif de trois cercles de torſion, les vingt premières oſcillations ont duré 225 ſecondes; & après ces vingt premières oſcillations, l'angle de torſion étoit encore de deux cercles à peu-près.

HUITIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de laiton, n.° 12, *cylindre peſant deux livres.*

Eſſai. Le fil de ſuſpenſion étant de 9 pouces, & le cylindre peſant 2 livres, l'on a eu pour un angle de 360 degrés & au-deſſous, vingt oſcillations ſenſiblement

Digitized by Google

isochrones en..... 442″.

Avec un angle primitif de trois cercles de torsion, les vingt premières oscillations ont duré à peu-près 444 secondes, & l'angle primitif de torsion s'est trouvé réduit à deux cercles un quart.

NEUVIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de laiton, n.° 7, *cylindre pesant une demi-livre.*

Essai. La longueur du fil de suspension toujours de 9 pouces, l'angle primitif de torsion étant de 360 degrés & au-dessous, l'on a eu vingt oscillations sensiblement isochrones en..... 57″.

DIXIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de laiton, n.° 7, *cylindre pesant 2 livres.*

Essai. La longueur du fil de suspension toujours de 9 pouces, l'angle primitif de torsion étant de 360 degrés & au-dessous, l'on a eu vingt oscillations sensiblement isochrones en..... 110″.

Mais l'angle primitif de torsion étant de deux circonférences de cercle, l'on a eu les vingt premières oscillations en 111 secondes, & l'angle primitif de torsion qui étoit de deux circonférences, s'est trouvé réduit à une circonférence & demie.

ONZIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de laiton, n.° 1, *cylindre pesant une demi-livre.*

Essai. Sous une tension d'une demi-livre, le fil de suspension n'est pas entièrement redressé, & le temps des oscillations, dépendant en partie de sa courbure primitive, est incertain.

DOUZIÈME

DOUZIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de laiton, n.° 1, *cylindre pesant 2 livres.*

Essai. La longueur du fil de suspension toujours de 9 pouces, l'angle primitif de torsion étant de 50 degrés & au-dessous, l'on a eu vingt oscillations sensiblement isochrones en..... 32″.

Mais l'angle primitif de torsion étant de cinq quarts de cercle, l'on a eu les vingt premières oscillations en 33 secondes $\frac{1}{2}$; & au bout de ces oscillations, l'angle primitif étoit réduit à un quart de cercle.

TREIZIÈME EXPÉRIENCE

Fil de laiton, n.° 7, *cylindre pesant 2 livres.*

Essai. La longueur des fils de suspension dans toutes les expériences précédentes, étoit de 9 pouces: comme l'on avoit besoin de déterminer la force de torsion, relativement à la longueur des fils, l'on a donné 36 pouces de longueur à la suspension de cette expérience, & l'on a eu jusqu'à trois cercles de torsion & au-dessous, vingt oscillations sensiblement isochrones en..... 222″.

X I.

Résultat des Expériences qui précèdent.

LA force ou la réaction de la torsion des fils de métal, doit être relative à leur longueur, à leur grosseur, à leur tension. Ainsi, pour pouvoir déterminer généralement la loi de cette réaction, nous avons été obligés, dans les expériences qui précèdent, de suspendre différens poids à des fils de fer & de laiton, de grosseur & de longueur différentes: voici les résultats que ces expériences présentent.

Si l'on fait tourner autour de son axe le cylindre, sans

déranger cet axe de la ligne verticale, ce fil se tordra: lorsque l'on abandonnera le cylindre, le fil par sa force de réaction, fera effort pour reprendre sa situation naturelle; cet effort fera osciller le cylindre autour de cet axe, plus ou moins de temps, suivant que la force élastique sera plus ou moins parfaite.

Mais nous trouvons, par toutes les expériences qui précèdent, que lorsque l'angle de torsion n'est pas très-considérable, le temps des oscillations est sensiblement isochrone; ainsi nous pouvons regarder comme une première loi, que pour tous les fils de métal, lorsque les angles de torsion ne sont pas très-grands, la force de torsion est sensiblement proportionnelle à l'angle de torsion.

Ayant trouvé par l'expérience, que la force de réaction de torsion est proportionnelle à l'angle de torsion, il en résulte que toutes les formules oscillatoires que nous avons données, *articles IV & suivans*, d'après la supposition d'une force de torsion proportionnelle à l'angle de torsion, ou altérée par un terme très-petit, peuvent être appliquées à ces expériences.

Ainsi, comme nous avons eu, *article VII*, au moyen de ces formules $T = (\frac{Ma^2}{2n})^{\frac{1}{2}} . 180$ degrés, & que dans toutes les expériences qui précèdent, les cylindres de demi-livre & de 2 livres avoient le même diamètre, il en résulte que n doit être toujours proportionnel à $(\frac{M}{T^2})$.

Ainsi, si la tension plus ou moins grande du fil, n'a point d'influence sur la force de torsion, pour lors la quantité n pour un même fil, sera la même dans une tension de demi-livre & une tension de 2 livres, & par conséquent l'on aura T proportionnel à $M^{\frac{1}{2}}$. Comparons nos expériences faites avec deux poids, l'un d'une demi-livre, l'autre de 2 livres, dont les racines sont comme 1 est à 2.

Digitized by Google

Première expérience. Le fil de fer, *n.° 12*, tendu par le poids d'une demi-livre, fait 20 oscillations en... 120″.

Deuxième expérience. Le même fil, tendu par un poids de 2 livres, fait 20 oscillations en..... 242″.

Troisième expérience. Fil de fer, *n.° 7*, tendu par le poids d'une demi-livre, fait 20 oscillations en..... 43″.

Quatrième expérience. Fil de fer, *n.° 7*, tendu par le poids de 2 livres, fait 20 oscillations en..... 85″.

La *cinquième expérience* ne peut pas se comparer avec la *sixième.*

Septième expérience. Fil de laiton, *n.° 12*, tendu par le poids d'une demi-livre, fait 20 oscillations en... 220″.

Huitième expérience. Fil de laiton, *n.° 12*, tendu par le poids de 2 livres, fait 20 oscillations en.... 442″.

Neuvième expérience. Fil de laiton, *n.° 7*, chargé du poids d'une demi-livre, fait 20 oscillations en.... 57″.

Dixième expérience. Fil de laiton, *n.° 7*, chargé du poids de 2 livres, fait 20 oscillations en..... 110″.

La *onzième* & la *douzième expériences* ne peuvent pas être comparées entr'elles.

Il résulte donc de toutes ces expériences, qu'avec le même fil de métal, un poids de deux livres fait sensiblement ses oscillations dans un temps double de celui où un poids d'une demi-livre fait ses oscillations; que par conséquent la durée des oscillations est comme la racine des poids; qu'ainsi la tension, plus ou moins grande n'influe pas sensiblement sur la réaction de la force de torsion.

Cependant, par beaucoup d'expériences faites avec de très-grandes tensions relativement à la force du métal, il paroît que les grandes tensions diminuent ou altèrent un

Digitized by Google

peu la force de torſion. L'on ſent en effet qu'à meſure que la tenſion augmente, le fil s'alonge, ſon diamètre diminue, ce qui doit ralentir la durée des oſcillations.

Nous n'avons pas pu comparer les fils de fer ou de laiton, *n.° 1*, ſous les tenſions d'une demi-livre & de deux livres, parce que, comme nous l'avons dit dans le détail des Expériences, la tenſion d'une demi-livre n'eſt pas ſuffiſante pour redreſſer ces fils.

XII.

De la force de torſion relativement aux longueurs des fils.

NOUS venons de trouver, dans l'article qui précède, que le plus ou moins de tenſion des fils n'influoit que d'une manière inſenſible ſur la force de torſion. Nous allons actuellement chercher, d'après les mêmes expériences, de combien, à angle égal de torſion, la longueur du fil de ſuſpenſion augmente ou diminue cette force. Mais il eſt clair qu'à meſure que l'on augmente la longueur du fil de métal, l'on peut faire faire, dans la même proportion, un plus grand nombre de révolutions au cylindre, ſans changer le degré de torſion; ainſi, la force de réaction de torſion doit être, pour un même nombre de révolutions, en raiſon inverſe de la longueur du fil. Voyons ſi ce raiſonnement s'accorde avec l'expérience.

La formule, de l'*article VII*, nous donne

$$T = \left(\frac{M a^2}{2n}\right)^{\frac{1}{2}} . 180 \text{ degrés},$$

ou pour le même poids T proportionnel à $\frac{1}{(\sqrt{n})}$. Ainſi, ſi n eſt en raiſon inverſe des longueurs, comme la théorie l'annonce, T ſera comme les racines des longueurs des fils de ſuſpenſion: comparons avec l'expérience.

Nous trouvons, *dixième expérience*, que le fil de laiton, *n.° 7*, de 9 pouces de longueur, étant tendu par le poids d'une demi-livre, fait 20 oſcillations en..... 110″.

Digitized by Google

Nous trouvons, *treizième expérience*, que le même fil de laiton, *n.° 7*, de 36 pouces de longueur, tendu par le poids de 2 livres, fait 20 oscillations en..... 222″.

Ainsi les longueurs des fils sont entr'eux :: 1 : 4, tandis que les temps des oscillations des fils sont :: 1 : 2; ainsi l'expérience prouve que les temps d'un même nombre d'oscillations, sont, pour les mêmes fils tendus par les mêmes poids, comme la racine des longueurs de ces fils, ainsi que la théorie l'avoit annoncé.

Nous avons fait beaucoup d'expériences du même genre que les précédentes, qui ont toutes très-exactement confirmé cette loi. Nous n'avons pas cru nécessaire d'en grossir ce Mémoire.

XIII.

De la force de torsion relativement à la grosseur des fils.

Nous venons de déterminer les loix de la force de torsion relativement à la tension & à la longueur des fils; il ne nous reste qu'à les déterminer relativement à la grosseur des mêmes fils.

Nous avons, dans les six premières expériences, trois fils de fer de différentes grosseurs & de même longueur; & dans les six expériences suivantes, trois fils de laiton de même longueur & de grosseurs différentes: mais comme nous avons le poids d'une longueur de 6 pieds de chacun de ces fils, il est facile d'en conclure le rapport de leur diamètre. Voici ce que le raisonnement doit faire prévoir; le *momentum* de la réaction de torsion doit augmenter, avec la grosseur des fils, de trois manières. Prenons pour exemple deux fils de même nature & de même longueur, que le diamètre de l'un soit double de celui de l'autre, il est clair que dans celui qui a un diamètre double, il y a quatre fois plus de parties tendues par la torsion, que dans celui qui a un diamètre simple; & que l'extension moyenne de toutes ces parties sera proportionnelle au diamètre du fil, de même

Digitized by Google

que le bras moyen du levier relativement à l'axe de rotation. Ainſi nous ſommes portés à croire, d'après la théorie, que la force de torſion de deux fils de métal, de la même nature, de la même longueur, mais d'une groſſeur différente, eſt proportionnelle à la quatrième puiſſance de leur diamètre, ou pour une même longueur au carré de leur poids. Comparons avec l'expérience.

Nous ne prendrons ici que les expériences où la tenſion eſt de 2 livres, pour pouvoir comparer tous les *n.os*, les fils du *n.o* 1 n'étant pas aſſez exactement tendus par le poids d'une demi-livre : nous avons

Fils de fer.

Deuxième expérience. Le fil de fer, *n.o 12*, dont les 6 pieds de longueur pèſent 5 grains, donne 20 oſcillations en..... 242″.

Quatrième expérience. Le fil de fer, *n.o 7*, dont les 6 pieds de longueur peſent 14 grains, donne 20 oſcillations en..... 85″.

Sixième expérience. Le fil de fer, *n.o 1*, dont les 6 pieds pèſent 56 grains, donne 20 oſcillations en... 23″.

Fils de laiton.

Huitième expérience. Le fil de laiton, *n.o 12*, dont les 6 pieds pèſent 5 grains, a donné 20 oſcillations en... 442″.

Dixième expérience. Le fil de laiton, *n.o 7*, dont les 6 pieds pèſent 18 grains $\frac{1}{2}$, donne 20 oſcillations en.. 110″.

Douzième expérience. Le fil de laiton, *n.o 1*, dont les 6 pieds pèſent 66 grains, donne 20 oſcillations en... 32″.

Pour déterminer, d'après ces expériences, la loi de la réaction de la force de torſion, relativement au diamètre du fil de ſuſpenſion, ſuppoſons que

$$T : T' :: D^m : D'^m :: \varphi^{\frac{m}{2}} : \varphi'^{\frac{m'}{2}},$$

où l'on ſuppoſe que T & T' repréſentent le temps d'un certain nombre d'oſcillations pour un fil de métal, dont le diamètre eſt D & D', & le poids pour une même longueur

Digitized by Google

φ & φ'; m étant la puiſſance que l'on cherche à déterminer. De cette proportion, nous tirerons

$$m = \frac{2\,(\log. T - \log. T')}{\log. \varphi - \log. \varphi'},$$

formule qu'il faut comparer avec l'expérience.

La *deuxième expérience*, comparée avec la *quatrième*, donne... $m = -1{,}82$.
La *deuxième expérience*, comparée avec la *ſixième*..... $m = -1{,}95$.
La *huitième expérience*, comparée avec la *dixième*..... $m = -2{,}04$.
La *huitième expérience*, comparée avec la *douzième*..... $m = -2{,}02$.

D'où il réſulte que

$$T : T' :: \frac{1}{D^2} : \frac{1}{D'^2} :: \frac{1}{\varphi} : \frac{1}{\varphi'}.$$

Mais la formule du mouvement oſcillatoire

$$T = \left(\frac{M a^2}{2n}\right)^{\frac{1}{2}} 180 \text{ degrés},$$

donne, dans les expériences précédentes, à cauſe de l'égalité des poids de tenſion, n proportionnel à $\frac{1}{T^2}$; ainſi la force de torſion, pour des fils de même nature, de même longueur, mais de groſſeur différente, eſt comme la quatrième puiſſance du diamètre, ainſi que la théorie l'avoit annoncé.

XIV.

Réſultat général.

Il réſulte donc de toutes les expériences qui précèdent, que le *momentum* de la force de torſion, eſt, pour les fils du même métal, en raiſon compoſée de l'angle de torſion de la quatrième puiſſance du diamètre, & inverſe de la longueur du fil; en ſorte que ſi l'on nomme l la longueur du fil, D ſon diamètre, B l'angle de torſion, l'on aura, pour l'expreſſion qui repréſente la force de torſion, $\frac{\mu B D^4}{l}$, où μ eſt un coéfficient conſtant qui dépend de la roideur

naturelle de chaque métal : cette quantité μ, invariable pour les fils du même métal, peut se déterminer facilement par l'expérience, comme on va le voir dans l'article suivant.

X V.

Valeur effective des quantités n *&* μ.

NOUS avons vu, *article VII*, que $n = \frac{P.a^2}{\lambda}$, où P est le poids d'un cylindre, a son rayon, λ la longueur du pendule isochrone, avec les oscillations du cylindre, qui sont produites par la force de torsion.

Appliquons cette formule à la *deuxième expérience*, où le fil de fer, *n.° 12*, est tendu par un poids de 2 livres, dont le rayon est 9 lignes $\frac{1}{2}$, & où 20 oscillations se font en 242″.

Comme le pendule, qui bat les secondes à Paris, est de 440 lignes $\frac{1}{2}$, le pendule isochrone, avec les oscillations du cylindre, sera $440\frac{1}{2}\left(\frac{242}{20}\right)^2$; ainsi

$$n = \frac{2 \text{ liv.} \left(9\frac{1}{2}\right)^2}{2.\ 440\frac{1}{2}\left(\frac{242}{20}\right)^2} = \frac{1 \text{ liv.}}{715.},$$

ainsi le *momentum* $n\,B$ du fil de fer, *n.° 12*, ayant 9 pouces de longueur, est égal à $\frac{1}{715}$ livres, multiplié par l'angle de torsion B, agissant à l'extrémité d'un levier d'une ligne de longueur.

Nous avons vu, dans les articles qui précèdent, que pour le même métal, il résultoit de la théorie & de l'expérience que les forces de torsion étoient en raison inverse de la longueur des fils de suspension & de la quatrième puissance du diamètre. Ainsi il est facile d'avoir une valeur déterminée, de la force de torsion d'un fil de fer, d'une longueur & d'une grosseur quelconque ; en voici le calcul.

Le

Le pied cube de fer, pesant à peu-près 540 livres, & les 6 pieds de longueur du fil de fer, *n.° 12*, pesant 5 grains, le diamètre de ce fil de fer est très-approchant d'un quinzième de ligne; ainsi le *momentum* de torsion d'un fil de fer, d'un quinzième de ligne de diamètre, est égal à $\frac{1}{7^{15}}$ livre, multiplié par l'angle de torsion, agissant à l'extrémité d'un lévier d'une ligne de longueur.

XVI.

Comparaison de la roideur de torsion de deux métaux différens.

L'on déduira facilement, de la théorie & des expériences qui précèdent, quel est, dans deux métaux différens, le fer, par exemple, & le cuivre jaune, le rapport de roideur de torsion: prenons le fil de fer, *n.° 12*, que nous comparerons avec le fil de laiton, *n.° 12*.

Nous venons de calculer à l'*article précédent*, la quantité n, pour le fil de fer, & nous l'avons trouvée $= \frac{1}{7^{15}}$ livre, multiplié par un lévier d'une ligne. Mais comme le fil de laiton, chargé du poids de 2 livres, fait 20 oscillations en 442″, nous aurons, par la même formule pour le fil de laiton, $n' = \frac{1 \text{ liv.} \cdot 19^2}{440\frac{1}{4}(\frac{442}{20})^2}$; ainsi $\frac{n}{n'} = (\frac{442}{242})^2 = 3{,}34$; ainsi la roideur du fil de fer, *n.° 12*, est à la roideur du fil de laiton, *n.° 12*, à peu-près :: $3\frac{1}{3} : 1$.

Mais comme il y a peu de différence entre la pesanteur spécifique du fer & du cuivre, qui, suivant M. Musschembroek, sont :: 77 : 83, l'on peut supposer que le fil de fer, *n.° 12*, & celui de cuivre, *même numéro*, ont à peu

près le même diamètre ; ainſi pour les fils de fer & de cuivre du même diamètre, tout étant d'ailleurs égal, les roideurs de torſion ſont :: $3\frac{1}{3}$: 1, c'eſt-à-dire qu'en tordant le fil de fer d'un cercle, l'on aura la même réaction de torſion, qu'en tordant le fil de cuivre de $3\frac{1}{3}$ cercles.

Si l'on veut enſuite comparer la roideur de torſion avec la force de cohéſion, l'on remarquera que notre fil de fer portoit, au moment de ſa rupture, 60 onces, que celui de cuivre ne portoit que 35 onces; ainſi puiſqu'ils ont à peu-près le même diamètre, leur force de cohéſion étoit approchant :: 60 : 35, dans le temps que leur force de torſion vient d'être trouvée :: $3\frac{1}{3}$: 1.

Ce dernier réſultat ne doit cependant être regardé que comme un cas particulier & non comme un réſultat général. Nous verrons dans la deuxième ſection de ce Mémoire, que la force des métaux varie ſuivant le degré d'écrouiſſement & de recuit, & que toutes les expériences dont on s'eſt ſervi juſqu'ici pour déterminer la force des métaux, ne peuvent être regardées que comme des cas particuliers.

Mais ce que cette dernière obſervation ſemble indiquer, & ce que la pratique confirme, c'eſt que ſi l'on veut ſoutenir un corps mobile ſur la pointe d'un pivot, il y a de l'avantage à préférer un pivot d'acier ou de fer, à un pivot de cuivre, puiſque ſous le même degré de preſſion le fer fléchit beaucoup moins que le cuivre; qu'ainſi le cercle de contact formé par la pointe du pivot, preſſée par le corps qu'elle ſoutient, aura un moindre diamètre pour le fer que pour le cuivre, ce qui, tout étant d'ailleurs égal, diminue le *momentum* du frottement qu'il faut vaincre pour faire tourner un corps ſur la pointe d'un pivot : nous aurons occaſion par la ſuite de revenir ſur cet article.

Par quelques expériences & par un calcul ſemblable à celui qui précède, nous avons trouvé qu'en ſuſpendant un cylindre à un fil de ſoie, formé de pluſieurs brins

Digitized by Google

réunis à l'eau bouillante, & assez fort pour porter jusqu'à 60 onces, ce fil de soie avoit 18 à 20 fois moins de roideur de torsion que le fil de fer qui portoit ce même poids au moment de sa rupture.

XVII.

Usage des expériences & de la théorie qui précède.

D'APRÈS la théorie qui précède, & les expériences sur lesquelles elle est fondée, l'on pourra mesurer des forces très-petites, qui exigent une précision que les moyens ordinaires ne peuvent pas fournir: nous allons en présenter un exemple.

XVIII.

Balance pour mesurer le frottement des fluides contre les solides.

LA formule qui exprime la résistance des fluides contre un corps en mouvement, paroît composée de plusieurs termes, dont les uns dépendent du choc des fluides contre le corps solide, & dont les autres sont dûs au frottement du fluide: parmi les termes dûs au frottement, il y en a un qui dépend de l'adhérence, & que l'on croit constant; mais ce terme est si petit, que confondu dans les expériences avec les autres quantités qui dépendent du choc, il est très-difficile de l'évaluer: l'on peut voir les expériences que M. Newton a faites pour découvrir cette quantité constante. *(Livre II des Principes mathématiques de la Philosophie naturelle, Scholie du vingt-cinquième théorème.*

La force de torsion donne un moyen facile de déterminer par l'expérience cette adhérence.

Dans un vase *ADBE*, *fig. 3*, rempli du fluide dont on veut déterminer l'adhérence, l'on suspend, au moyen d'un fil de cuivre, un cylindre *abcd*, de cuivre ou de

Digitized by Google

plomb; l'on place deſſus le vaſe un cercle $A'Fb'$, diviſé en degrés; ce cercle ſe trouve au niveau de l'extrémité d d'un index id attaché au cylindre.

Lorſque l'on fera tourner le cylindre autour de ſon axe vertical, ſans le déranger de ſon à-plomb, l'on pourra obſerver, au moyen du petit index, de combien chaque oſcillation eſt altérée: & comme la force de torſion du fil qui produit ces oſcillations, eſt connue par les expériences qui précèdent; que l'on peut auſſi connoître l'altération dûe à l'imperfection de l'élaſticité, en faiſant oſciller le cylindre dans le vide ou même dans l'air; l'on peut eſpérer, par ce moyen, de trouver la quantité conſtante dûe à l'adhérence.

Exemple & Expérience.

J'AI ſuſpendu dans un vaſe plein d'eau, à un fil de cuivre, *n.° 12*, de vingt-neuf lignes de longueur, le cylindre de plomb peſant deux livres, qui nous a ſervi dans les expériences précédentes: le cercle AB, ſur lequel l'on obſervoit les oſcillations, avoit quarante-quatre lignes de diamètre; l'on a attendu, avant de commencer les obſervations, que les amplitudes des oſcillations fuſſent diminuées au point que l'extrémité d de l'index ne parcourût ſur le cercle qu'un arc d'une ligne & demie, répondant à peu-près à $3^d\,55'$; & en obſervant la marche de l'index avec une loupe, l'on a aperçu diſtinctement quatorze oſcillations avant que le mouvement fût éteint.

Réſultat de cette Expérience.

Si la diminution ſucceſſive de chaque oſcillation eſt ſuppoſée conſtante, & qu'elle ſoit attribuée en entier à l'adhérence du fluide contre la ſurface du cylindre de plomb, l'on aura, *art. VIII*,

$$(A - S') = \left(\frac{3\mu}{\ast}\right),$$

Digitized by Google

où $(A - S')$ eſt la diminution de chaque oſcillation, $n(A - S)$ le *momentum* de la force de torſion, & μ le *momentum* de la force retardatrice dûe à l'adhérence.

Mais comme, d'après les obſervations des oſcillations, l'arc parcouru étoit diminué d'une ligne & demie en quatorze oſcillations, & que le rayon du cercle ſur lequel s'obſervoit cette diminution, étoit de vingt-deux lignes; en ſuppoſant cette diminution conſtante, l'on aura l'angle $(A - S)$ dont l'amplitude diminue à chaque oſcillation $= \frac{3}{2.22.14}$.

Mais nous avons trouvé, *art. XVI*, que pour un fil de laiton de neuf pouces de longueur, *n.° 12*,

$$n = \frac{1 \text{ livre}.(9\frac{1}{2})^4}{440\frac{1}{2}.(\frac{442}{20})^4};$$

& comme nous avons auſſi trouvé que les forces de torſion ſont proportionnelles à la longueur des fils de ſuſpenſion, l'on aura pour notre fil de vingt-neuf pouces de longueur.

$$\mu = \frac{1}{3,155,000} \text{ livre} \times 1 \text{ ligne},$$

c'eſt-à-dire, que le *momentum* de la force retardatrice conſtante μ, eſt à peu-près égal à un trois millionième de livre, ſuſpendu à un lévier d'une ligne: quantité qui auroit été inappréciable par tout autre moyen que celui que nous venons d'employer.

Pour avoir actuellement la valeur de l'adhérence d'après cette expérience, il faut remarquer que la hauteur du cylindre de plomb, ſubmergée par l'eau du vaſe, étoit de vingt-quatre lignes, & que le diamètre de ce cylindre étoit de dix-neuf lignes. Ainſi, en prenant $\frac{22}{7}$ pour le rapport de la circonférence au diamètre, la ſurface du cylindre ſubmergée, étoit égale à $\frac{22}{7}.19.24$; & comme le mouvement ſe fait ici autour de l'axe du cylindre,

Digitized by Google

dont le rayon eſt $9\frac{1}{2}$ lignes, ſi δ eſt l'adhérence, le *momentum* de l'adhérence autour de l'axe de rotation, ſera $\delta\frac{22}{7}(19)^2.12$. Il faut encore ajouter à cette quantité le *momentum* de l'adhérence du cercle qui forme la baſe du cylindre plongé dans l'eau, dont le *momentum*

$$= \delta\ \frac{22}{7}.19^1.\frac{19^1}{4}.\frac{2}{3}\frac{19}{2},$$

en ſorte que le *momentum* total de la réſiſtance du fluide contre le cylindre ſera

$$\delta\frac{22}{7}(19)^2.\left(12+\frac{19}{12}\right) = \delta.\frac{22}{7}.(19)^2\left(\frac{163}{12}\right).$$

Mais l'expérience nous a fait trouver ce même *momentum* $= \frac{1\text{ livre}}{3,155,000}$. 1 ligne pour un pouce carré; ainſi

$$\delta = \frac{1\text{ livre}}{3155000}\cdot\frac{7.12}{22.163.(19)^2},$$

& pour un pied carré l'adhérence ſera

$$\delta\ (144)^2 = \frac{1\text{ livre}}{2345000},$$

en ſorte que la réſiſtance conſtante dûe à l'adhérence de l'eau pour une ſurface de 255 pieds, ne peut pas être évaluée à plus d'un grain; ainſi il y a peu de cas où cette altération conſtante, ſi elle a lieu, ne puiſſe être négligée dans l'évaluation du frottement de l'eau. Nous n'avons fait aucun eſſai ſur les autres fluides.

En donnant au cylindre des oſcillations de deux ou trois cercles d'amplitude, & comparant les diminutions ſucceſſives des amplitudes des oſcillations avec les formules du mouvement oſcillatoire altéré, j'ai cru apercevoir que dans les très-petites viteſſes, ce frottement eſt comme les viteſſes, & dans les grandes viteſſes, comme le carré; mais ces expériences demandent un travail exprès, & d'être faites dans différens fluides.

Digitized by Google

XIX.

Depuis la lecture de ce Mémoire, j'ai conſtruit, d'après la théorie de la réaction de torſion que je viens d'expliquer, une balance électrique & une balance magnétique; mais comme ces deux inſtrumens, ainſi que les réſultats relatifs aux loix électriques & magnétiques qu'ils ont donnés, ſeront décrits dans les volumes ſuivans de nos Mémoires, je crois qu'il ſuffit ici de les annoncer.

XX.

Seconde Section.

De l'altération de la force élaſtique dans les torſions des fils de métal. Théorie de la cohérence & de l'élaſticité.

Lorsque l'on tord les fils de fer ou de laiton, tendus, comme dans les expériences qui précèdent, par un poids, l'on obſerve deux choſes; ſi l'angle de torſion n'eſt pas conſidérable, relativement à la longueur du fil de ſuſpenſion, dans le moment où l'on lâche le poids, il revient à peu-près à la poſition qu'il avoit avant la torſion du fil de métal, c'eſt-à-dire, que le fil de ſuſpenſion ſe détord de toute la quantité dont il a été tordu; mais ſi l'angle de torſion que l'on aura donné au fil de ſuſpenſion, eſt très-grand, pour lors ce fil ne ſe détord que d'une certaine quantité, & le centre de réaction de torſion s'avancera de toute la quantité dont le fil ne ſera pas détordu. C'eſt donc d'après ces deux conſidérations, qu'il faut diriger les expériences que nous devons faire dans cette ſection, ce qui demande deux ſuites d'expériences; la première, pour déterminer par la diminution des oſcillations, de combien la force élaſtique de torſion eſt altérée dans le mouvement oſcillatoire, quoique le centre de réaction de torſion ne ſoit pas déplacé; la ſeconde, pour déterminer le déplacement de ce centre de réaction, lorſque l'angle de torſion eſt aſſez grand pour que ce déplacement ait lieu.

Digitized by Google

XXI.

PREMIÈRE EXPÉRIENCE.

Fil-de-fer, n.° 1, *longueur, ſix pouces ſix lignes.*

L'ON a pris un fil de fer de ſix pouces ſix lignes de longueur, il a été chargé d'un poids de deux livres, le même qui a ſervi dans les expériences de la ſection précédente. L'on a cherché, en faiſant tourner ce cylindre autour de ſon axe pour tordre le fil de ſuſpenſion, à déterminer de combien de degré l'amplitude diminuoit à chaque oſcillation, & l'on a trouvé :

Premier eſſai, angle de torſion	90^d	perd 10^d en	$3\frac{1}{2}$ oſcillat.
Deuxième eſſai	45	.....	$10\frac{1}{2}$.
Troiſième eſſai	$22\frac{1}{2}$	.....	23.
Quatrième eſſai	$11\frac{1}{4}$	.....	46.

Remarque ſur cette Expérience.

Les diminutions des amplitudes des oſcillations ont été très-incertaines, lorſque l'angle primitif de torſion a été de plus de 90 degrés; l'on a même obſervé que pour lors, en faiſant tourner le cylindre autour de ſon axe, il ne revient pas à ſa première poſition, & que la poſition reſpective des parties conſtitutives du fil a été altérée, & par conſéquent, que ſon centre de réaction de torſion a reſté déplacé: voici ce que l'expérience fournit ſur ce déplacement.

XXII.

Suite de la première Expérience.

Dans cette partie de la première expérience, l'on a cherché le déplacement du centre de torſion, ſuivant le degré de torſion que l'on a donné au fil de ſuſpenſion.

Premier

Digitized by Google

Premier	*essai*, en tordant de.	$\frac{1}{2}C$	l'index ou le centre de torsion a été déplacé de..... 8[d]
Deuxième	*essai*.....	1C.....	50.
Troisième	*essai*.....	2.....	310.
Quatrième	*essai*.....	3.....	1C + 300.
Cinquième	*essai*.....	4.....	2 + 290.
Sixième	*essai*.....	5.....	3 + 280.
Septième	*essai*.....	6.....	4 + 260.
Huitième	*essai*.....	10.....	8 + 240.

Neuvième essai. Ayant voulu continuer à tordre toujours dans le même sens de quinze nouveaux cercles, le fil a cassé au quatorzième. Après cette expérience, ce fil étoit droit & très-roide, il s'étoit séparé suivant sa longueur, en deux parties; examiné à la loupe, cette séparation étoit très-sensible, & il avoit exactement la figure d'une corde formée de deux torons.

XXIII.

Remarque sur cette Expérience.

Cette première expérience & sa suite paroissent annoncer qu'au-dessous de 45 degrés, les altérations sont à peu-près proportionnelles aux amplitudes des angles de torsion, comme on le voit par les deuxième, troisième & quatrième essais de l'expérience première; qu'au-dessus de 45[d], les altérations augmentent dans un rapport beaucoup plus grand; que le centre de réaction de torsion ne commence à se déplacer que lorsque l'angle de torsion est à peu-près d'une demi-circonférence; que ce déplacement croît à mesure que l'on tord le fil; qu'il est assez irrégulier jusqu'à 1 cercle 10 degrés; que, passé ce terme de torsion, la

réaction de torſion reſte à peu-près la même pour tous les angles de torſion : ainſi, par exemple, en tordant, dans le quatrième eſſai, de trois cercles, le centre de réaction de torſion ſe déplace d'un cercle + 300 degrés, en ſorte que la réaction de torſion n'a ramené le cylindre que d'un cercle 60 degrés. Dans le ſeptième eſſai, nous voyons, qu'après avoir déjà éprouvé dans les eſſais antérieurs, un déplacement de plus de huit cercles, que ſix nouveaux cercles de torſion déplacent le centre de réaction de torſion de $4C$ + 260 degrés, en ſorte que pour plus de quatorze cercles de torſion, la réaction de torſion n'eſt encore que d'un cercle plus 100 degrés ; ainſi elle ne diffère que d'un dixième de la réaction de torſion pour trois cercles de torſion que le quatrième eſſai nous a donnés d'un cercle + 60 degrés : les expériences qui vont ſuivre éclairciront cette remarque.

XXIV.

DEUXIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de fer, n.° 7, *longueur, 6 pouces 6 lignes.*

L'ON a cherché, dans la première partie de cette expérience, de combien les amplitudes des oſcillations diminuoient à chaque oſcillation, lorſque le centre de torſion n'étoit pas encore deplacé.

Premier eſſai, angle de torſion	180^d perd 10^d en...		3 $\frac{1}{2}$ oſcillat.
Deuxième eſſai.....	90.....		12.
Troiſième eſſai.....	45.....		27.
Quatrième eſſai.....	22 $\frac{1}{2}$.....		54.

Suite de cette deuxième Expérience.

Dans cette deuxième partie de la même expérience, l'on a cherché le déplacement du centre de torſion.

Digitized by Google

Premier essai, en tordant de 3 cercles { le centre de réaction de torsion déplacé de..... } 300d

Deuxième essai..... 4..... 1 C + 180.
Troisième essai..... 6..... 3 + 90.
Quatrième essai..... 8..... 5 + 90.
Cinquième essai..... 12..... 9 + 40.
Sixième essai..... 20..... 16 + 310.
Septième essai..... 30..... 26 C + 180.
Huitième essai..... 50..... 46 + 20.
Neuvième essai, au dix-septième cercle de torsion le fil a cassé.

XXV.

TROISIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de fer, n.° *12*, *longueur*, *6 pouces 6 lignes.*

LA première partie de cette expérience a été faite sous le même point de vue que la première partie des deux expériences qui précèdent.

Premier essai, angle de torsion 360d perd.. 10d en.. 1 oscillat.
Deuxième essai..... 180..... 10.... 2.
Troisième essai..... 90..... 10.... 5.
Quatrième essai..... 45..... 10.... 11.
Cinquième essai..... 22½..... 10.... 25.

Suite de cette troisième Expérience.

Déplacement du centre de torsion.

Premier essai, en tordant de 4 cercles { le centre de réaction de torsion déplacé de..... } 300d.

Deuxième essai..... 6..... 2 C + 40.
Troisième essai, aux six autres tours le fil a cassé.

Digitized by Google

XXVI.

LES expériences précédentes ont été continuées avec des fils de laiton, employés aux expériences de la première section.

QUATRIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de laiton, n.° 1, *longueur*, *6 pouces 6 lignes.*

Premier essai, en tordant de	180^d perd..	12^d en....	2 oscillat.
Deuxième essai.....	90.....	10.....	6.
Troisième essai.....	45.....	10.....	16.
Quatrième essai.....	22$\frac{1}{2}$.....	10.....	40.
Cinquième essai.....	11$\frac{1}{4}$.....	10.....	80.

Suite de la quatrième Expérience.

Déplacement du centre de torsion.

Premier essai, en tordant de	2 cercles	le centre de torsion a été déplacé de..	160^d.
Deuxième essai.....	4.....	2 C +	0.
Troisième essai.....	6.....	3 C +	300.
Quatrième essai.....	10.....	7 C +	300.
Cinquième essai.....	20.....	17 C +	340.

Sixième essai, au vingt-huitième cercle de torsion le fil s'est rompu.

CINQUIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de laiton, n.° 7, *longueur*, *6 pouces 6 lignes.*

Diminution des amplitudes dans les oscillations.

Premier essai, en tordant de	360^d perd..	10^d en...	2$\frac{1}{2}$ oscillat.
Deuxième essai.....	180.....	10.....	6.
Troisième essai.....	90.....	10.....	13.
Quatrième essai.....	45.....	10.....	31.
Cinquième essai.....	22$\frac{1}{2}$.....	10.....	72.

Digitized by Google

Suite de la cinquième Expérience.

Déplacement du centre de torſion.

En tordant de quatre cercles, le centre s'eſt déplacé de 220 degrés ; mais en voulant tordre de ſix cercles, le fil a caſſé.

XXVII.

DANS le fil employé à cette dernière expérience, la torſion altère moins les oſcillations, & par conſéquent la force élaſtique, que dans toutes les autres ; c'eſt ce qui réſulte du grand nombre d'oſcillations qui a lieu ici avant que le mouvement oſcillatoire ſoit détruit ; c'eſt ce qui réſulte également de la rupture ſoudaine de ce fil, ſans pouvoir déplacer d'un cercle ſon centre de réaction. J'ai généralement trouvé que les fils de laiton, répandus dans le commerce, entre les *n.os* 5 & 8, étoient ceux dont l'élaſticité de torſion étoit la moins imparfaite : en comparant les fils de fer & de laiton ſous les *mêmes numéros*, l'on trouve également que les fils de laiton ont une amplitude d'élaſticité beaucoup plus étendue que les fils de fer.

Au ſurplus, l'expérience préſente beaucoup d'irrégularités dans les réſultats : deux bobines du même fil & du même numéro, ne donnent pas toujours le même déplacement au même angle de torſion, ce qui ne peut être attribué qu'à la manière dont les fils ſont manufacturés, qu'à la plus ou moins grande preſſion qu'ils éprouvent en paſſant ſous la lèvre de la filière, qu'au recuit qu'on leur fait éprouver pour réduire ſucceſſivement le diamètre de numéro en numéro, du gros au petit.

XXVIII.

Première Remarque.

MALGRÉ l'incertitude qui règne dans les expériences des oſcillations pour les amplitudes des étendues, il paroît

Digitized by Google

qu'en dedans de certaines limites, ces altérations ſont à peu-près proportionnelles à l'amplitude de l'oſcillation, comme nous l'avons annoncé dans les remarques ſur la première expérience, & comme toutes les autres le confirment. La réſiſtance de l'air ne peut altérer que très-peu, dans nos expériences, l'amplitude des oſcillations, je m'en ſuis aſſuré par le moyen ſuivant. Le poids de deux livres, qui a ſervi aux expériences de cette ſection, avoit 26 lignes de hauteur & 19 lignes de diamètre; j'ai formé avec un papier très-léger, une ſurface cylindrique du même diamètre que ce poids, mais qui avoit 70 lignes de hauteur: je faiſois entrer une partie du cylindre de plomb dans mon enveloppe de papier, & je formois ainſi un cylindre de 78 lignes de hauteur, ou trois fois plus long que le premier, ce qui auroit dû tripler, dans le mouvement oſcillatoire, les altérations dûes à la réſiſtance de l'air; mais je n'ai jamais trouvé que ces altérations fuſſent d'un dixième plus conſidérable dans ce ſecond cas que dans le premier, le plus ſouvent elles étoient égales; ainſi la réſiſtance de l'air n'entre dans nos expériences, que pour des quantités que l'on peut négliger.

XXIX.

Seconde Remarque.

POUR former une balance de torſion, il faut toujours choiſir les fils qui ont l'elaſticité la moins imparfaite; les fils de laiton ſont de beaucoup préférables à ceux de fer: le choix de la groſſeur dépend des forces que l'on veut meſurer. J'ai une balance magnétique, qui ſera décrite dans nos Mémoires, où je me ſuis ſervi alternativement d'un fil de laiton de 3 pieds de longueur, des *n.os 12* & *73*; la force élaſtique de torſion eſt telle, qu'en tenant ces fils tordus de huit cercles, pendant trente heures, il n'y avoit pas un degré d'altération ou de déplacement dans le centre de torſion.

Digitized by Google

XXX.

Troiſième Remarque.

DANS tous les fils de métal, la réaction de l'élaſticité n'a qu'une certaine étendue: l'iſochroniſme des oſcillations nous apprend que dans les premiers degrés de torſion, la force élaſtique eſt preſque parfaite; mais au-delà de l'angle de torſion qui ſert, pour ainſi dire, de meſure à la force élaſtique, le centre de réaction de torſion ſe déplace preſque en entier de tout l'angle de torſion qui excède celui de la réaction de l'élaſticité. Cependant, comme on peut le remarquer dans les expériences qui précèdent, l'amplitude de la réaction élaſtique n'eſt pas une quantité conſtante pour tous les angles de torſion, elle croît à meſure que la torſion augmente; moins l'élaſticité première, dans le fil ſoumis à l'expérience, a d'étendue, plus cet accroiſſement eſt grand. Un fil de laiton, *n.° 1*, de 6 pouces & demi de longueur, rougi au feu, pour lui faire perdre par le recuit, la plus grande partie de ſon élaſticité, ne donnoit après cette opération, pour le premier cercle de torſion, que 50 degrés de réaction d'élaſticité; mais il avoit acquis, après 90 cercles de torſion, une étendue d'élaſticité de près de 500 degrés dans cet intervalle; du 2 au 3.me cercle de torſion, la réaction de l'élaſticité s'étoit accrue de 12 degrés; du 40 au 41.me cercle de torſion, la même réaction s'étoit accrue de 6 degrés; & du 90 au 91.me cercle de torſion, à peu-près d'un degré, en ſorte que l'accroiſſement de la réaction élaſtique, après que le centre de réaction a été déplacé d'un certain angle, étoit à peu-près en raiſon inverſe de l'angle de déplacement. Il faut avertir qu'après ces 90 cercles de torſion, j'ai voulu tordre de 50 autres cercles le même fil, mais qu'il s'eſt rompu au 49.me, en ſorte que ce fil, avant de ſe rompre, pouvoit être tordu de 140 cercles. Si l'on

Digitized by Google

compare ce réſultat avec la ſuite de la première expérience, où le même fil, *n.° 1*, n'avoit pas été recuit, l'on trouvera qu'après 25 cercles de torſion, la réaction de l'élaſticité étoit de 480 degrés, qu'en tordant de 15 nouveaux cercles, le fil s'eſt caſſé; ce dernier fil ne pouvoit donc éprouver, ſans ſe rompre, que 40 cercles de torſion. En ſuivant dans cette expérience la marche de la réaction élaſtique, l'on en déduira qu'au point de rupture, cette réaction étoit à peu-près égale à celle du fil recuit dans le même point de rupture; d'où il paroîtroit que l'on eſt en droit de conclure que par la ſeule torſion l'on peut donner à un fil recuit toute l'élaſticité dont il peut être ſuſceptible, & que l'écrouiſſement ne peut rien y ajouter; en ſorte que réciproquement, ſi en paſſant à la filière, ou par un autre moyen quelconque, l'on avoit pu donner à notre fil de laiton un écrouiſſement tel, que ſa réaction d'élaſticité eût été de 520 degrés, qui me paroît être celle de nos deux fils au moment de la rupture, pour lors la réaction élaſtique eût été portée à ſon *maximum* par cette première opération: il n'y auroit plus eu de déplacement poſſible dans le centre de réaction de torſion; mais toutes les fois que l'on auroit fait éprouver à ce fil une torſion de plus de 520 degrés, il ſe ſeroit rompu.

XXXI.

Quatrième Remarque.

D'APRÈS les expériences qui précèdent, voici, à ce qu'il paroît, comme l'on peut expliquer l'élaſticité & la cohérence des métaux. Les parties intégrantes du fil de fer ou de laiton, ou d'un métal quelconque, ont une élaſticité que l'on peut regarder comme parfaite, c'eſt-à-dire, que les forces néceſſaires pour comprimer ou dilater ces parties intégrantes, ſont proportionnelles aux dilatations ou compreſſions qu'elles éprouvent; mais elles ne ſont liées entre elles

Digitized by Google

elles que par la cohérence, quantité conſtante & abſolument différente de l'élaſticité. Dans les premiers degrés de torſion, les parties intégrantes changent de figure, s'alongent ou ſe compriment, ſans que les points par où elles adhèrent entr'elles, changent de place, parce que la force néceſſaire pour produire ces premiers degrés de torſion, eſt moins conſidérable que la force d'adhérence; mais lorſque l'angle de torſion devient tel, que la force avec laquelle ces parties ſont comprimées ou dilatées, eſt égale à la cohérence qui unit ces parties intégrantes, pour lors elles doivent ou ſe ſéparer ou gliſſer l'une ſur l'autre. Ce gliſſement de parties, a lieu dans tous les corps ductiles; mais ſi par ce gliſſement de parties les unes ſur les autres, le corps ſe comprime, l'étendue des points de contact augmente, & l'étendue du champ d'élaſticité devient plus grand. Cependant comme ces parties intégrantes ont une figure déterminée, l'étendue des points de contact ne peut augmenter que juſqu'à un certain degré, au-delà duquel ce corps ſe rompt; c'eſt ce qui explique les effets détaillés dans l'article qui précède. Ce qui prouve encore qu'il faut diſtinguer la cauſe de l'élaſticité, de l'adhérence, c'eſt que l'on peut faire varier la cohérence à volonté par le degré de recuit, ſans altérer pour cela l'élaſticité. C'eſt ainſi que lorſque je faiſois recuire à blanc mon fil de cuivre, *n.° 1* des expériences précédentes, il perdoit une grande partie de ſa force de cohérence: avant d'être recuit, il portoit au point de rupture 22 livres, & après le recuit il portoit à peine 12 à 14 livres; mais quoique l'adhérence fût preſque diminuée de moitié par le recuit, & que l'amplitude d'élaſticité fût preſque diminuée dans la même proportion, cependant dans toute l'étendue de réaction élaſtique qui reſtoit au fil recuit, l'élaſticité étoit la même, à angle égal de torſion, que dans le même fil non recuit, puiſqu'en ſuſpendant à l'un & à l'autre le même poids, le temps d'un même nombre d'oſcillations étoit exactement égal dans les deux cas.

XXXII.

UN effet assez curieux du rapprochement des parties dans la torsion des fils de métal, c'est celui qui a lieu lorsque l'on tord un fil de fer, qui par cette seule opération acquiert par le rapprochement des parties, la qualité de prendre le magnétisme à un plus haut degré qu'il ne l'avoit auparavant. Voici ce que l'expérience m'a appris à ce sujet; j'ai pris un fil de fer, tel qu'on les trouve répandus dans le commerce, de la grosseur de ceux qui servent pour les petites sonnettes; une longueur de six pouces, pesoit 57 grains; ce fil de six pouces, aimanté & suspendu horizontalement par un fil de soie détordu & très-fin, faisoit une oscillation en 18 secondes: ce même fil de six pouces de longueur, tordu jusqu'au point de rupture, & aimanté comme la première fois à saturation, par la méthode de la double touche, faisoit une oscillation en 6 secondes; en sorte que le *momentum* de la force directrice pour deux aiguilles égales & semblables, étant comme l'inverse du carré du temps d'un même nombre d'oscillations, le *momentum* magnétique de l'aiguille tordue, étoit neuf fois plus considérable que celui de l'aiguille non tordue: j'aurai occasion de revenir sur cet article dans un autre Mémoire.

XXXIII.

POUR confirmer toute la théorie qui précède relativement à la cohérence & à l'élasticicité, j'ai fait l'expérience suivante.

L'on a fixé, *fig. 4*, au moyen d'une agrafe CD, avec une vis V, une lame d'acier AB, sur le bord d'une table très-solide; cette lame étoit prise & serrée dans sa partie Aa, entre deux plaques de fer E & F, par la vis V: cette lame avoit 11 lignes de large, & demi-ligne d'épaisseur; depuis le point a jusqu'au point B, où étoit suspendu le poids P, il y avoit sept pouces de distance: l'on mesuroit sur la règle verticale rg, de combien le poids P,

Digitized by Google

faiſoit baiſſer la lame *AB* à ſon extrémité *B*. Voici le détail des réſultats, qui ont eu lieu ſuivant les différens poids, dont la lame étoit chargée.

L'on a fait rougir la lame à blanc, & on lui a donné une trempe très-roide; enſuite l'on a attaché en *B* à ſept pouces du point *a*, différens poids. L'extrémité *B* a baiſſé,

Avec un poids d'une demi-livre de..... 8 lignes.
Avec un poids d'une livre de..... 15 $\frac{1}{2}$.
Avec un poids d'une livre & demie de..... 23 +.

L'on a pris cette même lame, & on l'a fait chauffer juſqu'à ce qu'elle eût pris la couleur violette, & qu'elle fût revenue à la conſiſtance d'un excellent reſſort; & l'on a trouvé également, qu'en la chargeant comme la première, l'extrémité *B* a baiſſé,

Avec $\frac{1}{2}$ livre de..... 8 lignes.
Avec 1 livre..... 15 $\frac{1}{2}$ +
Avec 1 $\frac{1}{2}$ livre..... 23 +.

Enfin l'on a fait rougir cette même lame à blanc, & on l'a laiſſé refroidir très-lentement; & l'on a eu, en chargeant l'extrémité *B*, exactement les mêmes réſultats que dans les deux expériences qui précèdent.

Il nous paroît que ces trois expériences prouvent d'une manière inconteſtable, que dans quelqu'état que ſe trouve la lame, les premiers degrés de ſa force élaſtique ne ſont nullement altérés; puiſqu'en tenant compte du bras de lévier, qui diminue à meſure que la lame eſt chargée, les mêmes poids la fléchiſſoient dans les trois états également & proportionnellement à la charge; que lorſqu'on ôtoit ces poids, elle reprenoit exactement ſa première poſition horizontale.

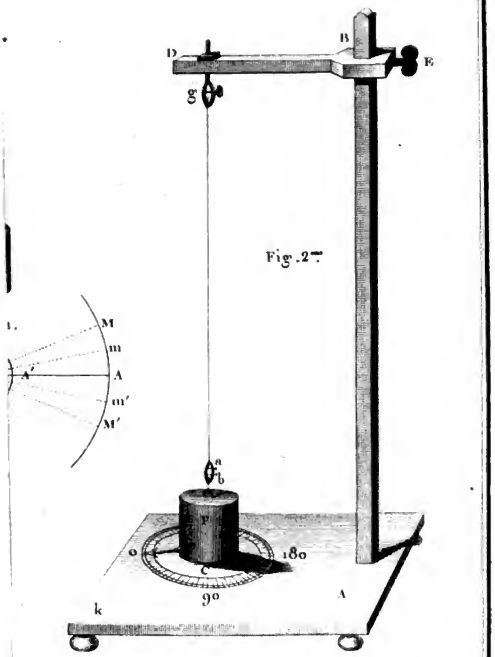
J'ai voulu voir enſuite, quelle étoit la force de cette lame dans ces trois états différens; & dans le cas où le

centre de flexion commenceroit à ſe déplacer, quel ſeroit le degré de flexion où la lame commenceroit à être pliée ſans revenir à ſa première poſition. Voici le réſultat de cette expérience.

J'avois fait tirer d'une planche de tôle d'acier d'Angleterre, trois lames exactement ſemblables à celle de l'expérience qui précède : une de ces lames avoit été trempée très roide, la ſeconde étoit revenue à la conſiſtance d'un excellent reſſort, & la troiſième avoit été recuite à blanc, & refroidie lentement. J'attachois, *fig. 4*, un peſon en *d* à 2 pouces $\frac{1}{2}$ de diſtance du point *a*, & j'avois ſoin d'exercer la traction toujours perpendiculairement à la direction de la lame. Voici ce que l'on a obſervé.

La lame trempée très-roide, ſe rompoit ſous une traction de ſix livres; mais ſous quelqu'angle qu'elle fût fléchie, au-deſſous de celui de rupture, elle reprenoit exactement ſa première poſition. La lame revenue couleur violette, formant un excellent reſſort, ne ſe rompoit que ſous une traction de dix-huit livres; elle ſe plioit juſqu'au point de rupture, d'un angle à peu-près proportionnel à l'angle de torſion, & ſous quelques angles qu'elle fût fléchie avant celui de rupture, lorſqu'on la lâchoit, elle reprenoit ſa première poſition. La lame recuite à blanc & refroidie lentement, ſe plioit juſqu'à une traction de cinq à ſix livres, proportionnellement à cette force de traction, & d'un angle abſolument égal ſous la même force que dans l'état de trempe & de reſſort; mais en tirant enſuite toujours perpendiculairement à la direction de la lame, pour conſerver le même lévier, avec une force de ſept livres, on la plioit ſous tous les angles, ſans qu'il fût beſoin d'augmenter cette force: en la lâchant, elle ſe relevoit ſeulement de la quantité dont elle avoit été primitivement fléchie par une traction de ſix livres; en ſorte que l'angle de réaction de flexion, ſe trouvoit changé de tout l'angle dont on l'avoit fléchi avec une force plus grande que ſept livres.

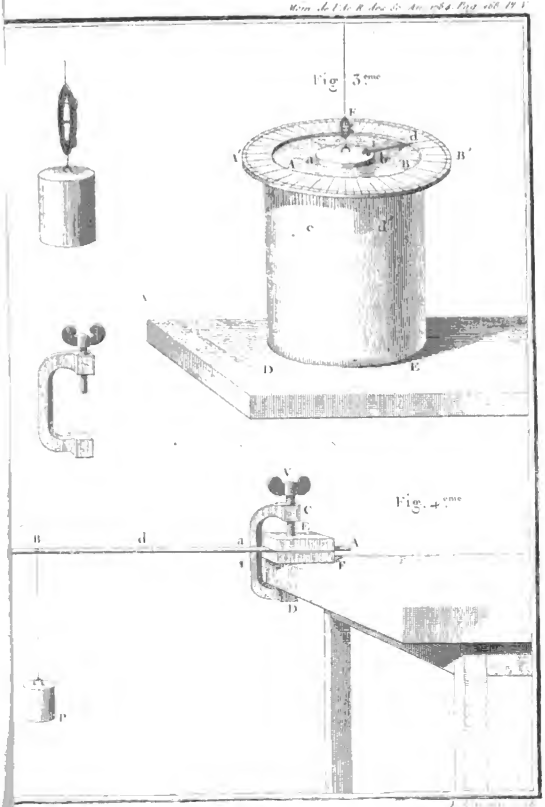
Digitized by Google



L. Lienard sculp.

Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

Ces dernières expériences nous ramènent aux mêmes réſultats que celles qui ont précédé. Il eſt clair que pour avoir une idée de ce qui arrive dans la flexion des métaux, il faut diſtinguer la force élaſtique des parties intégrantes, de la force d'adhérence qui réu it ces parties entr'elles: la force élaſtique dépend, comme nous l'avons déjà dit, de la compreſſion ou dilatation que les parties intégrantes éprouvent, & eſt toujours proportionnelle aux tractions. Ces parties intégrantes ne ſont altérées, ni par la trempe ni par le recuit, puiſque nous venons de voir que dans ces différens états, l'élaſticité eſt la même ſous les mêmes degrés de flexion; mais ces parties intégrantes, ne ſont liées entr'elles que par un certain degré d'adhérence qui dépend probablement de leur figure & de la portion reſpective des différens fluides dont leurs pores ſont remplis, ce qui varie ſuivant la trempe & le recuit. Dans l'acier trempé roide, & dans les bons reſſorts, les molécules intégrantes ne peuvent ni gliſſer l'une ſur l'autre, ni éprouver le moindre déplacement, ſans que le corps ne ſe rompe; mais dans les corps ductiles, dans les métaux recuits, ces parties peuvent gliſſer l'une ſur l'autre, & ſe déplacer, ſans que l'adhérence en ſoit ſenſiblement altérée.

Ce que nous venons d'expliquer pour les métaux, paroît pouvoir s'appliquer à tous les corps; leurs parties ſont toujours d'une parfaite élaſticité, mais les corps ſont durs, mous ou fluides, ſuivant l'adhérence de ces parties intégrantes. Si dans les corps durs, elles peuvent gliſſer l'une ſur l'autre, ſans que leur diſtance ſoit ſenſiblement altérée, le corps ſera ductile ou malléable; mais ſi elles ne peuvent pas gliſſer l'une ſur l'autre, ſans que leur diſtance reſpective ſoit ſenſiblement altérée, le corps ſe rompra lorſque la force avec laquelle le corps ſera tiré ou comprimé, ſera égale à l'adhérence.

Digitized by Google

OBSERVATIONS SUR LES SCHORLS.

Par M. l'abbé HAÜY.

Lû le 28 Juillet 1784.

ON a donné le nom de *Schorls* à une multitude de ſubſtances très-différentes les unes des autres par leur forme & leur aſpect. La Minéralogie ne fournit aucun caractère extérieur qui puiſſe convenir à toutes ces ſubſtances. Pluſieurs Chimiſtes célèbres, entr'autres M.r Bergmann & Kirwen, nous ont donné l'analyſe des ſchorls; mais comme ils n'ont point fait connoître par des deſcriptions nettes & préciſes les divers corps ſur leſquels ils ont opéré, on ne peut ſavoir ſi les réſultats de leur analyſe s'étendent à tous les minéraux que l'on a compris ſous le nom de *ſchorls*.

Je me ſuis occupé depuis quelque temps de la ſtructure des criſtaux de ce genre, & quoique je ſois encore éloigné du terme de mon travail, qui exige une longue ſuite de recherches délicates, je crois cependant avoir déjà ſaiſi quelques points fixes pour établir des diſtinctions marquées entre pluſieurs des ſubſtances dont il s'agit. Je me bornerai à en citer ici deux des plus remarquables, ſavoir le ſchorl noir à ſix pans, terminé par des ſommets à trois faces romboïdales; & le ſchorl blanc, qui ſe préſente aſſez communément ſous la forme d'un criſtal à dix pans, terminé par des ſommets à deux faces. Le premier de ces criſtaux ſe diviſe nettement par des ſections parallèles à quatre de ſes pans, dont les inclinaiſons reſpectives ſont de 120d & 60d. Les criſtaux, appelés *ſchorls blancs*, ſe diviſent auſſi parallèlement à quatre de leurs pans, ſous les mêmes angles de 120 — 60d, ce qui ſemble d'abord

Digitized by Google

rapprocher ces criſtaux du ſchorl noir; mais, 1.° les deux coupes ſont également nettes & brillantes dans ce dernier criſtal, au lieu que dans le ſchorl blanc, l'une des deux réſiſte beaucoup plus que l'autre à l'inſtrument tranchant, & préſente un poli beaucoup plus terne; 2.° on peut faire, dans le criſtal appelé *ſchorl blanc*, des coupes très faciles & d'un poli très-vif, parallèlement à l'une des faces du ſommet, tandis que le ſchorl noir n'admet point de pareilles coupes, ſur quoi je remarquerai que les ſections ne m'ont jamais paru varier dans toutes les ſubſtances d'un même genre dont j'ai examiné la ſtructure, quelque différentes que fuſſent leurs formes.

Ces obſervations m'ont fait préſumer d'abord, que les criſtaux, connus ſous le nom de *ſchorl blanc*, avoient une toute autre ſtructure que les criſtaux de ſchorl noir, d'où il ſuivroit qu'ils ſont auſſi très-vraiſemblablement d'une nature différente. J'ai cherché enſuite s'il n'y avoit point quelque ſubſtance dont la ſtructure eût déjà été expliquée, & à laquelle on pût rapporter les criſtaux dont il s'agit, & j'ai trouvé qu'ils admettoient les mêmes diviſions que les criſtaux de ſpath étincelant, & que leurs formes, dont quelques-unes s'écartent ſenſiblement de celles de ce même ſpath, pouvoient cependant y être ramenées d'après les loix de décroiſſement que j'ai reconnues dans un grand nombre de criſtaux, autant que j'ai pu en juger ſur de petits objets qui n'ont communément qu'une ou deux lignes d'épaiſſeur.

Quant aux autres qualités ſenſibles des criſtaux dont je viens de parler, elles concourent à favoriſer le rapprochement indiqué. Les criſtaux appelés *ſchorls blancs* ont à peu près la même teinte, la même dureté & le même poli que des fragmens de ſpath étincelant blanchâtre, auxquels je les ai comparés.

Digitized by Google

Tels ſont les aperçus auxquels m'ont conduit mes premières recherches ſur les ſchorls. Je me propoſe de donner des Mémoires plus détaillés ſur cette matière, lorſque j'aurai pu me procurer des criſtaux en aſſez grand nombre & d'une forme aſſez prononcée, pour porter dans ce travail la préciſion géométrique, qui ſeule peut imprimer le caractère de la certitude à la nouvelle diſtribution que je propoſe.

MÉMOIRE

MÉMOIRE
SUR LA STRUCTURE
DES CRISTAUX DE FELD-SPATH.

Par M. l'Abbé HAÜY.

Lû le 26 Juin 1784.

ON ſait que le Feld-ſpath, ou ſpath étincelant, eſt une des principales parties compoſantes de ces pierres mélangées, connues ſous le nom de *granits*, & répandues ſi abondamment dans la Nature, où l'on croit qu'elles forment le noyau des plus hautes montagnes. Comme ce ſpath ne ſe trouve communément que par fragmens dans le granit, ainſi que dans les porphyres, ſerpentins, &c. on ne lui a reconnu pendant long-temps d'autre forme que celle de ces fragmens dont Vallerius dit qu'ils ſont cubiques ou rhomboïdaux *(a)*, ſans doute parce qu'ils ont des faces rectangles, & d'autres en loſange. Ces figures avoient été remarquées ſur-tout dans les ſerpentins & les ophites travaillés par l'art, où le ſpath forme ſouvent des taches quadrilatères qui tranchent ſur la couleur de la matière enveloppante.

M. Deſmareſt, de cette Académie, parmi pluſieurs productions du règne minéral, inconnues juſqu'alors, qu'il a recueillies dans ſes voyages, rapporta, en 1770, deux variétés très-intéreſſantes du feld-ſpath, dont il avoit trouvé l'une parmi les laves de l'Auvergne, & l'autre dans le Limoſin. M. Deſmareſt a dépoſé au cabinet du Roi un très-beau criſtal de cette dernière variété, qui eſt en priſme à ſix pans; la première variété eſt auſſi priſmatique, mais ſes pans ſont au nombre de dix: l'une &

(a) Syſtema mineralog. tom. I, p. 204.

Digitized by Google

l'autre ſeront décrites plus au long dans ce Mémoire, comme formes ſecondaires du feld-ſpath.

En réuniſſant les formes dont il s'agit, à celles qui ont été indiquées & décrites par le P. Pini, Profeſſeur d'hiſtoire naturelle à Milan, dans le Mémoire qu'il a publié en 1779, on a l'une des plus nombreuſes ſuites de variétés qui ait été encore obſervée dans les criſtaux d'un même genre. Pour ne point m'engager dans un détail ſuperflu, je réduis toutes les formes du feld-ſpath, à trois principales, je veux dire celle qui eſt en priſme à quatre pans, & les deux qui ont été découvertes par M. Deſmareſt. Il ſera aiſé, avec un peu d'obſervation & d'habitude, de ramener les autres à ces deux dernières, dont elles ne s'écartent ſouvent que par des dimenſions reſpectives différentes, qui font anticiper quelques-unes des faces ſur les voiſines, & diverſifient l'aſpect de certains criſtaux que l'on reconnoît, par un examen plus approfondi, pour avoir été travaillés en quelque ſorte ſur un modèle commun.

Outre que les criſtaux de feld-ſpath méritent déjà de fixer l'attention des Naturaliſtes, pour cette ſeule raiſon qu'ils appartiennent à l'une des ſubſtances les plus intéreſſantes du règne minéral, j'ai été encore excité à faire part à l'Académie de mon travail ſur cet objet, par les nouvelles preuves qu'il m'a paru fournir des principes que j'ai expoſés dans l'eſſai d'une théorie ſur la ſtructure des criſtaux, publié vers la fin de l'année 1783.

Je n'ai pas encore vu le feld-ſpath ſous ſa forme primitive ſimple & dégagée de toutes facettes accidentelles. Cette forme ſeroit celle d'un priſme quadrilatère dont les pans feroient, par leurs inclinaiſons reſpectives, des angles de 120^d — 60^d, & dont les baſes ſeroient perpendiculaires ſur deux pans oppoſés du priſme, & inclinées ſur les deux autres pans, de $111^d 29' 30''$, d'une part; & de $68^d 30' 30''$, de l'autre, ainſi que je le prouverai plus bas.

Digitized by Google

FORMES SECONDAIRES.

Feld-ſpath en priſme oblique, quadrangulaire & rectangle.

Développement. Deux rectangles ſitués aux deux baſes du priſme; deux nouveaux rectangles, formant deux des pans oppoſés du même priſme; deux parallélogrammes obliquangles *MRKL (fig. 1)*, qui en forment les deux autres pans.

Angles des parallélogrammes obliquangles;

$$RML = LKR = 115^d\ 0'\ 8'',$$
$$MRK = MLK = 64^d\ 59'\ 52''.$$

Les priſmes que je viens de décrire, ſe diviſent; 1.° parallèlement à leurs baſes & à ceux de leurs pans qui ſont des rhombes alongés; 2.° parallèlement à deux plans qui feroient avec ces rhombes, des angles de 120^d — 60^d: ces dernières ſections ſont beaucoup plus difficiles à obtenir que les quatre autres, & préſentent un poli beaucoup plus terne & plus mat. Nous verrons bientôt les conſéquences qui réſultent de cette obſervation, relativement aux dimenſions reſpectives des faces de la molécule conſtituante.

Quant à la loi de décroiſſement, qui a lieu dans ce criſtal, il ſera aiſé de la déterminer d'après la ſtructure des variétés ſuivantes.

Feld-ſpath à 10 pans, avec des ſommets à deux faces & deux facettes (b). Fig. 3.

Développement. Deux hexagones irréguliers, tels que *girkme;* quatre trapèzes, *oirn, edqm*, &c. diſpoſés des deux côtés des hexagones *girkme*, de manière que leurs

(b) Je ſupprime ici, pour ne point trop compliquer la deſcription du criſtal, deux autres facettes, que l'on obſerve très-ſouvent à la place des angles ſolides *e*, *t*: je reviendrai dans la ſuite ſur ces facettes.

Digitized by Google

angles, reſpectivement égaux, ſont tournés en ſens contraire ; quatre autres trapèzes *ſonp*, *dxlq*, &c. diſpoſés pareillement dans des ſituations renverſées ; deux pentagones, tels que *zasoc*, ſitués chacun à l'un des ſommets du criſtal & parallèles entr'eux ; deux ennéagones, tels que *zbfhxdegc*, formant les facettes en biſeau des ſommets.

Angles de l'hexagone *girkme*, *ige* = *rkm* = 99^{d}.41′.8″. *rig* = *kme* = 115^{d}.0′.8″. *kri* = *gem* = 145^{d}.18′.44″.

Angles des trapèzes *oirn*, *edqm*. *ion* ou *dgm* = 81^{d}.35′.32″. *oir* ou *emq* = 98^{d}.24′.28″. *irn* ou *dem* = 38^{d}.37′.58″. *onr* ou *edq* = 141^{d}.22′.2″.

Angles des trapèzes *ſonp*, *dxlq*. *ſon* ou *dql* = 76^{d}.52′.28″. *ofp* ou *xlq* = 103^{d}.7′.32″ *onp* ou *xdq* = 54^{d}.9′.22″. *npf* ou *dxl*. 125^{d}.50′.38″.

Angles du pentagone *zaſoc*. *aſo* = 115^{d}.0′.8″. *ſaz* = *ſoe* 122^{d}.29′.56″. *azc* = *ocz* = 90^{d}.

Angles de l'ennéagone *zbfhxdegc*. *dxh* = 89^{d}.10′.32″. *edx* = *fhx* = *ged* = *bfh* = 157^{d}.42′.22″ *cge* = *zbf* = 135^{d}.24′.42″. *gcz* = *bzc* = 134^{d}.35′.18″..

Angles des trapèzes *coig*. *cgi* = 83^{d}.7′.3″. *gio* = 135^{d}.36′.45″. *coi* = 44^{d}.23′.15″. *gco* = 96^{d}.52′.57″.

Les criſtaux de cette forme ſe diviſent parallèlement aux hexagones *girkme*, aux pentagones *zaſoc*, & aux trapèzes *dxlq* : ces dernières diviſions ſont les moins nettes. On voit par-là ce qu'il y auroit à faire pour mettre à découvert le noyau priſmatique qui repréſente la forme primitive. Je ne m'arrêterai point ici à décrire la ſtructure des différentes lames que l'on détache à l'aide des ſections indiquées. Il ſera aiſé, d'après ce que je dirai dans la ſuite,

Digitized by Google

de concevoir que chacune de ces lames n'eſt qu'un aſſemblage de molécules conſtituantes parfaitement ſemblables entr'elles, comme cela a lieu pour tous les autres criſtaux dont j'ai expoſé la ſtructure dans l'ouvrage cité.

Cherchons maintenant les dimenſions reſpectives des molécules & les loix de décroiſſement qu'elles ſubiſſent dans les lames appliquées ſur le noyau. Les plans des hexagones *igcmkr*, & ceux des trapèzes *dxlq*, *fonp*, &c. étant cenſés prolongés juſqu'à ce qu'ils ſe rencontrent, forment une eſpèce de priſme hexagone, dans lequel tous les pans adjacens ont leurs inclinaiſons reſpectives égales entr'elles. De plus, les pans *oirn*, *edqm*, &c. ſont avec les pans voiſins, des angles pareillement égaux de part & d'autre. Cela poſé, ſoit *acdgefmymno* (*fig. 4*), la coupe horizontale géométrique du priſme. Les angles *oac*, *yfe*, & ceux qui ſont formés par *ac*, avec *dg*, par *ao*, avec *nm*, &c. étant tous ſenſiblement égaux entr'eux, auront chacun pour meſure 120 degrés: de plus, puiſque l'on a *acd* = *dge* = *gef*, &c. chacun de ces derniers angles ſera de 150 degrés. D'après ces données, la ſuppoſition la plus naturelle & qui m'a paru la plus propre à expliquer, par des loix regulières de décroiſſement, les poſitions des diverſes faces du criſtal, & en même-temps à rendre raiſon de la différence de poli entre les coupes que l'on peut y faire, eſt celle où le grand côté *su* du rhombe alongé *krus*, eſt double du petit côté *ru*. Dans cette hypothèſe, la poſition des côtés *ca*, *fy*, réſulte d'une loi de décroiſſement par deux rangées de molécules en allant de *f* vers *B*, & de *a* vers *C*; celle des côtés *on*, *ge*, eſt donnée par une ſemblable loi: celle des côtés *cd*, *my*, réſulte d'une loi de décroiſſement double de la précédente, c'eſt-à-dire, par quatre rangées de molécules (*c*). Enfin les côtés

(*c*) J'ai remarqué en général, que ces décroiſſemens moins communs, ſe faiſoient le plus ſouvent ſur les faces latérales des criſtaux: mais le rapport que j'ai adopté ici entre *su* & *ru*, donne

ao, *mn*, *fe*, *dg*, étant parallèles aux faces mêmes des molécules, ne ſont ſujets à aucune loi de décroiſſement. On voit par-là, que tout eſt parfaitement ſemblable dans les parties du criſtal, ſituées ſur les parallèlogrammes *fBAa* d'une part, & *fDCa* de l'autre, quoique les décroiſſemens qui donnent les côtés correſpondans entr'eux ſe faſſent ſuivant des loix différentes. L'uniformité qui en réſulte, eſt une ſuite des propriétés des angles de 120^d & 60^d *(d)*.

En effet, dans le triangle *acp*, nous avons $cap = 60^d$ $\cdot cp = pa$; d'où il ſuit, que $acp = 60$ degrés: d'ailleurs, on a auſſi $pcx = 60^d$, & $dcx = 30^d$, à cauſe de $cx = 2xd$; donc, l'angle acd ſera de $60^d + 60^d + 30^d = 150^d$. On trouvera de même, que les angles *aon*, *nmy*, *fym*, *feg* ſont de 150 degrés, & que les angles *oac*, *yfe* ſont de 120 degrés, comme les donne l'obſervation.

Il ſuit de-là, que l'épaiſſeur *rc* d'une des molécules, eſt à ſa largeur *ru*, dans le rapport de $\sqrt{(3)}$ à 1, ou de 3 à $\sqrt{(3)}$. Suppoſons que la *figure 2* repréſente cette molécule qu'il faut concevoir ſituée par rapport au criſtal, *fig. 3*, de manière que *GOBR* ſoit parallèle à *zasoc*, *GOAD* parallèle à *igemkr*, & *BOAH* parallèle à *dxlq*; ayant mené les lignes *Gp*, *pL*, *CS*, perpendiculaires, l'une ſur *OA*, l'autre ſur *BH*, & la troiſième ſur *GO*, on aura, ſuivant ce qui vient d'être dit, $GP = \sqrt{(3)}$, $CS = 3$, & $PL = 2\sqrt{(3)}$.

Cherchons maintenant la valeur de *CA*, hauteur du parallélogramme *GOAD*. J'ai obſervé que l'angle formé

---

pour toutes les faces des ſommets, dans les différentes variétés du feld-ſpath, des loix ordinaires de décroiſſement, par une & par deux rangées de molécules.

(d) Dans le criſtal de la première variété, la poſition des faces inclinées par rapport aux baſes du priſme, eſt indiquée par la ligne *oc*, perpendiculaire ſur *oy*; d'où l'on conclura aiſément que les décroiſſemens qui donnent ces mêmes faces, ſe font par une rangée de molécules.

Digitized by Google

par le pentagone *zasoc (fig. 3)* avec le trapèze *coig*, étoit ſenſiblement égal à celui que forme ce même trapèze avec le plan de l'hexagone *girkme*. Suppoſons que les décroiſſemens qui donnent le trapèze *coig*, ſe faſſent par des ſouſtractions d'une ſimple rangée de molécules (nous verrons bientôt cette hypothèſe ſe vérifier par l'accord des calculs avec l'obſervation) : d'après l'égalité des angles cités, il eſt facile de voir que l'on aura la hauteur *CA* du rhombe *GOAD (fig. 2)* égale à la hauteur *CS* du rhombe *GOBR*; donc $CA = 3$.

Il faudroit maintenant connoître un des angles du rhombe *GOAD*, d'où l'on déduiroit tous les autres angles-plans de la molécule conſtituante, ainſi que ceux du criſtal, *fig. 3*. Soit *OGD* l'angle qu'il s'agit de déterminer: cet angle eſt le même que *rig (fig. 3)*; or, d'après les meſures priſes ſur le criſtal, l'angle *rig* eſt ſenſiblement égal à l'angle *osa (fig. 5)* au ſommet du pentagone *zasoc*. Concevons que *aso (fig. 5)* ſoit le même triangle iſocèle que l'on auroit, en faiſant paſſer une droite par les points *a*, *o*, *(fig. 3)*. Le priſme du criſtal étant ſuppoſé dans une ſituation verticale, imaginons un ſecond plan triangulaire iſocèle, dont le ſommet ſoit en *s*, & qui s'abaiſſe au-deſſous du plan *aso*, en prenant une poſition horizontale; ſoit *tsu (fig. 5)* ce dernier plan, dans lequel il faut concevoir *tu* égale à la baſe *ao* du triangle *aso*. Menons les hauteurs *fy*, *fk* des deux triangles; menons auſſi *ky*: il eſt aiſé de voir que l'angle *fyk* eſt égal au ſupplément de *gir (fig. 3)*; donc, cet angle ſera auſſi le ſupplément de *aso (fig. 5)*; donc, ayant prolongé *as* indéfiniment, & mené la perpendiculaire *on*, on aura *syk* = *osn*: d'ailleurs, les deux triangles *sky*, *son* ſont rectangles; donc, ils ſont ſemblables. Remarquons maintenant que l'angle *ust* étant égal à celui que forment ſur le priſme de la *figure 3*, les pans qui donnent l'hexagone régulier, on a $ns = 2sk$; d'où l'on tire $sk = \frac{ku\sqrt{(\frac{1}{3})}}{2}$.

Cela poſé, à cauſe des triangles ſemblables *kfs*, *son*,

Digitized by Google

on a $on : os :: sk : sy$, ou bien $on : os :: ku\sqrt{(\frac{1}{3})} : sy :: \frac{1}{3}ao\sqrt{(\frac{1}{3})} : sy$. De plus, $os = \sqrt{[(on)^2 + (ns)^2]}$; ſubſtituant, & élevant tout au carré, $(on)^2 : (on)^2 + (ns)^2 :: (\frac{1}{3}) . (ao)^2 : (sy)^2$.

D'ailleurs, $(ns)^2 = (os)^2 - (on)^2$: donc, $(on)^2 : (os)^2 :: \frac{1}{12}(ao)^2 : (sy)^2$. Maintenant, $on \times os = sy \times ao$; donc, $(on)^2 = \frac{(sy)^2 \times (ao)^2}{(os)^2}$: ſubſtituant, la proportion deviendra $\frac{(sy)^2 \times (ao)^2}{(os)^2} : os :: \frac{1}{12}(ao)^2 : sy^2$; d'où l'on tire $sy = os\sqrt[4]{(\frac{1}{12})}$.

Maintenant, ſi l'on prend pour le rayon r la ligne os, alors sy ſera le ſinus de l'angle soy; donc log. ſin. $soy = \log. r + \frac{1}{4} . \log. \frac{1}{12} = 97302047$, qui répond à $32^{d}.29'.56''$; donc, puiſque le triangle aos eſt iſocèle, on aura $aso = 115^{d}.0'.8''$. Cette valeur ſera auſſi celle de l'angle OGD (*fig. 2*), & l'une & l'autre ſe trouvent confirmées par les meſures priſes ſur le criſtal.

D'après ces données, il ſera facile de trouver le développement de la molécule conſtituante, & l'on aura $OGD = 115^{d}.0'.8''$. $GOA = 64^{d}.59'.52''$. $GOB = 122^{d}.29'.56''$. $OBR = 57^{d}.30'.4''$ $BOA = 103^{r}.7'.32''$. $OBH = 76^{d}.52'.28''$.

Quant aux dimenſions reſpectives des faces de la même molécule, nous avons $GOAD = GO \times AC = GO \times 3\ RbOG = GO \times CS = GO \times 3$, c'eſt-à-dire, que les deux faces dont il s'agit, ſont parfaitement égales. De plus, $GOAD = AO \times GP = AO \times \sqrt{(3)}$, & $BOAH = AO \times PL = AO \times 2\sqrt{(3)}$; d'où il ſuit que la face $BOAH$ eſt double de chacune des deux autres, ce qui explique la différence des coupes que l'on fait dans le criſtal, parmi leſquelles celles qui répondent aux deux faces égales des molécules ſont nettes & d'un beau poli, tandis que celles qui ſe font parallèlement à la plus grande face n'offrent qu'un poli terne & mat, ainſi que je l'ai dit plus haut, parce que les molécules adhèrent

adhèrent entr'elles de ce côté par un plus grand nombre des points.

Maintenant, ayant mené OK, OT, perpendiculaires sur BO, imaginons un plan coupant qui passe par ces deux lignes; ce plan interceptera, sur la face de la molécule, un parallélogramme obliquangle, dont OK, OT seront deux côtés. Il faut prouver que OK est double de OT.

$AC \times GO = GP \times AO$; or, $AC = 3.GP = \sqrt{(3)}$; donc, $3GO = \sqrt{(3)}AO$; donc, $GO : AO :: \sqrt{(3)} : 3$: d'ailleurs $CS = 3.PL = 2\sqrt{(3)}$: donc, $GO \times CS : AO \times PL :: 3.\sqrt{(3)} : 3.2\sqrt{(3)}$: donc, $AO \times PL = 2\,GO \times CS$; donc, aussi $OK \times BO = 2\,OT \times BO$; donc, $OK = 2\,OT$. Cette propriété nous sera nécessaire dans la suite.

Un plan coupant qui passeroit par GPL, intercepteroit un autre parallélogramme obliquangle, dont le grand côté seroit pareillement double du petit côté; mais si l'on faisoit passer un troisième plan coupant par ACS, on auroit un carré.

Cherchons maintenant la loi des décroissemens qui donnent l'ennéagone *zbfhxdegc (fig. 3)*. Soit *girkme (fig. 6)* le même hexagone que celui de la *fig. 3*, l'angle *ige* représentera celui que forme le pentagone *zajoc (fig. 3)*, par son inclinaison sur l'ennéagone *zbfhxdegc*. Or, l'arête *cz* étant perpendiculaire sur *co* & *za*, il est aisé de voir que les décroissemens se font parallèlement à *ro*, *uz (fig. 4)*, c'est-à-dire, sur les angles des lames composantes. Soit *gof (fig. 6)* le triangle mensurateur; la ligne *gf* est plus inclinée sur *gk*, que ne l'est celle qui fait la même fonction dans un autre variété que nous considérerons plus bas, ce qui annonce des décroissemens par une seule rangée de molécules pour le cristal de la *fig. 3*, & par deux rangées pour l'autre cristal. Dans le triangle *fgo*, nous avons $go = OA$ *(fig. 2)*, & par la supposition, $of = DA$ ou GO. Or, à cause des triangles semblables GOP, CAO; $OA : GO :: CA : GP :: 3 : \sqrt{(3)}$;

donc nous pouvons faire go *(fig. 6)* $=$ 3,0000, & $of = V(3) =$ 1,7320. De plus, l'angle gof eſt de $64^{d}\ 59'\ 52''$, comme on l'a vu plus haut. D'après ces données, on trouve, pour la valeur de l'angle ogf, $34^{d}.41'\ 16''$; partant, l'angle igf qui meſure l'inclinaiſon reſpective de deux faces de chaque ſommet, eſt de $64^{d}.59'\ 52'' + 34^{d}\ 41'\ 16'' = 99^{d}.41'\ 8''$, ce qui s'accorde avec l'obſervation.

J'ai dit que les deux angles ſolides, c, ζ *(fig. 3)*, étoient ſouvent remplacés par des facettes, dont une eſt repréſentée par le quadrilatère $\mu\varphi\xi\lambda$ *(fig. 7)*. Pour expliquer cette facette, j'obſerve d'abord que la ligne $\mu\varphi$ eſt parallèle au côté fa; or, ce côté étant dans le ſens d'une des diviſions que l'on peut opérer dans le criſtal, il s'enſuit que la facette dont il s'agit, réſulte d'une loi de décroiſſemens ſur les bords des lames compoſantes. Reprenons le priſme de la *fig. 2*, qui repréſente une des molécules conſtituantes. Le parallélogramme $GOBR$ eſt cenſé être ſitué parallèlement à la face $\zeta afoc$ du criſtal, *fig. 3*, & le parallélogramme $BOAH$ eſt parallèle au pan $dxlq$. De plus, l'angle TOK meſure l'inclinaiſon de $GOBR$ ſur $BOAH$. Soit $TOKM$ *(fig. 10)*, le parallèlogramme formé par les ſections d'un plan coupant qui paſſeroit par TO, OK, *fig. 2*. En faiſant uſage des données indiquées ci-deſſus, on trouvera l'angle TOK de $68^{d}.30'\ 30''$. Suppoſons maintenant que les décroiſſemens qui donnent la facette dont il s'agit, ſe faſſent par des ſouſtractions de deux rangées de molécules. Soit $tm\zeta$ *(fig. 8)* le triangle menſurateur dans lequel on aura $tm = TM$ *(fig. 10)*, $tm\zeta = TMK = 68^{d}.30'.30''$, & par la ſuppoſition $m\zeta = 2MK = TM$, comme je l'ai prouvé plus haut; donc l'angle $m\zeta t$, ou ſon égal $mt\zeta$, ſera de $55^{d}.44'\ 45''$. Ajoutant à cet angle la valeur de TOK *(fig. 10)* $= 68^{d}.30'\ 30''$, on a l'angle total de $124^{d}.15'\ 15''$ pour la meſure de l'inclinaiſon que forme la facette $\mu\varphi\xi\lambda$ *(fig. 7)*, ſur le plan $\zeta afo\mu$, ce que confirme l'obſervation.

Digitized by Google

Quant à l'autre facette qui remplace l'angle ſolide z, quoiqu'elle ſoit différemment ſituée par rapport aux molécules intégrantes, elle a cependant, à l'égard du criſtal entier, la même poſition que la facette $\mu\varphi\xi\delta$, à laquelle elle eſt tout-à-fait ſemblable. Pour le concevoir, obſervons que les décroiſſemens qui donnent la facette $\mu\varphi\xi\delta$, étant apportés au plan horizontal *DCAB (fig. 4)*, ſe font parallèlement à des lignes ao, it, $p\omega$, qui interceptent entr'elles deux rangées de molécules. Maintenant, ſi l'on mène bz parallèle à ca, la portion $cbza$ de l'aſſortiment de rhombes, compriſe entre ces deux lignes, ſera égale & ſemblable aux parties $iaot$, $pit\omega$, renfermées entre les lignes qui meſurent les décroiſſemens relatifs à la facette $\mu\varphi\xi\delta$ *(fig. 7)*: d'où l'on conclura que la facette correſpondante réſulte d'un décroiſſement ſur les angles des lames compoſantes, qui ſe fait parallèlement à ca *(fig. 4)*, par des ſouſtractions de deux rangées de molécules, & de plus que cette facette a la même inclinaiſon que l'autre. Je me borne ici à donner la poſition des facettes dont il s'agit; je m'abſtiendrai auſſi de donner le calcul des angles plans du criſtal. Ceux qui voudront vérifier les valeurs de ces angles, indiquées ci-deſſus dans le développement, trouveront toutes les données néceſſaires, parmi celles qui m'ont ſervi à déterminer les loix de décroiſſement auxquelles eſt aſſujettie la ſtructure du même criſtal.

Feld-ſpath à 6 pans, avec des ſommets à deux faces (fig. 9.).

Développement. Deux hexagones irréguliers $octqfh$; quatre trapèzes $ofgh$, $trlq$, diſpoſés des deux côtés de chaque hexagone; deux pentagones $zafoc$, formant chacun l'une des faces ſituées au ſommet du priſme; deux autres pentagones $zertc$, formant chacun l'autre face du ſommet correſpondant.

Angles de l'hexagone $octgfh$. $oct = hfq = 128^{d}$,

$55'.40''.coh = fqt = 115^{d}.0'\,8''.ohf. = ctq = 116^{d}.4'\,12''.$

Angles du trapèze *fohg*. $ofg = 103.7'\,32''.$ $foh = 76^{d}.52'.28''.ohg = 76^{d}.15'.17''.fgh = 103^{d}.44'\,43''.$

Angles du pentagone *zafoc*. $afo = 115^{d}.0'\,8''.$ $faz = foc = 122^{d}.29'\,56''.azc = ocz = 90^{d}.$

Angles du pentagone *zertc*. $ert = 114^{d}.32'\,30''.$ $zer = ctr.122^{d}.43'\,45''.$ $ezc = tcz = 90^{d}$ *(e)*.

Il eſt facile de ſe former une juſte idée de ce criſtal, en le comparant avec celui de la *fig. 3*, qui eſt l'objet de l'*article précédent*. Suppoſons que dans ce dernier criſtal, les biſeaux *coig*, *zavb*, &c. ſe trouvent ſupprimés, ainſi que les trapèzes *oirn*, *edqm*, & les deux qui leur correſpondent dans la partie oppoſée. On aura un ſolide à 6 pans, terminé par des ſommets à deux faces pentagones. Concevons de plus que le pentagone qui remplace l'ennéagone

(e) Les angles du trapèze *trlq* ſont diſpoſés dans une ſituation renverſée par rapport à ceux du trapèze *fohg*, comme cela a lieu pour le criſtal de la *figure 3*, c'eſt-à-dire, par exemple, que l'angle ſupérieur *o* du trapèze *fohg* eſt égal à l'angle inférieur *q* du trapèze *trlq*. On voit ici que les angles *c*, *h*, ſur la baſe de l'un quelconque des trapèzes dont il s'agit, ne diffèrent guère entr'eux de plus d'un demi-degré: il en eſt de même de quelques autres des angles cités, entre leſquels il ſe trouve des différences ſi légères, qu'il ſeroit difficile de les ſaiſir à l'aide d'un inſtrument; en ſorte qu'il ſemble qu'on auroit pu regarder ces angles comme égaux, & prendre les égalités pour données, ce qui ne laiſſeroit plus ſubſiſter les autres égalités que j'ai adoptées plus haut, comme baſe des calculs. Mais celles-ci m'ont paru s'accorder plus rigoureuſement avec la meſure des autres angles du criſtal, & d'ailleurs nous avons vu qu'une partie de ces égalités conduiſoit à déterminer des étendues égales, relativement à deux des faces de la molécule conſtituante, & une étendue double pour la troiſième; ce qui fournit une raiſon de préférer les égalités dont il s'agit, à celles qui ne ſont relatives qu'à des quantités ſecondaires, telles que des meſures d'angles qu'une nouvelle loi de décroiſſement peut faire varier.

Digitized by Google

bzcgedxhf, ſoit moins incliné ſur le pentagone adjacent que dans le cas préſent, en ſorte que les décroiſſemens qui donnent le pentagone dont il s'agit, ſe faſſent par deux rangées de molécules, au lieu de ſe faire par une rangée ſeulement; le criſtal qui réſultera de cette modification de ſtructure, ſera parfaitement ſemblable à celui de la *figure 9*.

Il n'y a donc ici autre choſe à faire que de chercher l'inclinaiſon reſpective des deux pentagones *zaſoc*, *zertc*, d'après la loi de décroiſſement indiquée. Soit *ogn (fig. 6)* le triangle menſurateur dans lequel nous aurons toujours $go = 3{,}000$. Quant à la ligne *on*, qui meſure la loi des décroiſſemens, elle ſera double de *of*, c'eſt-à-dire, que $on = 2\sqrt{(3)} = 3{,}4640$: d'ailleurs l'angle $gon = 64^{d}.59'\,52''$. Le triangle *ogn*, réſolu d'après ces valeurs, donne pour la meſure de l'angle *ogn*, $63^{d}.55'\,48''$, & par conſéquent l'angle *ign*, qui meſure l'inclinaiſon des deux faces du ſommet, dans le criſtal dont il s'agit ici, eſt de $64^{d}.59'.52'' + 63^{d}\,55'\,48'' = 128^{d}\,55'\,40''$, conformément à l'obſervation.

Il y a des criſtaux dans leſquels la partie du pentagone *zertc*, ſituée vers ſon extrémité *r*, eſt remplacée par un triangle qui a préciſément la même inclinaiſon que l'ennéagone *zbfhxdegc (fig. 3)*. Cette modification qui réunit les deux loix de décroiſſement obſervées dans les criſtaux de forme ſecondaire que nous venons de conſidérer, eſt une des plus intéreſſantes que j'aie rencontrée, parmi les variétés nombreuſes que nous offre le feld-ſpath *(f)*.

(f) Nota. J'ai dit, vers le commencement de ce Mémoire, que les coupes parallèles à *BOAH (fig. 2)* étoient très-difficiles à obtenir: on ſeroit même tenté de croire, d'après l'aſpect de quelques fragmens qui ſe détachent des feld-ſpaths de certains granits, que la face *BOAH* eſt perpendiculaire ſur *GOAD*, & j'ai été moi-même quelque temps dans cette opinion. Mais

Digitized by Google

ayant depuis répété mes épreuves un grand nombre de fois ſur des criſtaux qui avoient un certain degré de pureté, j'y ai obſervé des lames continues, & qui avoient un poli aſſez ſenſible, ſituées de la même manière que je l'ai indiqué dans l'explication de la *figure 2*. Au reſte, les formes des criſtaux du feld-ſpath ont cette propriété particulière, que la molécule dans laquelle les faces *BOAH*, *GOAD*, ſeroient perpendiculaires l'une ſur l'autre, ſatisfait elle-même à la théorie; & ſi l'on ſe donne la peine d'en faire le calcul, on trouvera que les criſtaux ſecondaires ſe déduiſent de cette forme, par des loix ſimples & régulières de décroiſſement: mais l'obſervation détermine ici notre choix entre les deux formes dont il s'agit.

Digitized by Google

Fig. 2.

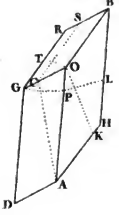


Fig. 3.

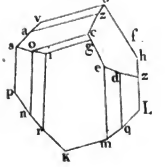


Fig. 4.

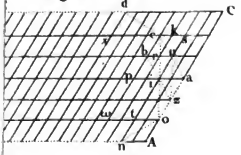


Fig. 5.

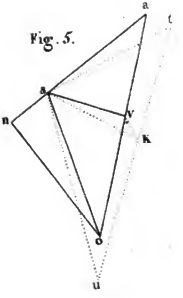


Fig. 7.

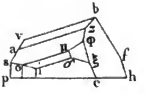


Fig. 9.

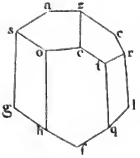
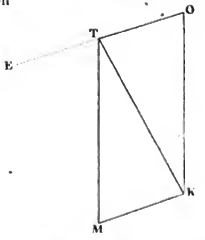


Fig. 10.



Digitized by Google

Digitized by Google

MÉMOIRE

SUR L'EFFET DE L'AIR INFLAMMABLE SUR LES CORPS ORGANISÉS.

Par M. SAGE.

Lû le 24 Mars 1784.

ON ſavoit que l'air inflammable n'étoit point propre à entretenir la vie des animaux, mais on ignoroit qu'il eût la propriété de détruire & de diſſoudre le tiſſu animal. C'eſt à M. Charles que je dois la connoiſſance de ce fait: ce Phyſicien ayant mis des grenouilles dans des flacons remplis d'air inflammable, elles y perdirent promptement la vie, & au bout de quinze jours ou trois ſemaines, il les trouva réſoutes en un fluide d'un gris-rougeâtre. Les parties cartilagineuſes avoient auſſi été détruites, puiſque les os étoient tous ſéparés, comme on peut le reconnoître en regardant le flacon que je mets ſous les yeux de l'Académie.

Deſirant répéter l'expérience de M. Charles, j'ai mis une grenouille dans un flacon rempli d'air inflammable, le 15 Février de cette année; elle s'eſt tuméfiée, & il en ſortit une liqueur ſanguinolente dont la quantité augmente tous les jours. Si la diſſolution de cette grenouille eſt beaucoup plus lente que celle de M. Charles, c'eſt qu'il a fait ſes expériences dans le mois de Juillet.

M. Charles a reconnu que des grenouilles miſes dans des flacons remplis d'air nitreux, d'acide méphitique & d'air déphlogiſtiqué, y périſſoient, mais conſervoient leur forme ſans ſe réſoudre en fluide.

La diſſolution des corps organiſés, par le moyen de l'air inflammable, ſervira peut-être à faire connoître d'où proviennent les maladies dont on eſt attaqué, lorſqu'on habite des pays marécageux, dans des temps chauds.

Digitized by Google

Je terminerai cette obſervation en haſardant une conjecture ſur le mécaniſme de la digeſtion. Nous avalons, avec les ſubſtances qui nous ſervent d'aliment, une grande quantité d'air atmoſphérique qui ſe décompoſe dans l'eſtomac; l'air déphlogiſtiqué, qui en eſt principe, s'y convertiroit-il en air inflammable, ou modifieroit-il en air inflammable une portion de la matière huileuſe, principe des alimens? dans ce cas, l'air inflammable diſſolvant les viandes & les alimens, ne les rend-il point propres à ſe convertir en chyle?

EXPÉRIENCES

Digitized by Google

EXPÉRIENCES

Qui font connoître la néceſſité d'employer une grande quantité de Plomb pour extraire l'Argent contenu dans des terres.

Par M. SAGE.

Lû le 20 Nov. 1784.

DE toutes les opérations métallurgiques, ce ſont celles qui ont pour but l'extraction de l'or ou de l'argent, auxquelles on a porté le plus d'attention, à cauſe de la valeur de ces métaux. Ayant préſidé à une fonte qui a rendu pour quatre cents mille livres d'argent mêlé d'or, on fut obligé de faire uſage de beaucoup de creuſets de Paris, & d'autres de plombagine. Le nitre qui fut employé pour accélérer la fuſion du brûlé, détruiſoit promptement ces creuſets qui retenoient dans leurs pores des grenailles de fin; pour les extraire, on commença par pulvériſer & laver ces creuſets, enſuite on les paſſa au mercure, il reſta environ dix quintaux de cendrées; les ayant eſſayées, je trouvai qu'elles contenoient encore ſix marcs d'argent par quintal, tandis qu'après avoir paſſé au mercure, elles ne retiennent ordinairement guère plus d'une once de fin.

Ceux qui font métier de fondre ces cendrées, n'ayant offert que deux ou trois louis de ces dix quintaux de cendrées, qui contenoient, d'après mes eſſais, environ pour mille écus d'argent mêlé d'or, je me déterminai à les traiter par la ſcorification & la coupellation.

Pour ſcorifier ces cendrées, j'en fis mêler dix quintaux avec quinze cents livres de chaux de plomb, huit cents livres de ſcories vitreuſes, & cinquante livres de chaux éteinte: je fis fondre ces trois mille cinq cents livres de matière dans un fourneau à manche, qui avoit ſix pieds de haut, huit pouces de large & dix-huit de long. Ce

mélange fut fondu en cinquante heures, & produisit six cents livres de plomb d'œuvre; il y a, comme on voit, plus de moitié de plomb de perdu, dont une partie s'est exhalée pendant la fonte, sous forme de massicot, l'autre s'est combinée avec les terres des creusets, & a déterminé leur vitrification.

Les six cents livres de plomb ayant été coupellées au fourneau allemand, rendirent quarante-huit marcs d'argent; mais ce produit n'étant pas relatif à celui que j'avois obtenu des cendrées, je m'assurai par l'essai, de la quantité de fin que contenoient les scories vitreuses, & je reconnus qu'elles produisoient quatre onces d'argent par quintal.

Les trois mille six cents livres du mélange de la première scorification, m'ayant fourni vingt quintaux de scories, je les fis mêler avec trois cents livres de litharge & quatre cents livres de crasse de plomb; cette seconde scorification fut faite en vingt-quatre heures, & produisit quatre cents livres de plomb d'œuvre: les scories étoient à l'état de verre verdâtre, semblable à celui des bouteilles de Sève.

Ces quatre cents livres de plomb ayant été coupellées, rendirent neuf marcs quatre onces d'argent: ces deux quantités réunies offrent un produit net, conforme à l'essai des cendrées.

Il résulte de ces expériences & de celles que j'ai faites en petit, qu'il faut au moins trois parties de chaux de plomb pour enlever l'argent qui se trouve mêlé avec une partie de terre.

Je dois prévenir qu'il faut préférer dans la scorification, la litharge à la crasse des plombiers, qui est une chaux de plomb souvent mêlée d'étain. Lorsque ce dernier métal se trouve avec le plomb, dans la proportion d'un quart, il est impossible de lithargirer le plomb, parce que la coupelle se hérisse, & quand on enlève la chaux d'étain avec le rincart, elle entraîne toujours une portion d'argent; d'ailleurs, le plomb qui reste sur la coupelle avec l'argent, retient toujours de l'étain qui empêche la coupelle de

Digitized by Google

passer. M'étant trouvé dans un cas semblable, j'ai affiné l'argent en le fondant à diverses reprises avec du nitre qui a calciné & scorifié le plomb & l'étain qui restoient dans le gâteau d'argent.

ANALYSE

D'une Mine de plomb terreuse, jaunâtre, antimoniale & martiale, en masse formée de différens lits, se trouvant par filons à Bonvillars en Savoie, à six lieues de Chambéri, sur la route de Piémont.

Par M. SAGE.

CETTE mine ayant été exposée au feu dans un têt, n'exhala aucune odeur; après avoir été tenue rouge pendant une demi-heure, elle a perdu dix livres par quintal. Dans cette expérience, il n'y a que l'eau qu'elle contient qui se dégage; on peut l'obtenir si l'on distille cette mine dans une cornue au fourneau de réverbère.

Si l'on mêle cette mine de plomb terreuse antimoniale avec de la poudre de charbon, & si on la calcine ensuite dans un têt, il s'en dégage de l'arsenic sous forme de vapeurs blanches; il s'exhale ensuite de l'acide sulfureux & des fleurs blanches d'antimoine. Cette expérience fait connoître que, dans cette mine, les terres métalliques y sont combinées avec les acides arsenical & vitriolique; acides qui sont fixes au feu, quand ils sont engagés dans des terres, & qu'ils ne sont pas combinés avec du phlogistique.

Ayant distillé de la mine de plomb terreuse antimoniale, avec de la poudre de charbon, il s'est sublimé dans

le col de la cornue un peu de régule d'arſenic mêlé d'orpin.

La mine de plomb terreuſe antimoniale, ayant été réduite avec du flux noir & de la poudre de charbon, a produit, par quintal, cinquante-quatre livres d'un régule gris à facettes; il s'étend un peu ſous le marteau, & s'y pulvériſe.

Ce régule mixte, compoſé d'environ parties égales de plomb & d'antimoine, ayant été coupellé, l'antimoine a été rejeté, & a fait un bourlet d'un jaune-brunâtre * ſur le baſſin de la coupelle où il eſt reſté une minicule d'argent.

* Il doit cette couleur à du fer.

Digitized by Google

OBSERVATION
SUR UNE SUBSTANCE
Ramaſſée aux pieds de jeunes Peupliers d'Italie.

Par M. l'abbé TESSIER.

LE 4 Juillet dernier, j'allai viſiter, ſur le ſoir, une pépinière royale qui eſt à une demi-lieue de la ville de Tours. En parcourant les différentes ſortes d'arbres qu'elle renfermoit, j'aperçus, dans un carré rempli de jeunes peupliers d'Italie, la ſurface de la terre couverte en partie d'une matière blanche, aſſez ſemblable de loin au greſil: c'étoit ſur-tout autour des pieds des plus jeunes peupliers que cette matière étoit en plus grande quantité; pour peu qu'on la touchât, ſes parties ſe diviſoient & ſe réuniſſoient comme des globules de mercure. Je ne lui trouvai qu'une foible odeur de miel, mais elle avoit la ſaveur ſucrée, & s'attachoit aux doigts ſi on la preſſoit.

Lû le 28 Février 1784.

Les peupliers avoient ſept à huit pieds de hauteur au plus; leurs feuilles, à la partie ſupérieure, étoient pour la plupart enduites de la même matière qui paroiſſoit luiſante. Il s'y étoit formé un grand nombre de gales d'un rouge vermeil extérieurement, & remplies d'inſectes vivans, & d'une grande quantité de la matière que j'avois vue aux pieds des tiges.

J'ai remarqué que les rangées de peupliers, qui étoient le plus expoſées au ſoleil, étoient auſſi le plus environnées & couvertes de la ſubſtance dont il s'agit. Les autres arbres de la pépinière, de jeunes peupliers de la Caroline, des peupliers d'Italie même à tiges élevées, n'en avoient pas autour de leurs pieds.

Le temps ne me permit de ramaſſer que quelques gros

Digitized by Google

ou environ de cette ſubſtance; je les enfermai, avec la terre & les feuilles qui s'y étoient jointes, dans du papier qui eſt reſté ſur ma table pendant plus de quatre mois, ſans que la ſubſtance en ait reçu la moindre altération. M. Berthollet a bien voulu l'examiner; après l'avoir gardée auſſi quelque temps, il l'a fait diſſoudre dans l'eau & évaporer à petit feu. Sa couleur blanche, moins ſenſible dans le papier, où elle étoit mêlée à de la terre & à des inſectes, qu'aux pieds des arbres & ſur leurs feuilles, s'eſt perdue entièrement par l'évaporation, en ſorte que la matière qui en a réſulté eſt d'un brun-foncé: la concentration a rendu l'odeur de miel plus forte & la ſaveur plus douce. C'eſt une ſubſtance ſucrée, mêlée, à ce qu'il paroît, d'un peu de gomme; mais cette ſubſtance ſucrée a les caractères du véritable miel. On aperçoit quelquefois pendant l'été, ſur les feuilles de diverſes plantes, une matière blanche, pareille à celle qui fait l'objet de cette obſervation; on lui a donné le nom de *miellat*. Les melons & autres cucurbitacées élevées ſur des couches, y ſont particulièrement ſujets, comme j'ai eu occaſion de le voir, ſur-tout le matin; mais je ne crois pas que cette matière ſe rencontre en auſſi grande abondance que je l'ai trouvée dans la pépinière de Tours, ſur les feuilles & aux pieds des peupliers d'Italie, puiſque les feuilles de ces arbres, & la terre qui environnoit leurs tiges, en étoient pour ainſi dire couvertes.

C'eſt à la chaleur ſans doute qu'on doit attribuer cette extravaſion de la matière ſucrée des peupliers d'Italie; car elle a paru dans un pays dont la latitude eſt propre à cauſer une chaleur aſſez forte. La Touraine, comme on ſait, produit des fruits plus ſucculens que n'en produiſent les provinces qui s'écartent de ſa poſition; l'alberge & les prunes y ſont meilleures qu'ailleurs; le cardon, le choux-fleur & l'anis, plantes originaires des pays chauds, y donnent de bonnes graines: d'ailleurs, c'étoit au mois de Juillet, & dans une année regardée comme plus chaude que beaucoup d'autres. La matière ſucrée s'eſt trouvé mêlée à une

Digitized by Google

partie gommeuſe, ce qui n'eſt pas étonnant, vu l'analogie & les rapports de ces ſubſtances contenues dans les vaiſſeaux des arbres. Des inſectes, aſſurés d'une nourriture convenable pour leurs petits, ayant piqué les feuilles des peupliers en cet état, ont formé les gales que j'y ai vues.

Les abeilles ſont très-avides de la matière ſucrée qui s'extravaſe & s'amaſſe ſur les feuilles des végétaux; c'eſt un miel tout fait qui leur coûte moins à recueillir que celui qu'elles pompent dans les nectaires des fleurs. Auſſi voit-on, dans les momens où cette matière eſt abondante, leur activité au travail ſe renouveler; alors elles vont aux champs de grand matin, & ne ceſſent d'y aller que très-tard, comme ſi elles avoient du regret de ne pas tout ramaſſer. Les perſonnes qui ſoignent des ruches s'en aperçoivent, & ont ſoin d'y mettre des hauſſes que les abeilles rempliſſent en peu de temps. C'eſt ſans doute dans une circonſtance favorable par l'abondance du miellat répandu ſur les plantes, que le Curé du Tillay-le-Péleux, au rapport de M. Duhamel, retira quatre cents livres de miel d'un ſeul eſſaim, dont la ruche étoit poſée ſur un cuvier percé qui ſe trouva tout rempli de gâteaux.

Digitized by Google

OBSERVATION

Sur les ſuites d'une Grêle tombée le 25 Mai 1783, dans un canton de la Beauce.

Par M. l'Abbé TESSIER.

Lû en 1784.

LA grêle eſt un des fléaux que les cultivateurs redoutent le plus; elle leur enlève en un inſtant le fruit de leurs peines, les moyens de ſubſiſter & d'entretenir leurs beſtiaux; elle les met dans l'impuiſſance de ſatisfaire à leurs engagemens. C'eſt au vigneron, propriétaire de vignes, qu'elle fait le plus grand tort, parce que les vignes frappées de grêle, ſont quelquefois pluſieurs années ſans rapporter, ou ne rapportent que très-peu les années ſuivantes: le laboureur y perd ſeulement ſa récolte de l'année, perte toujours trop conſidérable pour lui. Les orages qui lancent la grêle, ont lieu le plus ſouvent, un mois ou environ avant le temps de la moiſſon, parce que c'eſt la ſaiſon des plus grandes chaleurs. Les grains, à cette époque, ſont formés dans les épis, les tiges fortes & capables de réſiſtance; auſſi la grêle les coupe-t-elle preſque toutes, ſi elle n'eſt pas accompagnée de beaucoup de pluie, & réduit des campagnes belles & riches, à l'état le plus triſte & le plus malheureux.

L'année dernière, qui fut remarquable par ſes brouillards, le fut encore par les orages multipliés & funeſtes qu'ils occaſionnèrent: on vit même avant que les brouillards paruſſent, la grêle exercer ſes ravages dans différens pays. Celle qui fait l'objet de cette obſervation, tomba le 25 Mai, dans un canton de la Beauce, que j'habite ſouvent; elle étoit groſſe & abondante; en quelques minutes, la plus grande partie des ſeigles & des fromens fut détruite entièrement: il ne reſta que quelques débris de paille, comme

Digitized by Google

comme après la récolte faite. Les autres grains, tels que les avoines, les orges, & ceux des prairies artificielles, n'étoient pas assez avancés pour en souffrir.

Les premières idées qui se présentèrent, furent de labourer les champs grêlés, & d'y semer des grains d'une végétation rapide; mais en y réfléchissant, on pensa que la terre, fortement battue par la grêle & par la pluie qui la suivit, ne pourroit être assez-tôt ameublie pour être ensemencée avec avantage: quelques particuliers seulement le tentèrent. Les laboureurs qui avoient de grandes exploitations, abandonnèrent ce projet, & préférèrent de ne point interrompre leurs autres travaux, espérant d'ailleurs que l'année suivante ils en seroient dédommagés en partie par une augmentation de produit en avoine dans ces mêmes champs.

Bientôt après on vit de nouvelles tiges s'élever à la place de celles qui avoient été détruites, & en plus grand nombre même que les premières. En un mois elles parvinrent à la hauteur ordinaire, & l'on ne s'aperçut plus des effets de la grêle dans les champs de froment, où elle n'avoit rien épargné; dans ceux où une partie des tiges avoit été conservée, les repousses formoient avec elles un contraste de vert & de jaune, capable d'étonner le voyageur. Il n'y avoit pas une seule repousse dans les champs de seigle, trop avancés quand la grêle survint, pour fournir de nouvelles tiges; on sait d'ailleurs que le seigle a moins de facilité pour taller, que le froment.

Le temps fut favorable à la végétation des repousses de froment; de fréquens orages amenèrent des pluies chaudes très-avantageuses; chaque souche produisit trois ou quatre tiges, plus fines que les premières. Il s'y forma des épis aussi beaux, qui fleurirent à la fin de Juin & au commencement de Juillet, c'est-à-dire, un mois après le terme ordinaire de la floraison du froment.

Ce seroit ici le lieu de peindre la satisfaction du laboureur, dont l'espérance renaissoit à la vue d'une récolte inattendue: on se la représente facilement, & je dois m'occuper

plus particulièrement des faits physiques. Les laboureurs, dont les champs avoient été le plus maltraités, se regardoient comme les mieux partagés, parce que tout ayant repoussé, ils ne devoient pas craindre, en attendant la maturité des nouveaux épis, de perdre le grain contenu dans les anciens, plus hâtifs de beaucoup; c'étoit ce que craignoient avec raison ceux dont les champs n'avoient été grêlés qu'à moitié ou au quart.

Tout se passa bien jusqu'au 1.er Août; ce jour-là, & les suivans, il fit une chaleur considérable, accompagnée d'un vent du sud, qui en accélérant trop promptement la dessiccation des tiges de repousses, échauda les grains, qui restèrent petits & retraits. On commença à les couper vers le 18 Aout.

Persuadé qu'il seroit intéressant de suivre jusqu'au bout cette observation que je me suis trouvé à portée de faire, j'ai comparé entr'eux les produits des récoltes des champs de même nature, dont les uns ont repoussé de nouvelles tiges, après avoir été ravagés par la grêle, & les autres ont été à l'abri de ce fléau.

Un arpent de terre qui n'a point été exposé à la grêle, communément l'année dernière, année moins abondante qu'on ne l'a cru, a produit vingt douzaines de gerbes, qui ont rendu par douzaine deux boisseaux de froment, mesure de Paris, ou trois setiers & un tiers de setier. Un arpent de terrein grêlé a fourni à peu-près la même quantité de gerbes, mais on n'en a obtenu qu'un boisseau de froment par douzaine, ou un setier & demi & un sixième de setier par arpent.

Chaque gerbe d'un champ non grêlé, contenoit environ neuf livres de paille; chaque gerbe d'un champ grêlé, n'en contenoit que sept: celle-ci étoit beaucoup plus fine, plus tendre & plus agréable aux bestiaux. J'observerai ici que les bêtes à laine ne veulent ni la paille de blé, ni les herbes des prairies hachées par la grêle, quelque soin qu'on prenne pour les y forcer.

Digitized by Google

Quatre boiſſeaux & un quart de froment non grêlé, peſoient quatre-vingt-cinq livres, ou vingt livres par boiſſeau; la même meſure de froment grêlé, étoit du poids de quatre-vingt-deux livres, c'eſt-à-dire, peſoit trois livres de moins; ce qui fait par ſetier une différence de ſept à huit livres: ce dernier froment étoit plus petit & plus maigre.

J'ai fait moudre, avec toute l'attention poſſible, les quatre-vingt-cinq livres de froment non grêlé; ils ont produit cinquante-ſix livres de farine blanche, huit livres & demie de farine biſe, huit livres de recoupe & huit livres de ſon. Le froment grêlé, peſant quatre-vingt-deux livres, a auſſi été moulu de la même manière; on en a retiré cinquante-ſix livres de farine plus blanche que la précédente, huit livres de farine un peu plus biſe que la précédente, dix livres de recoupe & ſept livres de ſon: les gruaux des farines blanches ont été moulus deux fois, & ceux des farines biſes une fois.

Les pains que j'ai fait faire avec deux livres de chacune de ces quatre farines & ſix onces de levain, étoient, pour la blancheur, conformes à celle des farines dont ils avoient été formés. La farine blanche du blé grêlé eſt celle qui, au pétriſſage, a abſorbé le plus d'eau; il lui en a fallu une once & demie & un demi-gros de plus, c'eſt-à-dire, une livre ſix onces & cinq gros & demi, au lieu d'une livre cinq onces & un gros qu'on a employés pour chacune des autres. Je ne ſuis pas aſſez ſûr du poids des pains pour en faire mention ici; ils étoient bien levés & de bon goût: les deux blancs m'ont paru avoir une ſaveur égale.

Cette obſervation n'a rien ſans doute de très-important en ſoi, mais elle offre un fait phyſique obſervé avec attention, & mieux ſuivi peut-être qu'il ne l'a encore été; ſous ce point de vue, j'ai cru qu'il méritoit d'être conſervé. On en peut conclure que, quand la grêle ravage des champs avant l'époque où les grains ſont formés dans les épis, il y a lieu d'eſpérer que ſi le temps eſt favorable, il repouſſera d'autres tiges qui produiront du grain de bonne qualité: alors les vaiſſeaux des racines ne ſont pas encore oblitérés,

Digitized by Google

& peuvent élever de la terre les ſucs ou l'humidité néceſſaires à la formation de nouvelles tiges; ce qui ne peut avoir lieu que dans un bon terrein comme celui dont il s'agit dans cette obſervation, un terrein de mauvaiſe qualité ſeroit trop épuiſé pour procurer le même avantage. Il faut encore ſe rappeler que l'année dernière a été ſingulièrement favorable à une ſeconde végétation, par les pluies chaudes & fréquentes qui ſont tombées; en ſorte que dans une année sèche, telle que celle-ci, par exemple, où, dans quelques endroits du pays Chartrain, on n'a pas eu de pluie depuis plus de quatre mois, les repouſſes euſſent été foibles, & n'euſſent vraiſemblablement porté que des épis imparfaits. Des particuliers ont retourné leurs champs immédiatement après la grêle, pour y ſemer de l'orge, ils n'en ont preſque pas récolté, parce que la ſaiſon étoit trop avancée; d'autres ont préféré d'y ſemer de la veſce, qu'ils ont fait manger en herbe à leurs beſtiaux; mais ceux qui ont tout abandonné à la Nature, me paroiſſent avoir gagné davantage, puiſque indépendamment du fourrage, ils ont retiré une certaine quantité de froment.

Digitized by Google

EXAMEN

DE LA DERNIÈRE RÉVOLUTION DE JUPITER, Et des élémens actuels de ſon orbite.

Par M. DE LA LANDE.

Lû le 24 Nov. 1784.

DEPUIS l'impreſſion de mes Tables aſtronomiques, en 1771, j'ai continué d'examiner les oppoſitions des Planètes, pour conſtater les élémens que j'avois adoptés, ou reconnoître les variations qui pourroient y arriver. Jupiter & Saturne, ſont les deux Planètes les plus ſuſceptibles de dérangement à cauſe de la lenteur de leur mouvement; il y faudra joindre la planète de Herſchel, lorſque nous l'aurons obſervée aſſez long-temps pour appercevoir ſes inégalités. Celles de Jupiter, produites par l'action de Saturne, ont été calculées par M. Euler *(Prix de 1752)*, & par Mayer, *(Connoiſſance des Temps, 1763 & 1764 *)*. M. Wargentin, avoit employé dans ſes Tables de Jupiter, ces inégalités, & en les publiant dans mon *Aſtronomie*, en 1771, j'avois adopté, comme M. Wargentin, une augmentation de $2' 15''$ par ſiècle, dans l'équation de l'orbite de Jupiter, avec des perturbations produites par l'action de Saturne, dont la plus forte étoit de $4' 38''$, & dont la ſomme va juſqu'à $10' 14''$; mais je vois que tout cela ne ſauve point les inégalités, & je trouve encore $5'$ d'erreur dans l'oppoſition de 1784. Je crois donc qu'il eſt plus naturel de laiſſer encore aux Tables leur ancienne ſimplicité, & de chercher les élémens de l'orbite de Jupiter en la ſuppoſant purement elliptique; mais en variant & combinant un grand nombre d'oppoſitions dans les divers

* Dans le volume de 1763, *page 128*, il faut changer les ſignes des Tables II & III.

Digitized by Google

points de l'orbite, & les différentes configurations avec Saturne. La méthode que j'ai donnée dans les *Mémoires de 1775, page 232*, eſt ſi ſimple, ſi courte & ſi commode, elle donne tous les élémens de l'orbite en ſi peu de temps, que l'on ne doit pas négliger de repaſſer ſouvent les orbites des Planètes; c'eſt ainſi que l'on parviendra à déterminer les valeurs moyennes des élémens, indépendamment des perturbations, & qu'on reconnoîtra les dérangemens qui pourroient y ſurvenir.

Celui que j'ai indiqué dans le mouvement de Saturne, *(Mémoires de l'Académie, 1765, page 361)*, eſt ſi conſidérable, qu'il eſt à craindre que nous n'en trouvions par la ſuite un pareil dans le mouvement de Jupiter; c'eſt ce que M. Wargentin me paroiſſoit ſoupçonner dans une lettre qu'il m'écrivit le 12 Janvier 1781, où il me diſoit: *une irrégularité dans le lieu de Jupiter lui-même, qui a lieu depuis 1773, eſt en partie cauſe de l'irrégularité apparente des Satellites.* Ceſt ce que j'ai voulu vérifier par les recherches dont je rendrai compte dans ce Mémoire, où l'on verra que l'irrégularité eſt peu ſenſible.

Voici trois oppoſitions obſervées dans les deux apſides, & dans un des points de la plus grande équation.

ANNÉES.	MOIS & JOURS.	TEMS MOYEN de l'oppoſit.	LONGITUDE ſur L'ÉCLIPTIQUE.	Réduc.	CORRECT. des TABLES.	ANOMALIE moyenne des TABLES.	MOUVEMENS OBSERVÉS.
		H. S	S. D. M. S.	S.	M. S.	S. D. M. S.	S. D. M. S.
1773.	Sept. 26	15. 17	0. 4. 16. 49	+ 4	+ 0. 52	5. 24. 3. 38	3. 15. 55. 51.
1777.	Janv. 9	12. 28	3. 20. 12. 33	+ 14	— 12. 13	9. 3. 52. 11	3. 2. 0. 57.
1780.	Avril 11	1. 40	6. 22. 13. 54	— 13	— 4. 2	0. 12. 32. 20	
							6. 17. 56. 48.

Digitized by Google

A la ſuite des longitudes obſervées par rapport à l'écliptique, j'ai mis les réductions qu'il faut employer pour les réduire à l'orbite de Jupiter; enſuite la correction de mes Tables, ou la quantité qu'il faut y appliquer pour avoir les longitudes obſervées, mais ſans avoir égard aux perturbations, ni à l'augmentation de l'équation, depuis 1760.

J'ai mis enſuite l'anomalie moyenne de Jupiter, ſuivant mes Tables, pour ſervir à mes différentes hypothèſes; enfin les mouvemens obſervés, ou les différences des longitudes vraies ſur l'orbite, qui doivent être repréſentées exactement, & ſervent à vérifier mes hypothèſes.

Première hypothèſe. Avec les anomalies & les équations qui ſont dans mes Tables, je trouve le mouvement total de 1773 à 1780, trop fort de 4′ 54″, comme on le voit par la ſomme des erreurs des Tables qui ſont en ſens contraire.

En diminuant l'aphélie, ou augmentant les anomalies moyennes, de 20′, je trouve cet excès diminué de 3′ 51″.

Ainſi, pour le faire diſparoître en entier par le ſeul changement de l'aphélie, il faut ajouter 25′ 27″ aux anomalies; la plus grande équation étant ſuppoſée comme dans mes Tables, de 5ᵈ 34′ 1″.

Seconde hypothèſe. Avec les anomalies augmentées de 25′ 27″, & les Tables d'équations qui ſont dans Halley, je ne trouve plus le mouvement trop fort que de 12″, entre 1773 & 1780. Pour corriger cet excès, je trouve qu'il ſuffit d'ajouter encore 1′ 2″ de plus aux anomalies, c'eſt-à-dire, en total, 26′ 29″; la plus grande équation étant comme dans Halley, 5ᵈ 31′ 36″.

Troiſième hypothèſe. Ayant calculé la ſeconde obſervation, ou la longitude pour 1777, dans chacune de ces deux hypothèſes qui ſatisfont au mouvement total, 6ᶜ 17ᵈ 56′ 48″; je trouve dans la première hypothèſe, que le mouvement de 1773 à 1777, ſeroit trop petit de 51″,

Digitized by Google

& dans la ſeconde hypothèſe, de 3′ 36″, ce qui fait 2′ 45″ de plus. Ainſi ces deux hypothèſes qui diffèrent de 1′ 2″ pour les anomalies, & de 2′ 23″ pour la plus grande équation, produiſent 2′ 45″ de différence pour le mouvement de 1773 à 1777. Par le moyen de deux petites proportions, je trouve que, pour augmenter de 51″, ce mouvement, & corriger l'erreur de la première hypothèſe, il faut augmenter l'équation de 45″, & diminuer de 19″ la correction de l'aphélie; & par-là on ſatisfera au mouvement $3^{c}\ 15^{d}\ 55'\ 51''$, comme au mouvement total, $6^{c}\ 17^{d}\ 56'\ 48''$.

Pour calculer les trois longitudes avec des anomalies augmentées de 25′ 8″, & avec la plus grande équation $5^{d}\ 34'\ 46''$, il faut augmenter les trois équations de 5″, de 45″ & de 9″, à proportion de la différence qu'il y a entre les Tables de Halley & les miennes. C'eſt le moyen le plus facile d'avoir promptement les équations comme on le voit dans la Table ci-deſſous, où j'ai mis pour trois degrés d'anomalie moyenne, les équations de Jupiter, ſuivant mes Tables & ſuivant celles de Halley.

ANOMAL. MOYENNE.	ÉQUATIONS.		POUR 45 ſecondes de DIFFÉRENCE.
	Mes TABLES.	HALLEY.	
s. d.	d. m. s.	d. m. s.	s.
5. 24	0. 37. 9	0. 36. 52	5.
9. 4	5. 31. 14	5. 28. 51	45.
0. 13	1. 10. 54	1. 10. 26	9.

Par les quantités dont ces équations diffèrent, on trouve aiſément de combien différeroient celles qui ſuppoſeroient pour

pour la plus grande équation 45″ de plus que ma Table; par exemple, pour 5ᶠ 24ᵈ, les équations diffèrent de 17″ dans les deux Tables, ou la plus grande équation diffère de 2′ 23″; donc pour 45″, il y auroit 5″, & l'équation ſeroit 37′ 14″ dans une nouvelle Table que l'on auroit dreſſée d'après cette plus grande équation, 5ᵈ 34′ 46″.

Ayant ainſi calculé les trois longitudes, je les trouve plus grandes de 1′ 39″ que celles qui ont été obſervées; c'eſt ce qu'il faudroit ôter des époques de Jupiter, dans mes Tables, pour ſatisfaire aux trois oppoſitions que je viens d'employer, en même temps qu'on ajouteroit 45″ à la plus grande équation, & qu'on ôteroit 24′ 57″ de l'aphélie.

Voici trois autres oppoſitions de Jupiter, dont les lieux ſont aſſez voiſins des apſides & du point de la plus grande équation, pour pouvoir donner aſſez bien les mêmes élémens.

ANNÉES.	MOIS & JOURS.	TEMPS MOYEN de l'oppoſit.	LONGITUDE ſur L'ÉCLIPTIQUE.	REDUCT.	CORRECT. des TABLES.	ANOMALIE moyenne de JUPITER.
		H. M.	S. D. M. S.	S.	M. S.	S. D. M. S.
1779.	Mars 12	12. 31	5. 22. 18. 37	+ 14	— 4. 0	11. 9. 40. 28.
1782.	Juin 14	17. 14	8. 24. 6. 40	— 14	— 0. 31	2. 18. 33. 49.
1784.	Août 25	2. 21	11. 2. 54. 4	+ 26	+ 2. 37	4. 25. 13. 51.
		2. 10½	11. 2. 53. 40.	M. MALLET.		

En faiſant les mêmes calculs avec ces trois longitudes, j'ai trouvé qu'il faudroit ôter 47″ des époques de mes Tables, 1′ 6″ de la plus grande équation, & 33′ 12″ du lieu de l'aphélie.

Si l'on prend un milieu entre ces deux réſultats, on aura les élémens qui répondent le mieux à la dernière

Digitized by Google

révolution de Jupiter, en ôtant 1′ 12″ des époques de mes Tables, 11″ de la plus grande équation & 29′ de l'aphélie. Cette dernière correction eſt un peu forte; elle peut produire trois minutes d'erreur ſur le lieu de Jupiter; mais on ne peut guère aſſurer, quant à préſent, que ce ſoit une irrégularité ſurvenue dans le mouvement de Jupiter, puiſque les meilleures Tables ne repréſentoient pas les révolutions précédentes avec une plus grande exactitude.

Les deux principales corrections de mes Tables, ſont en ſens contraire de celles de Halley, comme on le peut voir par la comparaiſon ſuivante; d'où il réſulte que mes Tables ſont plus exactes pour Jupiter, que celles de ce grand Aſtronome, en négligeant comme lui les perturbations de cette Planète.

	LONGITDUE MOYENNE en 1780.	APHÉLIE.	ÉQUATION.
	S. D. M. S.	S. D. M.	D M. S.
Dans les Tables de Halley..	6. 15. 4. 14	6. 11. 10	5. 31. 36.
Dans mes Tables.....	6. 15. 2. 1	6. 10. 54	5. 34. 0.
Suivant ce Mémoire.....	6. 15. 0. 49	6. 10. 24	5. 33. 49.

Je prouverai ailleurs la même ſupériorité pour mes Tables des autres Planètes; cela n'eſt pas ſurprenant, puiſque j'ai été à portée d'employer des obſervations plus nombreuſes & plus récentes.

Pour qu'on puiſſe mieux juger des inégalités de Jupiter, je vais donner ici la comparaiſon de mes Tables, avec les quatre-vingt-quinze oppoſitions obſervées depuis un ſiècle, c'eſt-à-dire, la quantité qu'il faut appliquer au calcul pour l'accorder avec l'obſervation. J'y ai joint l'anomalie de Jupiter & ſa diſtance vraie à Saturne. Par ce moyen, l'on

Digitized by Google

verra l'influence que peuvent avoir sur le progrès de ces erreurs, & les élémens de l'orbite de Jupiter, & l'attraction de Saturne. Cette Table est le premier secours qu'on doit se préparer pour discuter les élémens de la Planète qui nous occupe.

ERREURS des Tables de Jupiter, en négligeant les perturbations.

ANNÉES.	ERREURS.	ANOMALIES de JUPITER.	DISTANCES de JUPITER à Saturne.
	° M. S.	S. D. M.	S. D. M.
1680.	— 2. 13	7. 27. 25	10. 23. 41.
1682.	— 2. 6	9. 0. 31	11. 13. 1.
1683.	— 1. 4	10. 3. 29	0 0. 12.
1684.	+ 0. 36	11. 6. 21	0. 16. 34.
1685.	+ 1. 6	0. 9. 13	1. 2. 41.
1686.	+ 1. 2	1. 12. 9	1. 19. 24.
1687.	— 0. 17	2. 15. 2	2. 7. 32
1688.	— 2. 34	3. 18. 26	2. 27. 38.
1689.	— 4. 46	4. 21. 50	3. 21. 2.
1690.	— 5. 7	5. 25. 18	4. 14. 15.
1691.	— 4. 33	6. 28. 43	5. 8. 41.
1692.	— 1. 22	8. 1. 59	6. 2. 9.
1694.	+ 0. 55	9. 5. 4	6. 23. 46.
1695.	+ 2. 39	10. 8. 1	7. 13. 32.
1696.	+ 2. 46	11. 10. 53	8. 2. 1.
1697.	+ 1. 56	0. 13. 45	8. 19. 53.
1698.	+ 1. 27	1. 16. 41	9. 7. 51.
1699.	— 0. 50	2. 19. 46	9. 27. 2.
1700.	— 3. 17	3. 23. 2	10. 17. 35.
1701.	— 2. 1	4. 26. 26	11. 9. 50.
1202.	— 0. 27	5. 29. 55	0. 3. 0.
1703.	+ 0. 40	7. 3. 19	0. 25. 47.
1704.	+ 1. 58	8. 6. 33	1. 16. 53.
1706.	+ 2. 27	9. 9. 37	2. 5. 44.
1707.	+ 1. 30	10. 12. 32	2. 23. 35.
1708.	+ 0. 25	11. 15. 24	3. 8. 14.

Digitized by Google

ANNÉES.	ERREURS.	ANOMALIES JUPITER.	DISTANCES de JUPITER à Saturne.
	M. S.	S. D. M.	S. D. M.
1709.	+ 0. 16	0. 18. 16	3. 23. 3.
1710.	+ 0. 22	1. 21. 14	4. 8. 48.
1711.	+ 2. 6	2. 24. 20	4. 25. 50.
1712.	+ 3. 31	3. 27. 38	5. 14. 59.
1713.	+ 4. 39	5. 1. 4	6. 6. 16.
1714.	+ 5. 57	6. 4. 32	6. 29. 1.
1715.	+ 3. 3	7. 7. 54	7. 21. 47.
1716.	+ 2. 17	8. 11. 7	8. 13. 32.
1718.	+ 0. 48	9. 14. 9	9. 3. 38.
1719.	— 1. 51	10. 17. 4	9. 22. 20.
1720.	+ 2. 7	11 19. 55	10. 10. 14.
1721.	+ 4. 16	0. 22. 48	10. 28. 8.
1722.	+ 2. 55	1. 25. 47	11. 16. 43.
1723.	+ 4. 8	2. 28. 55	0. 6. 46.
1724.	+ 2. 10	4. 2. 13	1. 8. 43.
1725.	+ 6. 8	5. 5. 40	1. 22. 33.
1726.	+ 1. 37	6. 9. 8	2. 17. 4.
1727.	— 3. 12	7. 12. 29	3. 11. 2.
1728.	— 0. 57	8. 15. 40	4. 3. 13.
1730.	— 2. 50	9. 18. 41	4. 23. 10.
1731.	— 2. 20	10. 21. 35	5. 11. 13.
1732.	— 1. 13	11. 24. 26	5. 27. 59.
1733.	+ 0. 14	0. 27. 20	6. 14. 18.
1734.	+ 3. 3	2. 0. 20	7. 1. 4.
1735.	+ 4. 14	3. 3. 29	7. 18. 53.
1736.	+ 2. 39	4. 6. 49	8. 8. 23.
1738.	— 0. 19	6. 13. 43	9. 21. 12.
1739.	— 0. 56	7. 17. 4	10. 12. 23.
1740.	— 1. 22	8. 20. 13	11. 2. 4.
1742.	— 1. 8	9. 23. 13	11. 20. 0.
1743.	— 0. 9	10. 26. 7	0. 6. 46.
1744.	+ 0. 28	11. 28. 58	0. 23. 30.
1745.	+ 1. 3	1. 1. 52	1. 9. 32.
1746.	— 1. 36	2. 4. 53	1. 27. 12.
1747.	— 5. 0	3. 8. 3	2. 16. 45.

Digitized by Google

ANNÉES.	ERREURS.	ANOMALIES de JUPITER.	DISTANCES de JUPITER à Saturne.
	M. S.	S. D. M.	S. D. M.
1748.	— 7. 19	4. 11. 24	3. 8. 34.
1749.	— 8. 49	5. 14. 52	4. 2. 20.
1750.	— 7. 17	6. 18. 19	4. 27. 50.
1751.	— 5. 33	7. 21. 38	5. 21. 27.
1752.	— 0. 51	8. 24. 47	6. 13. 8.
1754.	+ 1. 34	9. 27. 45	7. 3. 28.
1755.	+ 1. 46	10. 0. 38	7. 22. 14.
1756.	+ 1. 4	0. 3. 30	8. 10. 9.
1757.	— 0. 19	1. 6. 24	8. 28. 2.
1758.	— 2. 49	2. 9. 26	9. 16. 58.
1759.	— 5. 30	3. 12. 38	10. 6. 35.
1760.	— 6. 37	4. 16. 0	10. 28. 14.
1761.	— 4. 8	5. 19. 29	11. 21. 9.
1762.	4. 19	6. 22. 55	0. 14. 5.
1763.	— 1. 52	7. 26. 13	1. 5. 43.
1765.	— 0. 56	8. 29. 19	1. 25. 10.
1766.	— 1. 3	10. 2. 17	2. 12. 30.
1767.	— 1. 58	11. 5. 9	2. 28. 19.
1768.	— 2. 54	0. 8. 1	3. 13. 23.
1769.	— 3. 31	1. 10. 56	3. 28. 46.
1770.	— 3. 52	2. 14. 0	4. 15. 20.
1771.	— 2. 9	3. 17. 14	5. 3. 49.
1772.	— 0. 9	4. 20. 37	5. 24. 45.
1773.	+ 0. 55	5. 24. 6	6. 17. 6.
1774.	+ 0. 18	6. 27. 31	7. 10. 10.
1775.	+ 0. 40	8. 0. 47	8. 2. 27.
1777.	— 1. 4	9. 3. 54	8. 23. 7.
1778.	— 2. 45	10. 6. 49	9. 12. 19.
1779.	— 3. 58	11. 9. 40	10. 0. 23.
1780.	— 4. 11	0. 12. 32	10. 18. 15.
1781.	— 2. 24	1. 15. 31	11. 7. 37.
1782.	— 0. 32	2. 18. 34	11. 27. 6.
1783.	— 3. 24	3. 21. 54	0. 17. 37.
1784.	+ 2. 37	4. 25. 14	1. 10. 49.
1785.	+ 0. 43	5. 28. 42	2. 5. 21.

Digitized by Google

J'ai supposé 20′ d'erreur dans la longitude de 1727, rapportée par M. Cassini, comme l'indique le temps de l'opposition.

En comparant les années 1725 & 1784, dans lesquelles Jupiter & Saturne étoient à peu-près à pareilles situations, on voit que l'erreur des Tables a diminué de 4′, ce qui indiqueroit une diminution à faire sur le moyen mouvement de Jupiter, employé dans mes Tables.

En comparant 1690 & 1749, 1714 & 1773, on trouve aussi une différence de 4′; ainsi depuis un siècle, le mouvement de Jupiter paroît toujours le même. Il n'y a qu'une seule erreur qui passe 7′, c'est celle de 1749; il est vrai qu'il n'y a pour cette opposition, qu'une seule observation du passage de Jupiter *(Mém. de 1754, p. 326)*. Mais l'erreur surpasse à peine de 4′ celle qui avoit lieu cinquante-neuf ans auparavant; ainsi elle diminueroit si l'on faisoit le mouvement plus petit. Cependant, on augmenteroit par-là celle de 1725, qui est déjà très-forte, mais elle seroit au moins la seule. Ainsi cela n'empêche pas que je ne regarde le mouvement de Jupiter comme étant réellement plus petit que dans mes Tables, du moins dans ce siècle-ci, quoique Halley l'ait fait un peu plus grand.

Enfin, on ne voit rien dans ces erreurs, qui ne puisse être attribué, soit au défaut dans les élémens de Jupiter, soit à l'attraction de Saturne, & rien n'indique une altération sensible dans le mouvement de Jupiter, dans la dernière révolution, ni même dans ce siècle-ci.

Depuis la lecture de ce Mémoire, M. de la Place a reconnu, en 1786, par la théorie, une équation d'environ vingt minutes, dont la période est de huit cents soixante-dix-sept ans, & qui est produite par l'action de Saturne. Elle servira probablement à expliquer, non-seulement, l'équation séculaire de Jupiter, mais encore une partie des inégalités qu'on aperçoit dans la Table précédente.

Je terminerai ce Mémoire, en rapportant le calcul que

Digitized by Google

j'ai fait des anciennes obſervations de Jupiter, qui ſont dans l'Almageſte, pour en conclure le mouvement moyen de Jupiter, en faiſant aux obſervations les corrections que j'ai expliquées *(Mémoires de 1766, page 467.)* J'y ai ajouté la parallaxe annuelle & l'équation de l'orbite, afin d'avoir la longitude moyenne déduite de l'obſervation & la quantité dont elle diffère de celle des Tables. Cette quantité que l'on a appelée juſqu'ici *équation ſéculaire*, eſt produite, ſuivant M. de la Place, par cette équation de 20′, dont la période eſt d'environ huit cents ſoixante-dix-ſept ans; mais en attendant qu'on puiſſe appliquer cet élément aux obſervations anciennes, j'ai mis dans la dernière colonne de la Table ſuivante, le nombre de ſecondes qu'il faudroit ôter du mouvement annuel de mes Tables, $30^d\,20'\,37'',68$, ſuivant chacune de ces obſervations.

ANNÉES.	MOIS & JOURS.	TEMPS moyen à PARIS.	LIEU OBSERVÉ corrigé.	Parallaxe annuelle.	ÉQUAT. de l'ORBITE.	LONGIT. MOYENNE déduite de l'Obſervation.	DIFF. des Tables	Chang. du mouv. ann.
		H. M.	S. D. M.	D. M.	D. M.	S. D. M.	D. M.	S.
Av. J. C. 240	Sept. 3	13. 45	3. 7. 6	— 9. 25	— 4. 31	2. 23. 10	3. 9	5,67.
Ap. J. C. 133	Mai 17	9. 8	7. 24. 13	+ 0. 4	+ 4. 45	7. 29. 2	2. 10	4,79.
136	Août 31	8. 8	11. 8. 57	— 0. 28	+ 0. 20	11. 8. 49	1. 55	4,23.
137	Oct. 7	15. 8	0. 15. 26	— 0. 20	— 2. 35	0. 12. 31	2. 10	4,78.
139	Juill. 10	15. 8	2. 16. 49	— 5. 34	— 4. 57	2. 6. 18	2. 34	5,66.

Le milieu, entre les cinq réſultats eſt 5″,02, ce qui donne pour le mouvement annuel moyen $1^c\,0^d\,20'\,32'',66$, plus petit de $1'' \frac{1}{3}$ ſeulement, que dans les Tables de M. Caſſini.

Le mouvement annuel que j'ai conclu de ces obſerva-

Digitized by Google

tions, exigera quelques corrections relativement aux perturbations, mais c'eſt du moins la quantité qu'il faut employer d'abord pour connoître la période de la nouvelle équation; ſauf à rectifier le moyen mouvement lorſqu'on connoîtra les changemens de l'aphélie, de l'excentricité & de la longitude moyenne, que l'action de Saturne a dû produire dans le mouvement de Jupiter.

J'ai fait de ſemblables calculs pour le mouvement annuel de Saturne, que j'ai trouvé par les anciennes obſervations, $12^{d}\ 13'\ 34'',48$. Cinq fois ce mouvement & deux fois celui de Jupiter, donnent des quantités qui ne diffèrent que de $26'\ 47''$, ce qui ne feroit 360^{d} qu'au bout de huit cents ſix ans; telle eſt à peu-près la période de l'équation qui peut réſulter de cette configuration des deux Planètes, ou de cinq fois le mouvement de Saturne, moins deux fois celui de Jupiter. Ce n'eſt-là qu'un premier eſſai, puiſque l'équation dont il s'agit eſt le réſultat de pluſieurs autres, & qu'elle dépend de l'excentricité, qui eſt variable, du mouvement de l'aphélie, qui n'eſt pas uniforme; mais les obſervations que je viens de rapporter avec les corrections que j'y ai faites, ſont les données auxquelles il faudra tâcher de ſatisfaire par la théorie.

MÉMOIRE

Digitized by Google

MÉMOIRE

CONTENANT LES OBSERVATIONS DE LA PREMIÈRE COMÈTE DE 1784,

Observée à Paris, de l'observatoire de la Marine (a); & de la seconde Comète observée à Malte (b).

Par M. MESSIER.

M. LE COMTE DE CASSINI découvrit cette Comète à la simple vue, le 24 Janvier, vers les 6 heures & demie du soir, près de la queue de la Baleine, formant un triangle à peu-près isocèle avec β & l'étoile ι de la queue : elle paroissoit alors dans le voisinage de la Lune, qui étoit dans son premier quartier. La Comète avoit une queue de deux degrés environ de longueur ; le diamètre du noyau avoit une demi-minute.

Le lendemain 25, M. le Comte de Cassini me fit part de la découverte de cette Comète, & des circonstances que je viens de rapporter.

Le mouvement de la Comète, le 24, par une seule observation, n'avoit pu se reconnoître, de manière qu'on ignoroit la direction de la route qu'elle devoit tenir dans le ciel.

Depuis le 24, jour où elle fut découverte, jusqu'au 3 Février suivant, le ciel fut constamment couvert le jour & la nuit d'un brouillard très-épais : pendant cet intervalle

(a) C'est la vingt-deuxième des Comètes que j'ai observées de l'observatoire de la Marine, à l'hôtel de Clugny ; & la soixante-neuvième Comète, dont l'orbite ait été calculée, en suivant la Table des Comètes, qui est rapportée dans l'Astronomie de M. de la Lande, *tome III, page 366 ; & tome IV, page 704.*

(b) Qui est la soixante-dixième dont l'orbite a été calculée.

de temps, il tomba une assez grande quantité de neige, le froid avoit également augmenté. Le 31 Janvier, à 7 heures 30′ du matin, le thermomètre, à mon observatoire, marquoit onze degrés 3 quarts au-dessous de zéro ou de la glace, & le 1.er Février au matin, la rivière fut gelée en plusieurs endroits.

Le 3 Février, le ciel s'éclaircit pendant la journée, le soir, il n'y avoit plus qu'un peu de brouillard dans l'air, & la Lune, qui approchoit de son plein, répandoit une grande lumière. La Comète n'avoit pas été vue depuis le 24 Janvier, à cause du mauvais temps, & comme on ignoroit son mouvement & le lieu du ciel où il falloit la chercher, je plaçai ma grande lunette achromatique dans le plan du méridien, & je lui fis parcourir une grande partie du ciel, dans tout l'espace où la Comète pouvoit se trouver, si par son mouvement depuis le 24 Janvier elle s'étoit élevée au-dessus de l'horizon. Après bien des recherches, je la découvris, vers 5 heures 54 minutes du soir, sur le parallèle de l'étoile λ des Poissons, cinquième grandeur; je la comparai trois fois à cette Étoile, une fois à la 506.e du catalogue zodiacal de feu M. l'Abbé de la Caille, & à deux Étoiles de septième grandeur, dont les lieux n'avoient pas encore été déterminés; mais je les comparai à λ des Poissons.

A cause du brouillard qui étoit répandu dans l'air, & de la grande lumière de la Lune, la Comète ne pouvoit se voir à la simple vue, mais elle se voyoit très-bien avec une petite lunette de nuit de 15 pouces de foyer: en la voyant dans la grande lunette achromatique, on lui soupçonnoit une queue fort courte, & dirigée vers la partie du ciel E. S. E.

Je mesurai, au moyen du micromètre à fils qui étoit adapté à la lunette, le diamètre du noyau de la Comète, qui avoit beaucoup de lumière; je le trouvai de 40 secondes, & celui de l'atmosphère qui environnoit le noyau, de 1′31″.

La comparaison de la Comète avec l'étoile λ des Poissons,

Digitized by Google

m'a donné ſa poſition. Le 3 Février, à $6^h\ 5'\ 9''$ de temps vrai, la Comète ſuivoit l'Étoile au fil horaire du micromètre, de $1^d 46'\ 30''$; la Comète étoit plus au nord que l'Étoile, de 13 ſecondes : ainſi l'aſcenſion droite de la Comète étoit de $354^d\ 32'\ 14''$, & ſa déclinaiſon $35'\ 57''$, boréale.

Je ne rapporte ces détails que pour la première obſervation ; on trouvera les autres poſitions de la Comète, & celles des Étoiles qui ont ſervi à ſa détermination, dans deux Tables que je rapporte à la ſuite de ce Mémoire. La première contient les déterminations de la Comète en aſcenſion droite & en déclinaiſon pour chaque jour d'obſervation, avec les différences de paſſage entre la Comète & les Étoiles avec leſquelles la Comète a été comparée, ainſi que les différences en déclinaiſon. La ſeconde Table contiendra la poſition des Étoiles, ſoit celles qui étoient déjà connues, ſoit celles que j'ai déterminées par de nouvelles obſervations : la plupart de ces Étoiles ont été employées à la détermination des lieux de la Comète, à chaque jour où elle a été obſervée.

Le 4 Février au ſoir, le ciel qui avoit été couvert toute la journée d'un brouillard élevé, s'éclaircit vers les quatre heures du ſoir, les Étoiles parurent; mais la Lune qui approchoit de ſon plein, répandoit une lumière qui empêchoit de bien juger des apparences de la Comète; on la voyoit cependant un peu plus belle, & la queue plus ſenſible que le 3, ce qui pouvoit provenir de ce que la Lune étoit plus éloignée de la Comète que le jour précédent. Je déterminai le lieu de la Comète par trois étoiles des Poiſſons; les poſitions ſont rapportées dans la première Table, & celles des trois Étoiles dans la ſeconde.

Depuis le 4 Février juſqu'au 10 du même mois, le ciel fut couvert les ſoirs d'un brouillard épais & conſtant; le 10 au ſoir, le ciel s'éclaircit en grande partie, il étoit ſans Lune; la Comète ſe faiſoit voir à la ſimple vue, avec une queue de 2 degrés $\frac{1}{2}$ de longueur, d'une lumière très-

foible; le noyau étoit brillant, environné de nébulosité. Auprès de la Comète étoit une Étoile de septième grandeur, qui n'avoit pas encore été déterminée; je trouvai sa position, en la comparant directement à l'étoile C^2 des Poissons, ainsi qu'une autre Étoile de même grandeur: la Comète fut comparée à ces deux nouvelles Étoiles & aux étoiles connues C^1, C^2 des Poissons. Les positions de la Comète, qui ont résulté de ces observations, sont rapportées dans la première Table, & celles des Étoiles dans la seconde.

Les 11, 12 & 13 Février, il ne fut pas possible de voir la Comète, à cause du brouillard. Le 14, vers les sept heures du soir, le ciel s'éclaircit en partie, mais l'horizon étoit tellement couvert de brouillard, qu'il ne fut pas possible de voir la Comète. Le ciel continua d'être couvert jusqu'au 23, qu'il commença à s'éclaircir, le Soleil parut le matin & l'après-midi; après son coucher, le ciel se couvrit d'un léger brouillard qui affoiblissoit la lumière des Étoiles. Je cherchai la Comète assez long-temps dans l'endroit du ciel où elle devoit se trouver d'après mes précédentes déterminations; je la vis enfin, mais près de l'horizon où le ciel étoit devenu le plus clair: on la voyoit assez bien à la lunette; mais le peu de temps qui me restoit, ne me permit d'en faire qu'une observation. J'observai le passage de la Comète au fil horaire du micromètre, & j'attendis, après ce passage, celui de quelqu'Étoile. Il en passa une qui ne m'étoit pas connue, & sa lumière se trouvoit fort affoiblie par le brouillard; elle laissa une petite incertitude à son passage au fil horaire, de manière que cette détermination de la Comète doit être regardée comme un peu douteuse. Je recherchai ensuite l'Étoile, & je la comparai, le 7 Mars, à la soixante-seizième de Pégase, suivant Flamsteed; ayant obtenu sa position, je déterminai celle de la Comète: on la trouvera dans la première Table qui est à la suite de ce Mémoire.

Depuis le 23 Février jusqu'au 29, le ciel couvert ne

permit pas de revoir la Comète; mais le 29, le ciel devint parfaitement beau toute la journée: ce jour sembloit être le seul de l'hiver qui fût presque sans brouillard. Je cherchai, malgré un grand crépuscule, l'étoile γ (algenib) de l'aile de Pégase, qui me servit à trouver la Comète; ses apparences étoient bien diminuées depuis ma dernière observation; on ne faisoit plus que lui soupçonner une queue bien foible; on distinguoit encore fort bien la nébulosité, le noyau étoit très-apparent. La Comète paroissoit entre les deux étoiles S & φ de Pégase, j'estimai cette dernière Étoile de cinquième grandeur; Flamsteed, dans son Catalogue, la rapporte de la sixième. Je comparai la Comète à ces deux Étoiles, & à deux autres Étoiles de septième grandeur, qui n'étoient pas connues; leurs positions furent déterminées en les comparant à l'étoile S. De ces observations j'ai conclu le lieu de la Comète en ascension droite & en déclinaison; on les trouvera dans la première Table.

Le 1.er Mars au soir, le ciel étoit assez beau au couchant. Je cherchai avec la grande lunette l'étoile φ de Pégase, près de laquelle la Comète étoit le jour précédent; je ne tardai pas à voir la Comète, elle fut comparée trois fois à cette Étoile: les positions en sont rapportées dans la première Table. Les apparences de la Comète étoient bien affoiblies, soit par les vapeurs de l'horizon, soit par la grande lumière de la Lune; le noyau avoit encore de la lumière, il étoit environné d'une nébulosité sensible, mais sans aucune apparence de queue.

Le 2 Mars au soir, je vis la Comète un moment sans pouvoir l'observer; elle étoit près de l'horizon & dans les vapeurs.

Depuis le 2 jusqu'au 8, je ne pus revoir la Comète, à cause du mauvais temps; mais le 8 au soir, le ciel fut très-beau. Pour trouver la Comète, je cherchai les étoiles φ & r de Pégase, la Comète devoit être sur le parallèle de cette dernière; mais le crépuscule alors étoit encore

Digitized by Google

trop considérable pour l'apercevoir, il fallut attendre beaucoup plus tard que la vue des Étoiles pour l'observer; sa lumière étoit très-foible & son mouvement très-ralenti. Je la comparai aux étoiles r^1 & r^2 de Pégase, & à une troisième Étoile de septième grandeur, qui n'étoit pas déterminée; je trouvai son lieu, en la comparant à r^2; de la comparaison de la Comète à ces Étoiles, je conclus sa position qu'on trouvera dans la première Table, & celle des Étoiles dans la seconde. L'étoile r^1, sixième grandeur, se trouve placée sur les Cartes de Flamstéed, mais sa position n'est pas rapportée dans son grand Catalogue; j'ai été obligé de déterminer son lieu par r^2.

Le 11 Mars, beau temps le soir; je cherchai la Comète près de l'horizon, dans le crépuscule, sur le parallèle de l'étoile y de Pégase; j'observai trois fois le passage de cette Etoile au fil horaire du micromètre, comptant y voir passer ensuite la Comète, mais il ne fut pas possible de la voir: l'Étoile descendit derrière une masse de cheminées. Je commençai alors à voir la Comète qui ne devoit pas tarder, de même que l'Étoile, à se perdre derrière la masse de cheminées; mais j'observai son passage au fil horaire du micromètre, & j'attendis ensuite celui de quelques Étoiles; il en passa deux de septième grandeur, qui ne se trouvent pas dans les Catalogues. Comme ces deux Étoiles se rencontroient sur le parallèle de l'étoile y de Pégase, les jours suivans je les recherchai & les comparai à l'étoile y; & de leurs déterminations, j'ai conclu le lieu de la Comète, que l'on trouvera dans la première Table. L'observation fut un peu douteuse, à cause du crépuscule, du voisinage de la Comète à l'horizon, & de la grande foiblesse de sa lumière. Cette observation est la dernière que j'aie pu faire avant l'entrée de la Comète dans les rayons du Soleil.

Les élémens de son orbite, que M. Méchain avoit déduits de ses premières observations, avoient fait reconnoître le temps & le lieu du ciel où on devoit la

Digitized by Google

rechercher le matin après ſa conjonction. M. Méchain commença à la revoir le 10 du mois de Mai, peu de minutes après minuit; je l'obſervai le 16 du même mois par un très-beau temps; la lumière de la Comète étoit extrêmement foible; il fallut employer une excellente lunette, & la moindre lumière employée pour éclairer les fils du micromètre, étoit preſque ſuffiſante pour la faire diſparoître. Cependant je comparai la Comète à trois Étoiles qui étoient de la conſtellation d'Andromède, rapportées dans le Catalogue de Flamſtéed; je les ai réduites au temps préſent, & on les trouvera dans ma ſeconde Table; la poſition de la Comète, qui en a réſulté, eſt dans la première,

Le 18 Mai au matin, le ciel parfaitement beau, j'obſervai la Comète, ſa lumière étoit toujours très-foible; je la comparai aux étoiles, *n.os 2, 6, 13,* & *1* d'Andromède, ſuivant Flamſtéed; j'en conclus la poſition de la Comète, que l'on trouvera dans la première Table.

Le 21 au matin, le ciel parfaitement beau & pur, la Comète fut comparée directement à l'étoile *x* d'Andromède, de quatrième grandeur, & à quatre autres Étoiles qui n'étoient pas encore connues; je déterminai leurs poſitions en les comparant à l'étoile *x*; & de la comparaiſon de ces Étoiles avec la Comète, j'ai déduit la poſition de celle-ci en aſcenſion droite & en déclinaiſon.

Le 23 au matin, le ciel également beau & pur, les apparences de la Comète étoient encore diminuées, la moindre lumière employée pour éclairer les fils du micromètre, étoit ſuffiſante pour la faire diſparoître; ſa lumière étoit d'une nuance claire & preſque égale, on voyoit à peine le noyau. Je la comparai avec l'étoile onzième du Lézard, cinquième grandeur, ſuivant Flamſtéed; avec *x* d'Andromède, de la quatrième, & pluſieurs Étoiles qui n'avoient pas encore été déterminées, mais que je déterminai en les comparant à des Étoiles connues: la poſition

Digitized by Google

de la Comète qui a réſulté de ces obſervations, eſt rapportée dans la première Table, celles des Étoiles ſont dans la ſeconde.

Le 26 de Mai au matin, par un beau temps, le ciel pur, j'obſervai la Comète pour la dernière fois; elle avoit perdu depuis la dernière obſervation preſque toute ſa lumière, on ne faiſoit plus que la ſoupçonner dans le champ de la lunette, quoique les fils du micromètre ne fuſſent point éclairés; ce n'étoit plus qu'une tache de lumière très-foible & égale, ſans aucune apparence de noyau; ſon paſſage au fil horaire du micromètre ne fut qu'eſtimé. L'obſervation fut répétée pluſieurs fois avec des Étoiles, & j'ai pris un milieu pour avoir ſa poſition; on la trouvera dans la première Table, & celles des Étoiles dans la ſeconde: cette obſervation eſt la dernière que j'aie pu faire ſur cette Comète. Mes obſervations vont depuis le 3 Février au ſoir juſqu'au 26 de Mai au matin, ce qui fait cent quatorze jours. Pendant cet intervalle de temps, j'ai eu huit jours d'obſervations le ſoir, avant que la Comète entrât dans les rayons du Soleil; & cinq le matin, après ſa conjonction, ce qui fait treize jours: ces treize jours d'obſervations m'ont donné cinquante-ſept déterminations du lieu de la Comète, en aſcenſion droite & en déclinaiſon; elles ſont rapportées dans la Table qui ſuit.

La première Table contient les lieux de la Comète en aſcenſion droite & en déclinaiſon, avec les différences de paſſage entre la Comète & les Étoiles au fil horaire du micromètre, & les différences en déclinaiſon entre la Comète & l'Étoile, à laquelle elle a été comparée. Ces différences ſont marquées des ſignes + & —; le premier, indique qu'il faut ajouter ces différences obſervées, aux poſitions des Étoiles, avec leſquelles la Comète a été comparée, pour avoir celles de la Comète; le ſecond qu'il faut ôter, & l'on aura l'aſcenſion droite & la déclinaiſon de la Comète.

La ſeconde Table renferme les aſcenſions droites & les déclinaiſon-

Digitized by Google

déclinaiſons des Étoiles qui ont été employées à la détermination du lieu de la Comète, tant celles qui ont été priſes en différens Catalogues, que les nouvelles Étoiles que j'ai déterminées : ces nouvelles Étoiles ſont au nombre de vingt-quatre. Leurs poſitions ſont réduites au temps des obſervations ; je n'y ai fait d'autre réduction que celle qu'on trouve dans les Catalogues, ſous le titre de *Variation annuelle*.

Je joins auſſi à ce Mémoire une Carte céleſte que j'ai conſtruite d'après mes obſervations. Cette Carte eſt diviſée en degrés d'aſcenſion droite & de déclinaiſon ; j'y ai rapporté les poſitions & la route apparente de la Comète parmi les Étoiles fixes : à l'inſpection de cette Carte, il ſera aiſé de juger de la poſition de la Comète obſervée & de celles des Étoiles qui ont ſervi à ſa détermination ; je les ai renfermées dans un cercle. J'ai rapporté auſſi, ſur cette Carte, la première obſervation, de M. le Comte de Caſſini, du 24 Janvier. On verra par cette Carte, que la Comète a commencé à paroître près de la queue de la Baleine ; qu'elle a traverſé l'Écliptique & l'Équateur dans les premiers jours de Février ; qu'elle a paſſé dans les Poiſſons, traverſé Pégaſe, & qu'elle a ceſſé de paroître entre le Lézard & la main droite d'Andromède.

Cette Comète avoit été vue, à l'Iſle-de-Bourbon le 15 Décembre 1783 ; au Cap de Bonne-eſpérance, le 10 Janvier ſuivant ; le 16, à la Guadeloupe, par M. Tondu ; le 20, à Malte, par M. le Chevalier d'Angos : aucune de ces obſervations ne m'eſt parvenue.

M. Méchain a calculé les élémens de l'orbite de cette Comète, d'après ſes obſervations, depuis le 24 Janvier juſqu'au 26 de Mai : les voici comme il les a donnés dans la Connoiſſance des Temps de 1788, *page 334*.

Lieu du nœud aſcendant.	1ſ 26d 49′ 21″
Inclinaiſon de l'orbite.	51. 9. 12.
Lieu du périhélie.	2. 20. 44. 24.
Logarithme de la diſtance périhélie.	9,849946.
Paſſage au périhélie, 21 Janv. 1784, à 4h 56′ 47″, t. moyen à Paris.	
Sens du mouvement, rétrograde.	

Digitized by Google

TABLE I.

Des Lieux apparens de la première Comète de 1784, comparée aux Étoiles fixes.

1784.	TEMPS VRAI.	ASCENSION droite de la Comète observée.	DÉCLINAIS. de la Comète observée. Boréale	DIFFÉRENCE en ascens. dr. de la Comète avec les Étoiles.	DIFFÉRENCE en déclinaif. entre la Comète & les Étoiles.	Grandeur des Etoiles.	Lettres & N.ᵒˢ des Etoiles.	ÉTOILES avec leſquelles la Comète a été comparée.
	H. M. S.	*D. M. S.*	*D. M. S.*	*D. M. S.*	*M. S.*			
Février 3	6. 5. 9	354. 32. 14	0. 35. 57	+ 1. 46. 30	+ 0. 13	5	A	des Poiſſons.
	6. 5. 9	354. 32. 14	0. 35. 57	+ 0. 5. 45	— 24. 51	7	17	déterminée.
	6. 5. 9	354. 32. 14	0. 35. 57	— 0. 28. 37	— 26. 12	7	19	déterminée.
	6. 36. 13	354. 32. 14	0. 37. 1	+ 1. 46. 30	+ 1. 17	5	A	des Poiſſons.
	6. 36. 13	354. 32. 21	0. 37. 1	— 0. 58. 15	— 17. 22	6	506	de la Caille.
	6. 36. 13	354. 32. 14	0. 37. 14	+ 0. 5. 45	— 23. 29	7	17	déterminée.
	6. 36. 13	354. 32. 6	0. 37. 16	— 0. 28. 45	— 24. 53	7	19	déterminée.
	7. 3. 55	354. 32. 14	0. 38. 29	+ 1. 46. 30	+ 2. 45	5	A	des Poiſſons.
4	6. 19. 12	354. 32. 26	1. 40. 52	+ 0. 41. 52	— 36. 23	5	501	de la Caille.
	6. 23. 18	354. 32. 26	1. 40. 44	+ 0. 41. 52	— 36. 31	5	501	la même.
	6. 57. 10	354. 32. 18	1. 42. 32	+ 8. 2. 45	— 23. 54	4	γ	des Poiſſons.
	7. 1. 24	354. 32. 41	1. 42. 40	+ 0. 42. 7	— 34. 35	5	501	de la Caille.
	7. 6. 37	354. 32. 34	1. 42. 43	+ 0. 42. 0	— 34. 32	5	501	de la Caille.
	7. 6. 37	354. 32. 34	1. 42. 43	— 0. 41. 30	— 1. 23	6	22	des Poiſſons.
10	6. 39. 31	354. 23. 24	7. 1. 26	+ 0. 6. 0	— 1. 30	7	16	déterminée.
	6. 47. 13	354. 23. 16	7. 1. 36	— 3. 28. 30	— 15. 27	5.6	c^1	des Poiſſons.
	6. 47. 13	354. 23. 47	7. 1. 45	— 3. 26. 30	— 43. 10	6	c^1	des Poiſſons.
	6. 47. 13	354. 23. 16	7. 1. 36	— 1. 44. 45	0. 0	7	20	déterminées.
	6. 47. 13	354. 23. 16	7. 1. 36	+ 0. 5. 52	— 1. 20	7	16	déterminées.
	7. 17. 33	354. 23. 1	7. 2. 56	+ 0. 5. 37	0. 0	7	16	déterminées.
	7. 17. 33	.....	7. 2. 49	.....	— 14. 14	5.6	c^1	des Poiſſons.
23	6. 14. 11	353. 47. 59	14. 45. 7	— 4. 3. 45	— 17. 57	7	23	déterminée.
29	6. 46. 38	353. 29. 42	17. 20. 54	+ 1. 45. 0	+ 9. 18	6	ζ	de Pégaſe.
	6. 46. 38	353. 29. 46	17. 20. 58	+ 0. 37. 0	— 6. 19	7	13	déterminée.
	6. 55. 40	353. 30. 4	17. 20. 58	+ 1. 45. 22	+ 9. 22	6	ζ	de Pégaſe.
	6. 55. 40	353. 30. 1	17. 21. 0	+ 0. 37. 15	— 6. 18	7	13	déterminées.
	6. 55. 40	353. 30. 4	17. 20. 58	+ 1. 10. 30	+ 20. 18	7	12	déterminées.
	6. 59. 53	353. 30. 10	17. 21. 59	— 1. 51. 30	— 32. 55	5	φ	de Pégaſe.
	7. 9. 36	353. 29. 55	17. 22. 9	— 1. 51. 45	— 32. 45	5	φ	de Pégaſe.
Mars 1	6. 37. 25	353. 27. 10	17. 45. 11	— 1. 54. 30	— 9. 43	5	φ	de Pégaſe.

Digitized by Google

Suite de la Table des Lieux apparens de la première Comète, &c.

1784.	TEMPS vrai.	ASCENSION droite de la Comète observée.	DÉCLINAIS. de la Comète observée. Boréale.	DIFFÉRENCE en ascens. dr. de la Comète avec les Étoiles.	DIFFÉRENCE en déclinaiſ. de la Comète avec les Étoiles.	Grandeur des Étoiles.	Lettres & N.os des Étoiles.	ÉTOILES avec leſquelles la Comète a été comparée.
	H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.			
Mars... 1	6. 46. 49	353. 27. 33	17. 45. 17	— 1. 54. 7	— 9. 37	5	φ	de Pégaſe.
	6. 56. 17	353. 27. 40	17. 45. 23	— 1. 54. 0	— 9. 31	5	φ	
8	6. 54. 22	353. 12. 8	20. 21. 56	— 2. 12. 37	— 10. 7	6	r^2	
	6. 54. 22	353. 12. 8	20. 21. 56	— 2. 8. 37	— 5. 38	6	r^1	
	6. 54. 22	353. 12. 12	20. 21. 52	— 0. 19. 45	+ 10. 32	7	15	déterminée.
	7. 6. 54	353. 11. 45	20. 22. 14	— 2. 13. 0	— 9. 49	6	r^2	de Pégaſe.
	7. 6. 54	353. 11. 45	20. 22. 8	— 2. 9. 0	— 5. 26	6	r^1	
	7. 6. 54	353. 11. 42	20. 22. 18	— 0. 20. 15	+ 10. 58	7	15	déterminées.
11	7. 13. 20	353. 6. 30	21. 25. 20	— 1. 29. 0	— 14. 13	7	18	
	7. 13. 20	353. 6. 30	21. 25. 13	— 3. 19. 0	— 1. 46	7	22	
Mai... 15	14. 9. 39	346. 22. 33	41. 28. 20	+ 3. 22. 15	+ 18. 5	3.4	ϑ	
	14. 9. 39	346. 22. 33	41. 28. 20	+ 3. 12. 0	— 7. 46	6	2	
	14. 9. 39	346. 22. 33	41. 28. 20	— 1. 2. 0	+ 34. 15	6	10	d'Andromède.
17	14. 3. 41	345. 48. 10	42. 4. 41	+ 2. 37. 37	— 28. 35	6	2	
	14. 3. 41	345. 48. 10	42. 4. 41	— 6. 5. 30	+ 0. 8	4	1	
	14. 3. 41	345. 47. 49	42. 5. 5	+ 0. 40. 45	— 18. 29	6.7	6	
	14. 3. 41	345. 48. 10	42. 4. 41	— 3. 23. 15	+ 20. 59	6	13	
20	13. 24. 46	344. 49. 21	42. 59. 26	— 0. 25. 7	+ 29. 36	7	6	déterminée.
	14. 10. 20	344. 48. 49	42. 59. 54	— 0. 18. 15	+ 36. 20	6.7	6	d'Andromède.
	14. 34. 17	344. 48. 19	42. 59. 50	— 0. 18. 45	+ 36. 16	6.7	6	
22	13. 32. 27	344. 6. 35	43. 36. 5	+ 6. 22. 0	+ 26. 13	5	11	du Lézard.
	13. 42. 41	344. 7. 20	43. 36. 32	— 0. 25. 30	+ 12. 13	8	5	déterminées.
	13. 50. 10	344. 7. 28	43. 36. 33	— 0. 25. 22	+ 12. 14	8	5	
	14. 0. 2	344. 7. 35	43. 36. 58	— 8. 18. 43	+ 28. 6	4	x	
25	13. 11. 11	342. 59. 53	44. 30. 13	— 1. 27. 45	— 43. 44	6	4	d'Andromède.
	13. 58. 19	342. 59. 38	44. 30. 14	— 1. 28. 0	— 43. 43	6	4	
	14. 19. 36	342. 59. 46	44. 30. 17	— 1. 27. 52	— 43. 40	6	4	

Digitized by Google

TABLE II.

Des Aſcenſions droites & des Déclinaiſons des Étoiles avec leſquelles la première Comète de 1784 a été comparée.

Leurs poſitions ſont réduites au temps de l'Obſervation.

Aſcension droite des Étoiles.	Déclinaison Boréale des Étoiles.	Grandeur des Etoiles.	N.° des Etoiles.	Noms des Étoiles. qui ont ſervi à la détermination du lieu de la Comète.
D. M. S.	D. M. S.			
337. 44. 35	43. 9. 52	5	11	du Lézard, comparée à l'Étoile nouvelle *n.° 5*. Comète comparée le 22 Mai.
339. 8. 5	43. 26. 22	6	1	nouvelle, comparée à la onzième du Lézard.
340. 58. 35	43. 36. 49	6	2	nouvelle, déterminée par la onzième du Lézard.
342. 42. 38	44. 13. 53	8	3	nouvelle, dét. la Comète en étoit près le 25 Mai.
343. 0. 18	41. 10. 15	3.4	0	d'Andromède, déduite de la Caille. Comète comparée le 15 Mai.
343. 10. 33	41. 36. 6	6	2	d'Andromède, comparée à *o*. Comète comparée les 15 & 17 Mai.
344. 22. 8	44. 54. 46	7	4	nouvelle, déterminée par le *n.° 4* d'Andromède.
344. 27. 38	45. 13. 57	6	4	d'Andromède, déduite de Flamſteed. Comète comparée le 25 Mai.
344. 32. 50	43. 24. 19	8	5	nouvelle, déterm. par x d'Andromède. Comète comparée le 22 Mai.
345. 7. 4	42. 23. 34	6.7	6	d'Andromède, comparée au *n.° 2*. Comète comp. les 17 & 20 Mai.
345. 14. 28	42. 29. 50	7	6	nouvelle, déterminée par x d'Andromède. Comète comparée le 20 Mai.
346. 15. 53	45. 21. 26	7	7	nouvelle, comparée à l'Étoile *n.° 4* d'Andromède.
346. 29. 33	2. 6. 26	4	☽	des Poiſſons, déduite de Mayer. Comète comparée le 4 Février.
347. 24. 33	40. 54. 5	6	10	d'Andromède, comp. à *o*. Com. comp. le 15 Mai.
347. 37. 20	42. 55. 52	7	8	nouvelle, comparée à la nouvelle Etoile *n.° 6*.
349. 11. 25	41. 43. 42	6	13	d'Andromède, comparée au *n.° 2*. Comète comp. le 17 Mai.
349. 47. 23	45. 17. 4	6	9	nouvelle, déterm. par l'étoile *n.° 4* d'Andromède.
350. 40. 0	21. 18. 56	6	♃	Pégaſe, déterminée par ſon paſſage au Méridien.
350. 51. 30	45. 29. 52	6	10	nouvelle, déterm. par l'Étoile *n.° 4* d'Andromède.
351. 44. 28	43. 14. 42	5	11	nouvelle, déterminée par l'Étoile x d'Andromède.
351. 44. 42	17. 11. 36	6	♃	Pégaſe, déduite de Flamſteed. Comète comparée le 29 Février.
351. 53. 40	42. 4. 33	4	1	d'Andromède, déd. de l'étoile *n.° 2* d'Andromède. Comète comparée le 17 Mai.
352. 19. 34	17. 0. 40	7	12	nouvelle, comparée à ♃ de Pégaſe. Comète comparée le 29 Février.

Digitized by Google

Suite de la Table des Aſcenſions droites, &c.

Aſcension droite des Étoiles.	Déclinaison Boréale des Étoiles.	Grandeur des Étoiles.	N.° des Étoiles.	Noms des Conſtellations qui ont ſervi à la détermination du lieu de la Comète.
D. M. S.	D. M. S.			
352. 26. 20	43 . 8. 52	4	κ	d'Andromède, déduite de Flamſtéed. Comète comparée le 22 Mai.
352. 45. 44	0. 35. 44	5	λ	Poiſſons, déduite de Mayer. Comète comparée le 3 Février.
352. 52. 46	17. 27. 18	7	13	nouvelle, déterminée par S de Pégaſe. Comète comparée le 29 Février.
352. 55. 44	15. 8. 1	6	76	de Pégaſe, déduite du catalogue de Flamſtéed.
353. 30. 27	42. 33. 36	7	14	nouvelle, déterminée par l'Etoile κ d'Andromède.
353. 31. 57	20. 11. 20	7	15	nouvelle, déterminée par r^1 de Pégaſe. Comète comparée le 8 Mars.
353. 50. 34	2. 17. 15	5	501	de la Caille, milieu pris avec Mayer. Comète comparée le 4 Février.
354. 17. 24	7. 2. 56	7	16	nouvelle, déterminée par c^2 des Poiſſons. Comète comparée le 10 Février.
354. 26. 29	1. 0. 48	7	17	nouvelle, déterminée par λ des Poiſſons. Comète comparée le 3 Février.
354. 35. 30	21. 39. 33	7	18	nouvelle, déterminée par γ de Pégaſe. Comète comparée le 11 Mars.
355. 0. 51	1. 2. 9	7	19	nouvelle, déterminée par λ des Poiſſons. Comète comparée le 3 Février.
355. 14. 4	1. 44. 6	6	22	Poiſſons, Flamſtéed, comp. à la cinq cent-unième de la Caille. Comète comparée le 4 Février.
355. 20. 45	20. 27. 34	6	r^3	de Pégaſe, déterm. par r^2. Com. comp. le 8 Mars.
355. 21. 40	17. 54. 54	5	φ	Pégaſe, déduite de Flamſtéed. Comète comparée les 29 Février & 1.er Mars.
355. 24. 45	20. 32. 3	6	r^4	Pégaſe, déduite de Flamſtéed. Comète comparée le 8 Mars.
355. 30. 36	0. 54. 23	6	506	de la Caille, milieu avec Flamſtéed. Comète comparée le 3 Février.
356. 8. 1	7. 1. 36	7	20	nouvelle, déterminée par c^2 des Poiſſons. Comète comparée le 10 Février.
356. 14. 7	19. 52. 20	6	21	nouvelle, déterminée par r^1 de Pégaſe.
356. 25. 30	21. 26. 59	7	22	nouvelle, déterminée par γ de Pégaſe. Comète comparée le 11 Mars.
357. 50. 17	7. 44. 55	6	c^1	Poiſſons, déduite de Flamſtéed. Comète comparée le 10 Février.
357. 51. 44	15. 3. 4	7	23	nouvelle, déterminée par la ſoixante-ſeizième de Pégaſe. Comète comparée le 23 Février.
357. 51. 46	7. 17. 3	5.6	c^3	Poiſſons, déduite de Flamſtéed & de la Caille, milieu. Comète comparée le 10 Février.
1. 46. 4	2. 35. 25	7	24	nouvelle, déterminée par l'Étoile cinq cent unième de la Caille.

Digitized by Google

Nota. L'étoile r^1 de Pégase, sixième grandeur, ne se trouve pas dans le grand catalogue de Flamsteed, mais il l'a rapportée sur ses Cartes : j'ai déterminé sa position par r^3. Pour l'étoile δ, la première d'Andromède, dans le catalogue de Flamsteed, la distance au Pôle est rapportée de $40^d\ 19'\ 30''$; on doit lire $49^d\ 19'\ 30''$: l'ascension droite de cette Étoile est bonne quoique j'aie mis *(Mém. de l'Acad. année 1775, page 458)* qu'il y avoit $12'\ 15''$ d'erreur.

SECONDE COMÈTE de 1784.

CETTE seconde Comète, de 1784, fut découverte à Malte, dans la constellation du Renard, le 11 Avril, par M. le chevalier d'Angos.

Le 14 du mois de Mai suivant, je reçus une Lettre, datée de Malte, le 15 Avril, dans laquelle il me l'annonçoit : voici l'extrait de sa Lettre.

« J'ai découvert une nouvelle Comète, le 11 Avril, » dans la constellation du Renard; elle est fort petite, sans » queue, & n'a qu'une légère apparence de nébulosité : je la » pris pour une nébuleuse; cependant je déterminai exac- » tement sa position. Je ne pus la voir le lendemain à cause » du brouillard. Le 13 je fus assuré que c'étoit une Comète, » mais les nuages m'empêchèrent de l'observer : le 14 je ne » fus pas plus heureux, je vis seulement à peu-près la direc- » tion de son mouvement; mais je l'ai bien observée aujour- » d'hui 15, je l'ai jugée un peu plus lumineuse; peut-être » cela vient-il de ce que l'atmosphère étoit plus pure; voici mes premières observations de chaque jour ».

ANNÉE 1784.	TEMPS VRAI.	ASCENSION DROITE.	DÉCLIN. BORÉALE.
	H. M.	*D. M.*	*D. M.*
Avril 11	2. 31	315. 18	22. 21.
15	3. 18	307. 55	15. 28.

Déclinaison Septentrionale
Andromede
Ascension droite
PREMIERE COMETE DE 1784
Pegase
Le Lezard
Déclinaison Septentrionale

Digitized by Google

Le lendemain de la réception de ſa Lettre, le 15 Mai, par un ciel parfaitement beau & pur, je cherchai cette Comète avec ma grande lunette achromatique; je parcourus non-ſeulement toute la conſtellation du Renard, mais auſſi une grande partie du ciel. Je fis ces recherches non-ſeulement le 15, mais pluſieurs autres nuits, & il ne me fut pas poſſible de l'apercevoir; je ne trouvai, dans le Renard, que la belle nébuleuſe, ſans étoile, & ſous une forme ovale que j'avois découverte le 12 Juillet 1764, qui avoit alors $297^d\ 21'\ 41''$ d'aſcenſion droite, & $22^d\ 4'$ de déclinaiſon boréale. Cette nébuleuſe eſt rapportée dans mon Mémoire imprimé dans le volume de l'Académie, *année 1771, page 435*, ſous le *N.° 27*. C'eſt dans le voiſinage de cette belle nébuleuſe, que M. le chevalier d'Angos a découvert cette Comète.

Cette Comète a été ſans doute très-petite & de peu de durée, & il ne paroît pas qu'aucun Aſtronome de l'Europe l'ait obſervée. Il n'en eſt parvenu aucune obſervation à l'Académie, ni à ma connoiſſance, & M. le chevalier d'Angos paroît être le ſeul qui l'ait obſervée. Il a eu aſſez d'obſervations pour calculer les élémens de ſon orbite: les voici comme il me les a envoyés, & comme M. Pingré les a donnés à l'Académie, le 7 Décembre 1784.

Lieu du nœud aſcendant	$2^c\ 26^d\ 52'\ 9''$
Inclinaiſon de l'orbite	47. 55. 10.
Lieu du périhélie	10. 28. 54. 57.
Logarithme de la diſtance périhélie	9,8132683.

Paſſage par ſon périhélie, le 9 Avril 1784, à $21^h\ 16'\ 46''$, temps moyen, méridien de Paris.

Sens du mouvement..... rétrograde.

M. le chevalier d'Angos ne nous a envoyé d'autres obſervations de cette Comète, que les deux déterminations de ſon lieu, que je viens de rapporter.

Digitized by Google

OBSERVATION
DE L'ÉCLIPSE DE LUNE,
Faite à l'observatoire de la Marine, hôtel de Clugny, la nuit du 6 au 7 Mars 1784.

Par M. MESSIER.

LA Lune, avant le commencement de l'éclipse, paroissoit à travers des nuages rares, & sa lumière en étoit affoiblie; ces nuages continuèrent d'exister, de manière que le commencement de l'éclipse fut douteux, on ne pouvoit juger des limites de l'ombre que très-imparfaitement. Les observations du commencement de l'éclipse, des immersions des taches, & la mesure de la grandeur de l'ombre, furent incertaines jusqu'à $14^h 45' 27''$, que la Lune se découvrit; l'ombre alors sur la Lune, paroissoit belle, brune & bien terminée : on observoit que l'ombre étoit plus foncée au bord, que dans la partie intérieure qui couvroit déjà une partie de la Lune. Les observations qui furent faites pendant le temps que la Lune parut claire, durèrent jusqu'à $15^h 31' 50''$; des nuages alors très-épais s'élevèrent de l'horizon, poussés par un vent assez fort du Sud-est, & couvrirent la Lune entièrement : vers 16^h, il commença à pleuvoir. La Lune ayant reparu dans un intervalle de nuage, j'observai la grandeur de l'ombre; ensuite des nuages épais la couvrirent de nouveau jusqu'à la fin : la pluie augmenta, & elle tomboit très-fort à 6 & à 7 heures du matin, le 7.

J'ai employé à cette observation, une grande lunette achromatique de 40 lignes d'ouverture, & un grossissement de quarante fois; elle étoit garnie d'un micromètre à fils, qu'on pouvoit incliner dans tous les sens.

L'éclipse

Digitized by Google

L'éclipſe commença entre les taches de *Ariſtarchus* & *Harpalus*.

TABLE des Obſervations des Taches.

TEMPS VRAI.			N.os des Taches.	TACHES OBSERVÉES.
H.	*M.*	*S.*		
14.	16.	1	....	Pénombre foible.
14.	22.	0	....	Pénombre plus forte.
14.	25.	0	....	Commencement de l'éclipſe, douteux.
14.	31.	53	7	*Harpalus* au bord de l'ombre.
14.	36.	13	8	*Heraclides* au bord de l'ombre.
14.	38.	32	12	*Helicon* au bord de l'ombre.
14.	39.	48	3	*Ariſtarchus* au bord de l'ombre.
14.	45.	27	17	*Plato* au bord de l'ombre.
14.	46.	36	17	*Plato* entré.
15.	2.	2	....	Tache entre *Copernicus* & *Helicen*, au bord de l'ombre.
15.	2.	34	2	*Galileus* au bord de l'ombre.
15.	3.	34	4	*Keplerus* au bord de l'ombre.
15.	5.	23	*F*	*Mare-Serenitatis* entre dans l'ombre.
15.	16.	56	27	*Poſſidonius* au bord de l'ombre.
15.	17.	1	*G*	*Mare-Imbrium* entré dans l'ombre.
15.	19.	15	27	*Poſſidonius* à moitié dans l'ombre.
15.	20.	41	27	*Poſſidonius* dans l'ombre.
15.	21.	55	11	*Copernicus* au bord de l'ombre.
15.	24.	41	*F*	*Mare-Serenitatis* à moitié dans l'ombre.
15.	25.	50	2	*Galileus* s'éloigne de l'ombre, elle étoit reſtée au bord de l'ombre.
15.	31.	50	....	La Lune diſparoît dans un nuage très-épais.

Il eſt tombé de la pluie enſuite qui a continué. *Keplerus*

Digitized by Google

n'eſt entré dans l'ombre que de $\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{5}$. *Copernicus* étoit reſté juſqu'à ce moment au bord de l'ombre.

La fin de l'éclipſe n'a pu être obſervée à cauſe du mauvais temps.

OBSERVATION de la grandeur de l'ombre, & du diamètre de la Lune.

TEMPS. VRAI.	GRANDEUR obſervée.	
H. M. S.	*M. S.*	
14. 34. 38	3. 21	Grandeur de l'ombre.
14. 41. 21	4. 39	Grandeur de l'ombre.
14. 48. 30	7. 17	Grandeur de l'ombre.
14. 50. 56	30. 24	Diamètre de la Lune, perpendiculaire à ſon parallèle.
14. 55. 28	8. 13	Grandeur de l'ombre.
15. 7. 0	10. 16	Grandeur de l'ombre.
15. 23. 16	12. 7	Grandeur de l'ombre.
16. 7. 34	10. 13	Grandeur de l'ombre.

Nota. Une minute après cette dernière obſervation de la grandeur de l'ombre, la Lune entra dans un nuage très-épais, & ce que je viens de rapporter, eſt tout ce que j'ai pu obſerver de cette éclipſe.

Pendant tout le temps de ces obſervations, j'avois toujours vu le bord éclipſé de la Lune à travers l'ombre.

Digitized by Google

VÉRIFICATION (a)
DES NOUVELLES DÉCOUVERTES
Faites en Angleterre, ſur les Étoiles fixes.

Par M. CASSINI.

LORSQUE le célebre Huygens eut fait connoître en 1655, un ſatellite auprès de Saturne, on crut pendant long-temps qu'il ne pouvoit plus reſter d'autre planète à découvrir. Cette opinion étoit en partie fondée ſur l'idée aſſez ſingulière, que le nombre des ſatellites, qui ſe trouvoit alors de ſix, ne pouvoit ſurpaſſer celui des planètes principales du même ſyſtème. Mais les découvertes de Jean-Dominique Caſſini, prouvèrent par la ſuite, que la Nature n'eſt point aſſervie à de ſuperſtitieuſes loix de nombre & d'égalité.

Après les dernières découvertes de Caſſini, on devoit croire, à bien plus juſte titre, que notre ſyſtème planétaire étoit complet, & qu'à l'exception des Comètes, nous pouvions nous flatter de connoître toutes les planètes compagnes de la Terre, & ſoumiſes comme elle à l'empire du Soleil; en effet, les plus grandes lunettes & les recherches des plus infatigables obſervateurs, pendant un ſiècle, n'avoient pu rien découvrir de nouveau. On fut donc bien étonné d'apprendre, dans ces derniers temps, environ cent années après la découverte du dernier ſatellite de Saturne, qu'il exiſtoit encore une planète du premier ordre, mue autour du Soleil, comme Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter & Saturne, ſuivant les mêmes loix, & décrivant une orbite également peu inclinée au plan de l'écliptique.

(a) L'Extrait de ce Mémoire a été lû à la rentrée publique de la Saint-Martin de l'année 1784.

Digitized by Google

Cette découverte, ſi inattendue, eut d'ailleurs des circonſtances ſingulières. En effet, elle ne fut pas dûe à un Aſtronome, & le téleſcope merveilleux qui perça juſque dans la retraite éloignée de ce nouvel aſtre, ne fut point l'ouvrage d'un Opticien; enfin, ce fut M. Herſchell, Muſicien Allemand, à qui l'on dut la connoiſſance de cette ſeptième planète principale, qui depuis tant de milliers d'années ſe promenoit en ſilence dans l'immenſe étendue d'une ſphère reculée, ignorée & confondue avec les plus petites étoiles.

Dans l'uſage ordinaire de l'Aſtronomie, lorſqu'il s'agit d'obſerver les éclipſes des ſatellites de Jupiter, de diſtinguer leurs ombres, d'apercevoir les bandes & les taches qui ſe remarquent ſur le diſque de pluſieurs planètes; la diſtinction parfaite de l'image, ſa netteté, ſa clarté, ſont les effets les plus eſſentiels à obtenir dans l'exécution d'une lunette ou d'un téleſcope. Mais dans d'autres circonſtances, comme celle où il s'agit principalement de découvrir & de percer dans les régions du ciel les plus reculées, de rapprocher de ſoi & de rendre plus viſible un corps infiniment éloigné ou très-petit, c'eſt au groſſiſſement alors qu'il convient particulièrement de s'attacher. Renonçant à la parfaite diſtinction, qui n'eſt plus la première condition, il faut, ſans s'embarraſſer des règles & des proportions preſcrites, chercher à procurer à ſon téleſcope le plus grand pouvoir amplifiant, aux dépens même, juſqu'à un certain point, de la netteté des images. Qu'importe en effet que cette diſtinction ſoit moins parfaite, pourvu qu'elle permette de diſtinguer entr'eux les objets, & de s'aſſurer de leur exiſtence.

On n'avoit point oſé, avant M. Herſchell, pouſſer plus loin qu'à trois ou quatre cents fois le groſſiſſement des plus forts téleſcopes. M. Herſchell franchit cette limite, il travailla lui-même avec un ſoin, des peines & une adreſſe infinies, des miroirs de téleſcope, dont il porta le groſſiſſement juſqu'à trois mille fois. Quelle que fut la perfection

Digitized by Google

du travail de ces miroirs, un tel pouvoir amplifiant ne pouvoit certainement avoir lieu avec une parfaite diſtinction des images; mais cette diſtinction toutefois fut ſuffiſante pour diſtinguer dans le ciel & faire connoître un nombre conſidérable d'Étoiles fixes, que l'on n'avoit point encore remarquées, doubles, triples, quadruples, offrant par leurs différens groupes, leur diverſité de grandeur & de couleur, l'aſpect le plus ſingulier & le plus curieux.

L'annonce de ces nouveautés devoit faire, & fit en effet une grande ſenſation parmi les Savans. La nouvelle planète avoit à peine été annoncée, que tous les Aſtronomes avoient fixé ſur elle leurs regards. Leurs inſtrumens, à la vérité, n'ayant point la force & la perfection de celui de M. Herſchell, ils ne l'avoient aperçue que comme une étoile fort petite, n'ayant rien d'abord qui pût la faire diſtinguer des fixes qui l'environnoient; mais le mouvement propre qu'ils lui reconnurent, & ſa conformité aux loix que ſuivent les autres planètes, les forcèrent bientôt de l'admettre dans notre ſyſtème. Il n'en fut pas tout-à-fait de même par rapport aux étoiles doubles, triples & quadruples, annoncées par M. Herſchell; comme perſonne n'avoit, ou ne croyoit avoir d'inſtrument aſſez fort pour diſtinguer ces merveilles, il fallut y croire ſur ſa parole, & les Savans, comme l'on ſait, ne ſont point crédules: c'eſt-là, & ce doit être leur caractère diſtinctif, de celui de l'ignorant & de l'enthouſiaſte, qui croyent tout ſans examen, admettent tout ſans preuve, & finiſſent toujours par rougir d'avoir été les jouets de l'erreur. M. Herſchell annonçoit dans les Étoiles doubles une variété de couleur aſſez ſingulière, ce qui fit penſer à pluſieurs que cette apparence n'étoit produite que par une illuſion optique, & que ces Étoiles paroiſſoient doubles, de la même façon que Vénus avoit paru anciennement accompagnée d'un ſatellite. Il étoit donc bien important pour la gloire de M. Herſchell, & pour l'intérêt de la vérité, de pouvoir vérifier ces nouvelles découvertes, & c'eſt ce que j'ai eſſayé de faire.

Digitized by Google

Il exiſtoit à Paris, depuis deux ans environ, chez M. Sykes, un téleſcope de 5 pieds de foyer, ſupérieurement exécuté, parfaitement monté, tel, en un mot, qu'ont coutume de ſortir des mains de M. Dollond, tous les ouvrages de cet illuſtre artiſte: j'avois anciennement eſſayé ce téleſcope ſur Jupiter & ſur Saturne, avec un pouvoir amplifiant de 460 fois, & l'avois trouvé très-bon. Je fus averti au mois d'Août de cette année, que M. Dollond, encouragé par l'exemple & les eſſais de M. Herſchell, venoit d'envoyer d'Angleterre, à M. Sykes, pour le téleſcope qui étoit à Paris, ſix nouveaux oculaires, dont le moindre devoit groſſir ſept cents cinquante fois, & le plus fort trois mille. Je fus infiniment curieux de connoître l'effet de ces nouveaux oculaires, de voir, ſur-tout, comment de pareils groſſiſſemens ſeroient ſupportés par un miroir fait ſur les principes ordinaires, & ſans intention d'y appliquer des oculaires d'une ſi grande force. M. Sykes eut l'honnêteté de me confier ſon inſtrument pour le ſoumettre aux différens eſſais que je jugerois à propos d'en faire *(b)*.

J'eſſayai d'abord ſucceſſivement ces oculaires ſur Saturne, & comme je m'y attendois bien, Saturne, avec le groſſiſſement de trois mille, ne me parut que comme une maſſe de lumière. Avec celui de deux mille, je commençai à diſtinguer un peu l'anneau d'avec le globe; avec celui de mille, j'obtins plus de diſtinction dans l'image; mais il faut l'avouer, ſi je n'euſſe été prévenu, mon œil, peu ſatisfait de ces premiers eſſais, eût dès-lors mis au rebut tous ces oculaires, ſur-tout après les avoir eſſayés ſur Jupiter, dont aucun ne put me faire voir les bords terminés.

Je paſſai enſuite aux Étoiles, & me propoſant de parcourir ſucceſſivement toutes celles que M. Herſchell annonce comme remarquables, dans ſon catalogue imprimé dans les *Tranſactions Philoſophiques de 1782*, j'engageai M. Méchain, membre de cette Académie, a vouloir bien ſe

(b) Ce téleſcope a depuis été acquis pour l'Obſervatoire royal.

Digitized by Google

joindre à moi dans mes premières recherches; le témoignage d'un ſi bon obſervateur ne devant laiſſer aucun doute au public & à moi-même, ſur ce que nous allions obſerver & remarquer de particulier.

Dans un Mémoire imprimé dans le ſoixante-douzième volume des *Tranſactions Philoſophiques pour l'année 1782*, M. Herſchell, rendant compte de ſes découvertes, a diviſé en ſix claſſes les Étoiles qu'il a obſervées avec ſon excellent téleſcope, & qu'il a trouvées dignes d'être diſtinguées par leur rapprochement entr'elles, leur poſition reſpective, leur petiteſſe, leur couleur.

On connoiſſoit bien déjà dans le ciel quelques Étoiles que l'on avoit appelées *doubles*, c'eſt-à-dire, qui à la vue ou avec de foibles lunettes, n'offrant l'apparence que d'une ſeule Étoile, ſe trouvoient compoſées de deux Étoiles ſéparées, ſitôt qu'on les obſervoit avec des lunettes un peu fortes: telles ſont les étoiles ζ de la Lyre, γ du Bélier, α des Gémeaux, γ de la Vierge, α de l'Hydre, &c. M. Herſchell a appelé pareillement *étoiles doubles*, *triples & quadruples*, celles qui, obſervées avec ſon nouveau téleſcope, lui ont préſenté un groupe de deux, trois & quatre Étoiles; il en a même remarqué qu'il appelle *doubles-doubles*, *doubles-triples*, parce qu'elles offrent l'aſſemblage de deux groupes peu éloignés, compoſés chacun de deux ou trois étoiles.

Dans la première claſſe, M. Herſchell a raſſemblé les Étoiles les plus difficiles à voir, parce qu'elles ſont infiniment proches l'une de l'autre, & ne paroiſſent ſéparées qu'en faiſant uſage de très-forts groſſiſſemens; il en compte 24 de cette eſpèce, ſavoir, 19 doubles & 5 triples *(c)*. La ſeconde claſſe compoſée de 38, renferme les Étoiles un peu plus ſéparées entr'elles, comme d'environ 5″. La troiſième

(c) Depuis la lecture de ce Mémoire, M. Herſchell, en 1785, a fait imprimer un nouveau catalogue d'Étoiles doubles, où la première claſſe ſe trouve portée à 97 Étoiles; la ſeconde, à 102; la troiſième, à 114; la quatrième, à 132; la cinquième à 137; & la ſixième à 121.

Digitized by Google

classe comprend celles encore plus éloignées entr'elles, depuis 5 jusqu'à 15 secondes; elles sont au nombre de 46. La quatrième, composée de 44 étoiles, comprend celles qui sont distantes de 15 à 30". La cinquième, celles qui sont distantes depuis 30 secondes jusqu'à une minute; elles sont au nombre de 51. Enfin, la sixième classe renferme les étoiles distantes entr'elles, depuis une minute jusqu'à deux: M. Herschell en rapporte 66.

Ce fut dans les mois d'Août, Septembre & Octobre, que profitant d'une saison & d'un ciel favorables, je me livrai à la recherche & à la vérification de ces Etoiles. Pour mieux accoutumer mon œil à ces observations, & connoître mon télescope, je commençai par observer les Étoiles les moins difficiles à voir, telle que la Polaire, qui est de la quatrième classe, & que M. Herschell désigne ainsi, *double, extrêmement inégale, la plus grosse Étoile de couleur blanche, la petite de couleur rouge.* En effet, la Polaire nous offrit l'assemblage de deux Étoiles, dont l'une très-brillante & blanche, l'autre au-dessus sur la droite, distante de la première d'environ 20 secondes, infiniment petite, de couleur plutôt bleuâtre que rouge: nous employames divers grossissemens qui nous présentèrent la même apparence.

Je ne rapporterai point ici toutes les Étoiles que j'observai pendant le cours de deux mois où je passai en revue toutes les Étoiles du catalogue de M. Herschell, visibles alors. M. Méchain s'étant joint plusieurs fois à moi, nous observions alternativement la même Étoile, & portant chacun séparément notre jugement sur la grandeur, la couleur & la distance, nous composions, de nos opinions réunies, la description de chaque Étoile, que nous comparions ensuite à celle de M. Herschell. Or nous devons dire que nous avons toujours trouvé exactement les Étoiles annoncées par M. Herschell, telles qu'il les a décrites, à quelques différences près sur les couleurs, différences qui peuvent tenir à la constitution momentanée de l'air,

ou

Digitized by Google

ou à d'autres circonſtances. Il eſt, nous l'avouerons, quelques-unes de ces Étoiles qui ont certainement une couleur marquée & particulière, par exemple, plus ou moins rouge, quelquefois orangée, d'autres fois bleuâtre; mais ces couleurs ne nous ont paru remarquables & diſtinctes que dans les plus groſſes des Étoiles doubles. Il nous a ſemblé que les couleurs de bleu-de ciel & de bleu-obſcur, que M. Herſchell attribue ſouvent aux plus petites Étoiles, n'étoient qu'une apparence dûe à leur petiteſſe: quant à nous, cette petiteſſe, la plupart du temps, ne nous a permis de leur diſtinguer aucune couleur.

La viſite générale que ces obſervations me donnèrent lieu de faire dans tout le ciel, me fit découvrir une quantité conſidérable d'Étoiles doubles & triples que M. Herſchell n'avoit point rapportées dans ſon catalogue. J'avois même commencé à en noter un certain nombre, mais voyant qu'il augmentoit à meſure que je parcourois de nouvelles conſtellations, & de plus ne doutant pas que M. Herſchell occupé de cette recherche, n'eût, depuis deux ans que ſon catalogue étoit imprimé, reconnu & fait la deſcription de ces mêmes Étoiles, je jugeai ce travail inutile, & crus même devoir reſpecter en cela l'eſpèce de propriété que M. Herſchell ſembloit avoir acquiſe ſur ces recherches. J'avouerai en outre, que je ne regardai comme vraiment curieuſes que les Étoiles renfermées dans les deux premières claſſes du catalogue, leſquelles, par leur extrême proximité, peuvent ſeules réellement mériter le titre d'*Étoiles doubles*, qui même n'eſt qu'un terme fort impropre: en effet, ces Étoiles doubles ne ſont autre choſe qu'un groupe de deux Étoiles fort proches l'une de l'autre, dont preſque toujours l'une eſt fort brillante, l'autre infiniment petite. Les triples offrent un groupe de trois Étoiles, dont communément l'une eſt groſſe, & les deux autres beaucoup plus petites; l'une eſt ordinairement très-proche de la plus groſſe, & l'autre plus éloignée. Ces petites Étoiles ſont, la plupart du temps, comme des points,

ſouvent d'une lumière aſſez obſcure: mais cette petiteſſe n'eſt peut-être dûe qu'à leur ſeul éloignement; la proximité réciproque, à leur ſeule direction par rapport à nous. Il peut donc y avoir des intervalles immenſes entre ces deux, trois & quatre Étoiles que nous réuniſſons en une ſeule, ſous la dénomination d'*Étoiles doubles*, *triples* & *quadruples*: or, vouloir étendre ces dénominations à des Étoiles ſéparées de pluſieurs minutes, ce ſeroit, ce me ſemble, vouloir d'une conſtellation entière faire une ſeule Étoile. On peut donc ſe borner à diſtinguer celles dont la diſtance n'excède pas 5 à 6 ſecondes; ces Étoiles ſont véritablement difficiles à voir, demandent un œil exercé, un très-bon inſtrument, de forts groſſiſſemens & des circonſtances favorables: c'eſt en plein air qu'il eſt plus facile de les obſerver, cependant on peut le faire du dedans des appartemens, en ayant ſoin d'ouvrir les fenêtres avant de ſe mettre à la lunette, un temps aſſez conſidérable pour que l'air extérieur & l'air intérieur puiſſent ſe mettre en équilibre & devenir uniformes. En mettant l'œil à la lunette, on ne voit rien d'abord, ou plutôt on ne voit qu'une ſeule & principale Étoile; mais petit-à-petit l'œil s'accoutume & parvient bientôt à diſtinguer la petite Étoile voiſine, dont on rend la diſtance ou l'écartement de la groſſe plus ſenſible, en augmentant ſucceſſivement le groſſiſſement des oculaires.

Il ne faut pas croire cependant qu'il ſoit néceſſaire d'appliquer aux téleſcopes des oculaires de la plus grande force; je n'en ai employé que deux d'un groſſiſſement peu commun; l'un groſſiſſoit 460 fois, l'autre 1350, & il n'eſt pas une ſeule des Étoiles doubles les plus difficiles à voir, que je n'aie aperçu avec le groſſiſſement de 460. M. Herſchell n'a eu même beſoin que d'un pouvoir amplifiant de 227 pour les voir preſque toutes; il appliquoit enſuite un groſſiſſement de 460, pour rendre l'intervalle plus ſenſible & plus grand: d'où l'on conclura facilement que ce n'eſt pas, comme bien des perſonnes ont pu le penſer,

Digitized by Google

à des groſſiſſemens extraordinaires que M. Herſchell a dû la découverte de ces Étoiles ſingulières; car nous l'avons déjà dit plus haut, on avoit pouſſé juſqu'à 400 fois le groſſiſſement des téleſcopes, il y en avoit pluſieurs de cette force entre les mains de quelques obſervateurs, ſuffiſans par conſéquent pour apercevoir tout ce que M. Herſchell a découvert, même la nouvelle Planète, dont le diſque eſt aſſez ſenſible avec un groſſiſſement de 250. Mais oſons le dire, la découverte des lunettes achromatiqnes, eſt juſqu'à préſent un ſervice important que l'Optique a rendu plutôt aux Aſtronomes qu'à l'Aſtronomie: en effet, elle a procuré à ceux-ci plus de commodités, de facilité, d'agrément, pour ainſi dire, dans les obſervations; mais d'un autre côté elle les a peut-être un peu trop dégoûtés de l'uſage pénible & plus difficile des gros téleſcopes & des longues lunettes, les ſeuls cependant à qui l'on doive les grandes découvertes qui ont été faites. Il ne ſera pas impoſſible ſans doute de pouſſer un jour beaucoup plus loin la perfection des lunettes achromatiques; mais en attendant, & dans l'état actuel des choſes, il eſt toujours vrai de dire que le pouvoir de ces lunettes eſt très-limité, que non-ſeulement on n'a rien découvert avec elles, au-delà de ce que les lunettes ſimples ont fait connoître, mais même qu'elles ne font pas l'effet des lunettes de moyenne grandeur. Profitons donc, à l'exemple de M. Herſchell, des forces & des moyens que nous prêtent les téleſcopes, & n'en négligeons plus tant l'uſage.

Il n'eſt pas encore poſſible aujourd'hui de prononcer ſur l'utilité & les conſéquences que l'Aſtronomie peut tirer de la découverte de ces Étoiles doubles & triples, qui nous laiſſent même de grands doutes & de grandes difficultés à réſoudre. En effet, que peuvent être ces petites Étoiles, foibles & obſcures compagnes de plus grandes? en ſont-elles voiſines ou dépendantes? ſont-elles d'un autre ordre, d'une autre nature? doit-on les comparer à des Satellites vis-à-vis de leur Planète principale? ou ſont-

elles ſeulement des Étoiles d'une ſphère infiniment plus reculée, que leur direction ſeule fait paroître proches d'autres Étoiles plus brillantes, parce qu'elles ſont plus rapprochées de nous? Enfin la poſition reſpective de ces Étoiles reſtera-t-elle toujours la même? leur grandeur n'éprouvera-t-elle pas des variations? parmi ces nombreuſes Étoiles ne ſe trouvera-t-il pas encore quelque nouvelle Planète? Voilà ce qui mérite d'être ſuivi long-temps, voilà ce qui ſera intéreſſant à obſerver dans les ſiècles futurs, & rend cette découverte digne de notre curioſité. M. Herſchell, uniquement occupé de cet objet de recherches, a acquis ſans doute plus que perſonne, une pratique de ces ſortes d'obſervations, & des connoiſſances qui doivent lui mériter la confiance des Savans, ſur toutes les découvertes qu'il annonce. Néanmoins je n'ai pas cru inutile d'aller ſur ſes traces me livrer à une vérification qui m'a mis dans le cas de confirmer ces découvertes, & de rendre à leur auteur la juſtice & l'hommage qui lui ſont dûs.

Je joins à ce Mémoire une Table des Étoiles les plus curieuſes à obſerver *(voyez Tranſact. Phil. 1782, 1785)*.

Digitized by Google

ÉTOILES doubles de la première Classe.

Aigle, précéd. γ
π
24.e
préc. 62.e
Androm. préc. 56.e

Balance, N. 11.e
Baleine, suiv. 54.e
Bélier, précéd. 6.e
préc. 39.e
Baleine, suiv. 54.e
Bouvier..... ε
1
31.e
39.e
51.e

Cancer..... 11.e
57.e
Capricorne, préc. 29.e
Cassiopée..... σ
précéd. β
préc. 25
Céphée, suiv.... λ
suiv. 32
précéd. 6

Petit Cheval, préc. 1.e
suiv. 2
S. γ
Cigne..... δ
18.e
suiv. 33
Cocher, précéd. μ
S. 50.e
préc. nébul.
Coupe, N..... α
Couronne, θ — δ
Petit Chien, la cuisse

Dragon, préc... β
λ
ε
16
N. 31
39
48

La Flèche, suiv. β
Hercule..... ζ
suiv. φ
46
N. 105

Linx, suiv.... 36
38
39 — 41
préc. 44
la poitrine
Lion..... γ
ω
préc. 44
Lyre, suiv..... δ
suiv. γ
18.e — β

Ophiucus..... λ
7
69
73
Orion..... π
préc. 7
pr. 10
25
préc. 26
30
32
52

Grande Ourse... ζ

C.de Ourse, préc. 44
65

Persée, préc... 18

Sagittaire..... β
Serpentaire.... 38
Serpent..... δ
π
49

Taureau, préc.. ζ
préc. 8
Triangle..... ε

Verseau, préc.. λ
préc. β
4
Vierge..... 81

Double-doubles.

Balance..... ξ
Persée..... 37

Triple-double-double.

Lyre..... ε

ÉTOILES triples de la première & de la seconde Classe.

Aigle..... 37.e

Balance..... 51
Bélier..... π

Cancer..... ζ
Cassiopée..... 55
Coupe, N..... 4
Cigne, suiv.... π
préc. 64
Couronne..... σ

Flèche, S..... 15

Licorne..... 11
Linx..... 12
Lion..... 90
Lyre, pr..... ρ

Orion, suiv... 47

Verseau, suiv.. 13
72

Double-triples.

Aigle..... 33.e

Cassiopée..... d
Orion..... σ
44

Quadruples.

Cigne, préc.. 25.e
préc. 77
Lyre..... β
Lézard..... 8
Monoceros, préc. 25

Orion..... λ
θ

Quintuple.

Gémeaux, préc. H

Multipliées.

Cocher..... 15.e
S. 38
Gémeaux..... β

Nota. Les Étoiles de cette Table ſont déſignées par les lettres de Bayer ou les numéros du catalogue de Flamſteed; *ſuiv.* ſignifie *ſuivante*; *préc. précédente*; *N.* au *Nord*; *S.* au *Sud*; *pr. proche*; θ — δ, entre θ & δ.

Digitized by Google

MÉMOIRE
SUR UN NOUVEAU GENRE DE PLANTE
Nommé Brucea,
ET
SUR LE FAUX BRESILLET D'AMÉRIQUE.

Par M. le Chevalier DE LA MARCK.

21 Janvier 1784. ON donne le nom de *Brucea*, en Angleterre, à un arbriſſeau qui y a été apporté de l'Abyſſinie, par M. le Chevalier Bruce, que l'on cultive depuis quelques années au Jardin du Roi, où il fleurit tous les ans, & dont nous croyons qu'aucun Botaniſte n'a encore donné la deſcription. Nous le nommerons

Brucé anti-dyſentérique; *Brucea anti-dyſenterica; Brucea floribus tetrandris, racemis ſimplicibus.*

Cet arbriſſeau, dont la figure approche de celle d'un petit noyer, s'élève à la hauteur de 5 ou 6 pieds en Europe, & peut-être une fois davantage dans ſon pays natal. Sa tige eſt droite, recouverte d'une écorce griſâtre, un peu ridée, & ſe diviſe, dans ſa partie ſupérieure, en quelques rameaux lâches, redreſſés, & feuillés à leur ſommet : ces rameaux ont leur ſuperficie raboteuſe, couverte de tubercules épars, qui proviennent des cicatrices un peu ſaillantes qu'ont laiſſé les anciennes feuilles après leur chute, & ſont garnis, ſur-tout vers leur extrémité, d'un duvet court & rouſſâtre. Les feuilles ſont grandes, rapprochées les unes des autres, & éparſes autour des ſommités des rameaux, où elles forment de belles roſettes étalées & terminales, qui donnent à cet arbriſſeau un aſpect aſſez agréable. Chaque feuille eſt longue d'un pied ou même davantage, ailée avec impaire, &

Digitized by Google

compoſée de onze ou treize folioles ovales-lanceolées, pointues, entières, molles, d'un vert-jaunâtre, & glabres, excepté en leurs bords & ſur leurs nervures qui ſont chargés, de même que les pétioles, de poils courts & rouſſâtres; ces folioles ſont ſoutenues chacune par un pétiole court, ont environ trois pouces de longueur ſur une largeur d'un pouce ou un peu plus, & ſont oppoſées par paires, à l'exception de celles qui ſont terminales.

Les fleurs de cet arbriſſeau ſont d'un ſeul ſexe ſur chaque pied, ou *dioïques*, ſelon l'expreſſion de M. Linné. L'individu mâle de l'eſpèce dont nous traitons, eſt peut-être le ſeul que l'on poſſéde en Europe; il porte des fleurs fort petites, verdâtres, rougeâtres avant leur développement, & ramaſſées par petits paquets ſéparés & preſque ſeſſiles, ſur de longs péduncules communs, grêles & velus: ces péduncules forment des grappes ſimples, linéaires, axillaires, ſolitaires dans chaque aiſſelle, un peu moins longues que les feuilles, & qui reſſemblent en quelque ſorte à des chatons longs & très-menus. Les paquets de fleurs ſont à des diſtances inégales entr'elles, & vont toujours en ſe rapprochant d'autant plus les uns des autres, qu'ils ſont plus près du ſommet des grappes.

Chacune des fleurs dont il s'agit, conſiſte, 1.° en un calice velu en dehors, & profondément diviſé en quatre découpures ovales-pointues, ouvertes & comme glanduleuſes à leur ſommet; 2.° en quatre pétales ovales-pointus, velus ou ciliés, alternes avec les diviſions du calice, auxquelles ils reſſemblent beaucoup, & ouverts en étoiles; 3.° en quatre étamines, une fois moins longues que les pétales, oppoſées aux diviſions du calice, & dont les filamens inſérés dans les échancrures ou ſinuoſités du diſque qui occupe le centre de la fleur, portent chacun une anthère arrondie, rouge avant de s'ouvrir, blanchâtre dès qu'elle a répandu ſa pouſſière, & diviſée en deux loges; 4.° en un diſque plane, charnu, ayant quatre échancrures latérales, qui lui donnent la forme d'une croix

Digitized by Google

de Malte, & occupant le centre de la fleur, à la place du piſtil qui ne s'y rencontre pas.

Voilà tout ce que nous ſavons de poſitif ſur la fructification de cet arbriſſeau; il commence à fleurir tous les ans dès l'entrée du printemps, & développe ſes fleurs avec une lenteur ſi conſidérable, que dans l'été il s'en épanouit encore; mais il en tire peu d'éclat, à cauſe de leur petiteſſe & de leur peu d'apparence: ſon bois eſt blanc, & ſes rameaux contiennent une moelle aſſez abondante. On donne à cet arbriſſeau le nom de *Brucé anti-dyſentérique*, parce qu'on prétend que les habitans du pays où il croît, ſe ſervent de ſes feuilles pour ſe guérir de la dyſſenterie.

M. Smeathman, Anglois, diſtingué par ſes connoiſſances en Hiſtoire Naturelle, & qui a voyagé en Afrique, a rapporté, de *Siera-Leona*, des morceaux ſecs d'un autre arbriſſeau qui paroît être du même genre que celui dont nous venons de traiter, & auquel, par cette raiſon, on a donné, en Angleterre, le nom de *Brucea paniculata*, ou Brucé à panicules. Il diffère principalement de celui qui précède, en ce que ſes grappes de fleurs ſont rameuſes & paniculées. Ses fleurs, que nous n'avons vues que ſur des morceaux ſecs en très-mauvais état, nous ont paru toutes mâles ſeulement, & à étamines un peu plus longues que les pétales.

Il ſuit de ce que nous venons d'expoſer ſur le genre du *Brucea*, que la privation où nous ſommes des individus femelles des eſpèces de ce genre, nous laiſſant ignorer & la forme des fleurs femelles, & la nature des fruits qu'elles produiſent, nous n'avons pu établir qu'un caractère générique incomplet. Mais on trouve en Amérique, des arbriſſeaux qui nous paroiſſent avoir de ſi grands rapports avec les *Brucea* d'Afrique, que nous préſumons qu'ils ſont de la même famille, & d'un genre qui en eſt très-voiſin par ſes rapports. Or, comme ces arbriſſeaux ne ſont pas encore bien connus des Botaniſtes, nous allons

Digitized by Google

allons expoſer en peu de mots ce que nos obſervations & nos recherches nous ont appris à leur ſujet.

Des Bréſillots, ou *faux Bréſillets d'Amérique.*

Le P. Plumier, dans la portion de ſes Découvertes botaniques qui n'a point encore vu le jour, fait mention, ſous le nom de *Pſeudo-Braſilium*, de deux arbriſſeaux des Antilles, qui lui paroiſſent avoir tant de rapports entr'eux, qu'il les réunit dans ſa deſcription, regardant l'un comme une ſimple variété de l'autre. Nous allons néanmoins les diſtinguer & en traiter ſéparément, en connoiſſant un que l'on cultive au Jardin du Roi, où nous l'avons vu fleurir, & qui nous paroît différent de l'autre.

Le premier eſt le *Bréſillot* velu *; pſeudo-braſilium hirſutum*, Plum. mſſ. C'eſt auſſi vraiſemblablement le *tariri guianenſis*, Aubl. guian. ſuppl. pag. 37, tab. 390; & le *tariri arbor tinctoria, foliis alternis, obſcurè violaceis*, Barr. Franc. Equin. 106.

C'eſt un arbriſſeau qui s'élève à la hauteur de huit à dix pieds ſur une tige droite, de près de 2 pouces de diamètre, recouverte d'une écorce finement gercée & d'un brun-griſâtre. Cette tige ſe diviſe, à ſon ſommet, en pluſieurs rameaux alternes, couronnés chacun de grandes feuilles éparſes & rapprochées en roſettes terminales; ſon bois eſt d'un rouge-brun, ou au moins prend cette couleur quelque temps après qu'il a été expoſé à l'air. Ses feuilles ſont longues preſque d'un pied & demi, ailées avec impaire, & compoſées de quinze à dix-neuf folioles ovales-pointues, entières ou legèrement anguleuſes, liſſes, vertes & luiſantes en deſſus, velues dans leur contour, d'un vert-pâle en deſſous, tantôt oppoſées par paires, & tantôt diſpoſées alternativement, & ſoutenues par un petiole commun, pubeſcent & rougeâtre. Ces folioles ont trois à quatre pouces de longueur, & ſont portées chacune ſur un petiole propre fort court; elles prennent une couleur pourpre-noirâtre en ſe deſſéchant.

Les fleurs ſont très-petites, d'un rouge-obſcur, d'un

ſeul ſexe ſur chaque individu, & viennent ſur des grappes rameuſes & terminales. Celles qui ſont mâles ne nous ſont pas connues : les fleurs femelles conſiſtent en un calice velu en dehors, perſiſtant, & profondément diviſé en cinq découpures pointues; en cinq pétales lancéolés & un peu plus longs que le calice; & en un ovaire ſupérieur, ovale, glabre, dépourvu de ſtyle, & ſurmonté d'un ſtigmate ſeſſile, à deux lobes planes, ouverts & pubeſcens.

A ces fleurs ſuccèdent des fruits mous, pulpeux, de la forme de nos olives, mais un peu plus petits, d'un rouge de corail dans leur maturité, légèrement acides, & qui contiennent chacun un noyau oſſeux, de même forme & uniloculaire.

On trouve cet arbriſſeau à Saint-Domingue, à la Jamaïque & dans la Guiane. Lorſqu'on entame ſes rameaux, ou ſon tronc, dit le P. Plumier, il en ſort un ſuc qui noircit, & qui, par ſa cauſticité, forme une tache preſque ineffaçable s'il tombe ſur quelque partie du corps; ſon bois teint comme le bréſillet, mais d'une couleur qui eſt plus brune que rouge. Aublet dit, que ſes feuilles écraſées toutes vertes, & preſſées dans un morceau de coton, lui communiquent d'abord une teinture verte, qui peu après devient de couleur violette.

Le ſecond, eſt le bréſillot glabre; *pſeudo-braſilium glabrum.* Plum. mſſ.

A la vérité, ce bréſillot a de très-grands rapports avec le précédent; mais il paroît qu'il en diffère, 1.° en ce qu'il eſt plus petit, ne s'élevant qu'à la hauteur de 5 à 6 pieds ſeulement; 2.° que ſon bois eſt d'un blanc-pâle & moins propre à teindre; 3.° que ſes feuilles ſont tout-à-fait glabres, moins grandes, & n'ont que onze à treize folioles, dont les ſupérieures ſont plus longues & lancéolées.

Cet arbriſſeau croît naturellement à Saint-Domingue; on en cultive un individu femelle au Jardin du Roi, qui y fleurit vers le commencement de Novembre; ſes grappes de fleurs ſont rameuſes, terminales & longues de quatre ou

Digitized by Google

cinq pouces; les péduncules, communs & particuliers ſont un peu pubeſcens: les fleurs, dans tout le reſte, ne paroiſſent pas différer de celles du bréſillot velu.

Quoique d'une part nous ne connoiſſions pas les fleurs femelles & les fruits des *Brucea*, & que de l'autre nous ignorions les caractères des fleurs mâles des *pſeudo-braſilium*, ces divers arbriſſeaux nous paroiſſent néanmoins devoir être tous rapportés à la même famille que le comoclade, les ſumacs, le mollé, l'anacarde, &c. genres de plante avec leſquels ils ont des rapports très-marqués.

Obſervation. On trouve en Amérique, un arbriſſeau encore peu connu, nommé par le P. Plumier, *dodonæa aquifolii folio tricuſpidato* (Burm. amer. t. 118, f. 1), & qui ſemble avoir auſſi quelques rapports avec le *Brucea*. Néanmoins cet arbriſſeau ſe rapproche encore plus du *comocladia* de Linné, dont il eſt ſans doute une eſpèce; car ſes fleurs ont de même un calice à trois diviſions, trois pétales, trois étamines, & un ovaire ſupérieur qui ſe change en une baie oblongue, contenant un noyau bifide ou à deux lobes. Nous croyons qu'on peut le nommer

Comocladia (tricuſpidata) foliis pinnatis; foliolis ovatis tricuſpidatis, racemis ſubſimplicibus.

Digitized by Google

RECHERCHES SUR LE CALCUL INTÉGRAL.

Par M. CHARLES.

SOIT entre les trois variables x, y, z, l'équation en différences partielles $Mp + Nq + L = 0$; $(dz = p\,dx + q\,dy)$; je dis que quand la proposée sera homogène entre x, y & z, son intégrale générale dépendra de l'intégration de deux équations ordinaires, chacune entre deux variables.

DÉMONSTRATION.

Multipliant la proposée par dx, l'équation hypothétique par M, & ajoutant, on a

$$Mdz + Ldx = q\,(Mdy - Ndx);$$

multipliant cette dernière équation par A, & ajoutant de part & d'autre la même quantité $q\,(Mdz + Ldx)$, on a

$$(Mdz + Ldx)\,(q + A) = q\,[Mdz + Ldx + A(Mdy - Ndx)].$$

Je rappelle d'abord que toutes les fois que les équations $Mdz + Ldx = 0$, & $Mdy - Ndx = 0$, pourront s'intégrer, séparées ou combinées ensemble, l'équation en différences partielles sera intégrée, comme l'a observé M. de la Grange, *dans les Mémoires de Berlin, pour l'année 1779*; car dans ce cas, on pourra trouver le facteur A qui rend le coéfficient de q multiple R, d'une différentielle exacte; & alors soit dv, cette différentielle exacte, on aura $(Mdz + Ldx)\,(q + A) = qRdv$. Puisqu'on a $v = F(x, y, z)$; (F indiquant une fonction

Digitized by Google

connue), on a $y = \eta(x, \nu, \zeta)$; (η indiquant une fonction renverſée). Subſtituant cette valeur de y dans M, L, &c. on a $M' d\zeta + L' dx = \frac{\eta' R'}{\eta' + A'} d\nu$, & ζ eſt maintenant une fonction cherchée de x & de ν. Ainſi, ſi on fait ν conſtant, $d\zeta$ deviendra une différence partielle relativement à x, & on aura $M' \partial\zeta + L' dx = 0$, ($\partial$ étant le ſigne de la différence partielle); il n'y a donc qu'à intégrer, en faiſant ν conſtant, & prendre, pour arbitraire, une fonction de ν, c'eſt-à-dire, de $F(x, y, \zeta)$.

La queſtion ſe réduit donc à intégrer l'équation

$$M d\zeta + AM dy + (L - AN) dx = 0,$$

quel que ſoit M, N & L.

Suppoſons les homogènes, pour revenir au théorème que je dois démontrer. Soit A une fonction de dimenſion nulle des trois variables x, y, ζ, & faiſons $x = r\zeta$ & $y = s\zeta$; nous aurons

$$-\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{e m ds + (l - an)\, dr}{m + lr + a(ms - nr)},$$

équation dont le ſecond membre doit être une différentielle complète: a eſt la transformée de A, & les petites lettres l, m, n ſont les transformées des majuſcules L, M, N diviſées par une puiſſance de ζ, dont l'expoſant indique la dimenſion de ces majuſcules. Maintenant, ſoit

$$m + lr + a(ms - nr) = \frac{1}{\downarrow} \text{ \& } \frac{m - (m + lr)\, m\downarrow}{ms - nr} = \theta;$$

nous aurons

$$-\frac{d\zeta}{\zeta} = \theta ds + (e - \theta f)\, dr,$$

e & f ſont des fonctions connues de r & s, θ une fonction des mêmes variables qu'il faut déterminer pour que la fonction $\theta ds + (e - \theta f) dr$ ſoit une différentielle complète: donc,

$$\frac{\partial\theta}{dr} + f\frac{\partial\theta}{ds} + \theta f' - e' = 0:$$

Digitized by Google

∂ & ∂ indiquent des différences partielles ; f' & e' ſont les coéfficiens de ds dans la différenciation de f & e : donc

$$d\theta + (\theta f' - e')\,dr = \frac{\partial\theta}{ds}\,(ds - f\,dr).$$

Il faut donc intégrer complètement l'équation

$$ds - f\,dr = 0,$$

entre les deux variables r & s, pour avoir l'équation $s = F(r, v)$, v étant l'arbitraire ; ſubſtituer pour s cette valeur dans l'équation $d\theta + (\theta f' - e')\,dr = 0$, & ſatisfaire á cette dernière en faiſant v conſtant.

Diſons un mot des équations à un plus grand nombre de variables.

Soit entre les quatre variables x, y, v & z, l'équation linéaire en différences partielles

$$Mp + Nq + Or + L = 0 \quad (dz = p\,dx + q\,dy + r\,dv).$$

Chaſſant p, on aura

$$M\,dz + L\,dx = q(M\,dy - N\,dx) + r(M\,dv - O\,dx);$$

multipliant tout par A, enſuite ajoutant & retranchant différentes quantités, on aura

$$(M\,dz + L\,dx)(A + r) = (Aq - rB)(M\,dy - N\,dx) + r[M\,dz + AM\,dv + BM\,dy + (L - AO - BN)\,dx].$$

Suppoſons qu'on puiſſe rendre la fonction à quatre variables, coéfficient de r multiple S d'une différentielle exacte, par le moyen des coéfficiens, juſqu'à préſent indéterminés A & B, & ſoit $d\,v'$, cette différentielle ; on aura $v' = F(x, y, v, z)$, & par conſéquent $v = \mathcal{F}(x, y, v', z)$. Subſtituant cette valeur de v dans la propoſée, on aura

$$(M'\,dz + L'\,dx)(A' + r') = (A'q' - r'B')(M'\,dy - N'\,dx) + r'S'\,dv'.$$

Digitized by Google

Donc, ſi on fait v' conſtant, on aura

$$M'dz + L'dx = \frac{A'q' - r'B'}{A' + r'}(M'dy - N'dx),$$

équation linéaire ou qui du moins peut ſe traiter comme telle.

Suppoſons maintenant que les coëfficiens M, N, O, L ſont homogènes entre les quatre variables x, y, v, z; regardons A & B comme des fonctions de dimenſion nulle de ces variables, & faiſons $x = x'z$; $y = y'z$; $v = v'z$; l'équation

$$Mdz + AMdv + BMdy + (L - AO - BN)dx = 0,$$

qui doit être poſſible, deviendra

$$M'dz + A'M'(v'dz + zdv') + B'M'(y'dz + zdy') + \&c.$$

A' & B' repréſentent les transformées de A & B, & M', N', &c. les transformées des lettres non accentuées correſpondantes, diviſées par une puiſſance de z, dont l'expoſant indique la dimenſion des lettres M, N, &c.; donc

$$-\frac{dz}{z} = \frac{A'M'dv' + B'M'dy' + (L' - A'O' - B'N')dx'}{M' + A'M'v' + B'M'y' + (L' - A'O' - B'N')x'},$$

équation, dans le ſecond membre de laquelle z eſt évanoui. Maintenant ſi on fait différentes transformations indiquées par la nature de la queſtion, pour rendre la recherche des indéterminées, plus facile, on trouvera facilement qu'on peut faire

$$-\frac{dz}{z} = \theta dv' + \lambda dy' + (A + B\theta + P\lambda)dx';$$

A, B, P étant des fonctions connues de v', y', & x'; θ & λ des fonctions inconnues des mêmes variables, qu'il faut déterminer, pour que le ſecond membre de l'équation ſoit une différentielle exacte, d'où on peut conclure ce théorème.

Pour réduire une équation linéaire homogène en différences partielles du premier ordre, entre un nombre

Digitized by Google

quelconque de variables, à une équation auſſi linéaire & du premier ordre, où le nombre des variables ſeroit moindre d'une unité, il faut rendre différentielle exacte la fonction

$$\theta\, dx + \lambda\, dy + \varkappa\, dv + \&c.$$
$$+ (A + B\theta + D\lambda + E\varkappa + \&c.)\, ds,$$

le nombre des variables $x, y, v, \ldots s$ étant moindre d'une unité que dans la propoſée; A, B, D, E, &c. étant des fonctions données de ces variables; θ, λ, $\varkappa$, &c. des fonctions inconnues.

MÉMOIRE

Digitized by Google

MÉMOIRE

SUR LA DISPARITION DE L'ÉTOILE

De la conſtellation du Taureau, que Flamſtéed a placée dans ſon Catalogue, pour 1690, à 51^d 46' 50" de longitude, avec une latitude de 0^d 5' 1/2 méridionale.

Par M. LE MONNIER.

Lû le 15 Déc. 1784.

IL y a huit jours que l'Académie a été informée par une lettre écrite de Limoges, au Préſident de l'Académie, qu'on ne voyoit plus l'étoile du Taureau, de la ſixième grandeur, qui eſt la huitième de cette même conſtellation. De plus, l'auteur de cette remarque importante, M. Montaigne, ajoute qu'il a fait cette recherche, ſoupçonnant, & peut-être avec plus de fondement * que ne doit être une ſimple conjecture, que cette même étoile pourroit bien être la nouvelle Planète découverte par Herſchell, à Bath, le 13 Mars 1781, vers le commencement du ſigne de l'Écreviſſe, ou fin du ſigne du Taureau.

Cette étoile du catalogue de Flamſtéed, ne ſe trouve point dans la première édition publiée en 1712, du catalogue Britannique : on ne la retrouve pas non plus dans le zodiaque de Senex; mais j'ai eu ſoin de la faire inférer dans le zodiaque de Dheulland.

J'ai fait part les jours ſuivans, à M. le Duc de la Rochefoucault & à Limoges, des deux obſervations que Flamſtéed en avoit faites, & que j'ai retrouvées dans l'année 1704, le 29 Septembre & le 1.er Octobre ſuivant. J'en ai fait un nouveau calcul, ayant égard à l'aberration

* M. Montaigne ſuppoſoit pour lors qu'elle avoit été obſervée à Gréenwich, avant 1690.

& à la nutation de η des Pléïades, dont l'aſcenſion droite apparente a dû être, ſelon mon catalogue, de $52^d\ 29'\ 45''$; d'où ôtant $2^d\ 56'\ 6''$, ayant égard à $4''\frac{1}{2}$ de temps, pour l'erreur du plan de l'arc mural, la longitude ſera $\aleph\ 21^d\ 57'\ 51''$, avec une latitude auſtrale de $5'\ 6''\frac{1}{2}$: dans le calcul, j'ai ſuppoſé l'obliquité apparente de l'écliptique, $23^d\ 29'$, & la déclinaiſon boréale de l'étoile, $18^d\ 12'\ 40''$.

En 1757 & 1758, lorſque je travaillois au catalogue des étoiles zodiacales, je n'ai point aperçu cette étoile, mais ſeulement la double qui ſuit, & quelques autres qui ſont plus au nord, & preſque au même degré d'aſcenſion droite.

Oppoſition de Jupiter au Soleil, obſervée le 27 Août 1784.

A $11^h\ 51'\ 49''$, la planète de Jupiter a paſſé au méridien après la 1.re σ du Verſeau $55''\frac{1}{2}$ de temps, à la pendule, & à diſtance du Zénit de $60^d\ 36'\ 50''$.

Donc longitude apparente obſervée $\chi\ 2^d\ 34'\ 30''$, avec une latitude auſtrale de $1^d\ 20'\ 42''$.

Les Tables de Halley, au même inſtant, indiquent $55''\frac{1}{2}$ de plus, c'eſt-à-dire la longitude $\chi\ 2^d\ 35'\ 25$ à $26''$.

Quant à l'oppoſition de Saturne au Soleil, on la déduira de l'obſervation ſuivante : le 13 Juillet, à $11^h\ 53'\ 2''$ de temps vrai, à diſtance apparente du Zénit de $70^d\ 40'\ 10''$, Saturne a précédé f du Sagittaire de $0^h\ 5'\ 10''$, & avoit ſuivi *e* du voile de $55''$ de temps; ce qui donne ſon aſcenſion droite apparente $292^d\ 10'\ 30''$, & ſa déclinaiſon méridionale $21^d\ 50'\ 45''$, ſa longitude $\leftthreetimes\ 20^d\ 30'\ 27''\frac{1}{2}$, avec une latitude boréale de $3'\ 31''\frac{1}{2}$. Les Tables de Halley donnent la longitude de Saturne $6'\ 53''$ moins avancée, au lieu que l'année précédente, le 1.er Juillet, à $11^h\ 56'\ 32''$, elles donnoient la longitude de Saturne $8'$ moins avancée.

Digitized by Google

OBSERVATION
SUR UNE ILLUSION D'OPTIQUE.

Par M. DE FOURCROY.

LE cahier de Septembre dernier, du Journal de phyſique, en rapportant les effets ſinguliers d'un treillis ſur la vue de M. de Godart, *page 219*, m'a rappelé une petite obſervation que j'avois écrite en 1776, ſur l'ombre d'un treillis, & dont j'avois oublié depuis lors de rendre compte à l'Académie. Lû le 13 Déc. 1784.

Le 23 Octobre, à Perpignan, vers neuf heures du matin, me trouvant aſſis, par un beau ſoleil, dans un petit cabinet vis-à-vis un mur blanc, je remarquai que le treillis de fer d'une fenêtre à laquelle je tournois le dos, étoit légèrement projeté par le ſoleil ſur ce mur; mais avec la ſingularité, que les raies claires de ce tableau *(figure 2)*, me parurent être la projection des fils de fer du treillis *(fig. 1)*, & que les loſanges moins claires *(figure 2)*, me ſembloient être la projection de l'ouverture des mailles.

Les figures ci-jointes ſont de grandeur naturelle; elles furent crayonnées, tant ſur le grillage même, que ſur ſon ombre qui ſe projetoit à 68 pouces du treillis *.

J'avois penſé quelquefois à ce tableau, lorſque le 13 Novembre, revoyant la même image au même lieu, je la reçus ſur un carton très-blanc, appliqué contre le mur; puis en rapprochant ce carton de la fenêtre le long d'une règle, j'obſervai qu'à meſure de ſa marche vers le treillis,

* Le fil avoit $\frac{7}{12}$ ligne de diamètre; chaque nœud étoit de $1\frac{1}{4}$ ligne de hauteur, & $1\frac{1}{4}$ ligne de largeur.

Digitized by Google

l'intenſité des taches obſcures ſe renforçoit dans leur milieu; les raies claires qui les ſéparoient, augmentoient fort de largeur. Je fis aller & venir lentement mon carton ; ce mouvement me démontra le contraire du premier jugement que j'avois porté ſur ce tableau: je reconnus parfaitement que ces raies claires & continues étoient la projection du vide des mailles, & que les loſanges obſcures ou moins claires, étoient celles des nœuds du treillis.

La preuve en fut complète, lorſqu'à meſure du cheminement du carton plus près de la fenêtre, je vis toutes les loſanges, qui ſe rétréciſſoient, prendre enfin la vraie forme des nœuds du treillis, tandis que les raies claires, qui s'élargiſſoient, laiſſoient inſenſiblement paroître l'ombre des fils de fer, & acquéroient la vraie forme des mailles.

On trouve tous ces faits très-bien expliqués par M. de Maraldi, dans les Mémoires de l'Académie, *année 1723, page 111.*

Le 11 Décembre ſuivant, je conſidérois encore ce tableau ſur le mur, lorſqu'un nuage léger vint à paſſer devant le Soleil; dans ce moment, la projection ſur le mur fut entièrement ſemblable au treillis, toutes ſes mailles, ſes fils de fer & ſes nœuds parfaitement deſſinés & tranchés. Dès que le nuage fut totalement paſſé, la première image reparut: j'avois vu ſur le mur, à la fin du paſſage de ce nuage, les ombres des nœuds croître par degrés fort ſenſibles, juſqu'à ce que le Soleil eût repris tout ſon éclat, préciſément comme ſur mon carton ci-deſſus, lorſque je l'avois éloigné du treillis.

Ce dernier fait eſt celui qui mérite quelqu'attention; il paroît contraire à la doctrine des ombres & pénombres, ou de la diffraction, & ne pouvoir être expliqué que par celle des réfractions. Il ſemble néceſſaire de prêter à ce nuage la même propriété qu'à nos verres convexes, de

Digitized by Google

Fig. 1.

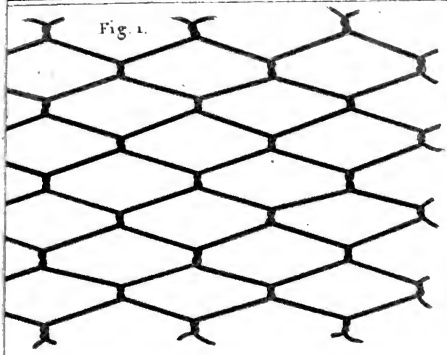
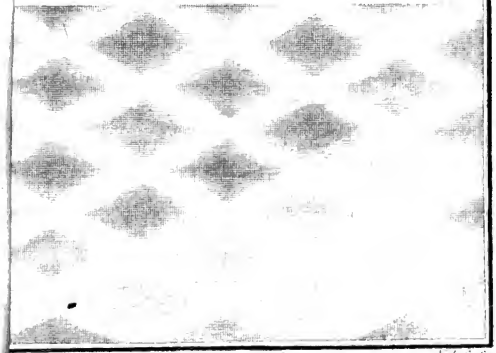


Fig. 2.



Digitized by Google

Digitized by Google

tranſmettre contre le treillis l'image du diſque du Soleil, beaucoup plus petite qu'elle ne l'eſt naturellement, puiſque les fils de fer portèrent leur ombre pleine & terminée, juſqu'à environ quatorze cents fois leur diamètre, au lieu de ne la porter qu'à quarante-deux fois ce diamètre. En l'expliquant ainſi, il ſeroit propre à confirmer les ſoupçons déjà fondés ſur d'autres faits, que les nuages tranſmettent quelquefois à la terre des coups de Soleil beaucoup plus chauds que ceux qui nous en viennent par la ſimple traverſée de l'atmoſphère.

Digitized by Google

MÉMOIRE

CONTENANT

LES OBSERVATIONS ET LA THÉORIE DE LA PREMIÈRE COMÈTE DE 1784.

Par. M. MÉCHAIN.

CETTE Comète fut aperçue à Paris, le 24 Janvier, au ſoir, par M. le Comte de Caſſini; il eut la complaiſance de m'en donner avis ſur le champ, & nous en fîmes de concert la première obſervation. La Comète, quoique près de l'horizon, paroiſſoit à la vue ſimple avec une queue de 2 à 3 degrés; le noyau étoit aſſez bien terminé & très-lumineux, ſon diamètre apparent étoit de 33″. L'obſervation que je vais rapporter, & les ſuivantes, ont été faites avec une lunette achromatique, de trois pieds & demi de foyer, garnie d'un bon micromètre à fils. A $7^h\ 35'\ 53''$, temps moyen, la Comète précédoit l'étoile π de la Baleine, au cercle horaire, de $44^d\ 57'\ 34''$, & elle étoit plus auſtrale de 20′ 10″, réduction faite du parallèle apparent au vrai; d'où j'ai conclu l'aſcenſion droite de $353^d\ 30'\ 25''$, la déclinaiſon auſtrale $14^d\ 26'\ 40''$. En comparant de même le paſſage de la Comète avec ceux des étoiles, *n.os 18 & 47* de la Baleine, du catalogue de Flamſtéed, j'ai trouvé les mêmes réſultats à peu de ſecondes près, corrigeant d'ailleurs la poſition de ces étoiles, relativement à celle de π que j'ai tirée du catalogue de Bradley. On ne put cette première fois avoir aucune idée de la vîteſſe & de la direction du mouvement de la Comète, parce que le long intervalle de temps qui s'écoula entre ſon paſſage & celui de quelqu'étoile bien connue, ne permit point d'en faire une ſeconde obſervation.

Digitized by Google

Depuis le 24 Janvier juſqu'au 3 Février, le ciel fut preſque toujours couvert; la Lune augmentoit de jour en jour, j'épiois les inſtans où les nuages s'entr'ouvroient, pour rechercher la Comète; mais c'étoit toujours ſans ſuccès. Enfin, le 3 Février, le ciel étant aſſez pur, je la retrouvai au-deſſous du ventre du Poiſſon auſtral: la grande clarté de la Lune empêchoit de la diſtinguer à la vue ſimple, & elle en éteignoit totalement la queue. Par un milieu entre pluſieurs obſervations, je trouvai qu'à $7^h\ 38'\ 47''$, temps moyen, la Comète étoit à l'orient de λ des Poiſſons de $1^d\ 46'\ 40''$, & plus boréale de $3'\ 37''$; ce qui donne l'aſcenſion droite de $354^d\ 32'\ 12''$, la déclinaiſon boréale $0^d\ 39'\ 12''$.

Le 4 Février, à $6^h\ 33'\ 48''$, temps moyen, la Comète étoit à l'orient de la dix-neuvième des Poiſſons, de $41'\ 48''$, & moins boréale de $37'\ 2''$; ce qui donne $354^d\ 32'\ 18''$, pour l'aſcenſion droite, & $1^d\ 40'\ 16''$ pour la déclinaiſon boréale. A $6^h\ 56'\ 55''$, la Comète précédoit α du lien des Poiſſons, de $33^d\ 11'\ 11''$, & elle étoit moins boréale de $1'\ 16''\frac{1}{2}$; donc aſcenſion droite $354^d\ 32'\ 12''$, déclinaiſon boréale $1^d\ 41'\ 32''$.

Le 10, j'ai trouvé la Comète très-près d'une étoile de ſept à huitième grandeur, & d'une autre de huit à neuvième. La Lune n'étant pas alors ſur l'horizon, je diſtinguois bien la Comète, à la vue ſimple; j'ai eſtimé la longueur de ſa queue vue par la lunette de nuit, de deux degrés; le noyau étoit très-brillant, mais entouré d'une légère nébuloſité. A $6^h\ 41'\ 33''$, temps moyen, différence d'aſcenſion avec l'étoile 2 *c* des Poiſſons — $3^d\ 28'\ 4''$, & en déclinaiſon — $15'\ 49''$; d'où j'ai conclu l'aſcenſion droite de la Comète $354^d\ 24'\ 3''$, ſa déclinaiſon, $7^d\ 1'\ 22''$.

Le 13, ſur les 7 heures $\frac{1}{4}$ du ſoir, on a commencé à voir quelques étoiles au zénit, enſuite les nuages ſe ſont diſſipés aſſez promptement. J'ai aperçu la Comète entre la ſoixante-dix-ſeptième & la quatre-vingt-deuxième

Digitized by Google

de Pégase; on la voyoit difficilement sans lunette, parce qu'elle étoit près de l'horizon; sa queue avoit encore plus d'un degré, son noyau étoit brillant & entouré de nébulosité. A $7^h\,55'\,7''$, elle étoit à l'orient de la soixante-dix-septième de Pégase, de $1^d\,9'\,56''\frac{1}{2}$, & $3'\,30''$ plus boréale; j'en ai déduit l'ascension droite de $354^d\,15'\,55''$, la déclinaison $9^d\,11'\,27''$. A $7^h\,59'\,51''$, temps moyen, elle précédoit la quatre-vingt-deuxième étoile de Pégase, de $1^d\,8'$, & elle étoit moins boréale de $33'\,29''$; ces différences sont corrigées de l'effet de la réfraction: l'ascension droite de la Comète étoit donc à ce dernier instant de $354^d\,15'\,46''$, sa déclinaison de $9^d\,11'\,13''$; mais je préfère la première détermination.

Le 14, à $6^h\,44'\,29''$, temps moyen, la Comète précédoit la quatre-vingt-deuxième de Pégase, de $1^d\,11'\,0''\frac{1}{2}$; elle étoit plus boréale de $4'\,37''$, ce qui donne l'ascension droite de $354^d\,12'\,45''$, la déclinaison $9^d\,49'\,19''$.

Le 23, à $7^h\,25'\,14''$, temps moyen, différence d'ascension droite entre la Comète & la soixante-seizième de Pégase $+\,49'\,29''$, & de déclinaison $-\,22'\,53''$; j'en ai conclu l'ascension droite de la Comète de $353^d\,45'\,58''$, sa déclinaison $14^d\,45'\,25''\frac{1}{2}$.

Le 1.er Mars, à $6^h\,52'\,7''$, la Comète étoit plus occidentale que φ de Pégase, de $1^d\,54'\,4''$, & moins boréale de $9'\,41''$; ce qui m'a donné l'ascension droite de $353^d\,28'\,29''$, la déclinaison $17^d\,45'\,35''$.

M. Messier vit encore la Comète le 11 Mars, & il a bien voulu me communiquer son observation qui donne pour $7^h\,23'\,19''$, temps moyen, la différence en ascension droite avec γ de Pégase de $+\,2^d\,26'\,30''$, celle en déclinaison $+\,6'\,17''$. D'après l'observation que j'ai faite de cette étoile au méridien, j'ai conclu pour l'époque de l'observation de M. Messier, l'ascension droite de la Comète de $353^d\,6'\,30''$, sa déclinaison $21^d\,25'\,13''$ boréale.

C'est au 11 Mars, que se terminent les premières observations

obſervations de cette Comète; elle étoit alors trop près de l'horizon, & trop éloignée du Soleil ainſi que de la Terre, pour qu'on pût eſpérer de la ſuivre plus long-temps. J'avois déjà préſenté à l'Académie, un eſſai ſur les élémens de l'orbite de cette Comète, qui étoit fondé ſur mes obſervations des 24 Janvier, 3 & 14 Février; ce ſont ces élémens que M. Pingré a bien voulu inférer, *page 512, du ſecond volume de ſa Cométographie.* D'après ces élémens, j'ai tracé la figure de l'orbite de la Comète, & j'ai remarqué, que vers le commencement de Mai, elle ne ſeroit pas beaucoup plus éloignée de la Terre, qu'elle ne l'avoit été le 11 Mars, & que ſon élongation du Soleil ſeroit aſſez grande; cela me fit concevoir l'eſpérance de la revoir en Mai, lorſque la Lune ne ſeroit pas ſur l'horizon, & que le ciel ſeroit bien pur.

Ayant donc calculé la poſition de la Comète, pour le 9 Mai au ſoir, je pointai ma lunette, avant le lever de la Lune, à l'endroit où le calcul m'avoit indiqué que la Comète devoit ſe trouver, & j'eus la ſatisfaction de la voir dans le champ de la lunette, ſans que cela m'eût coûté plus de recherches. La Comète étoit extrêmement foible, on n'y diſtinguoit preſque plus de noyau, ce n'étoit qu'une nébuloſité diffuſe, de 3 minutes environ de diamètre; elle diſparoiſſoit preſque entièrement dès que j'éclairois un peu les fils du micromètre; mais comme elle n'étoit élevée ſur l'horizon que d'environ 17 degrés, j'ai préſumé qu'elle auroit été beaucoup plus ſenſible à une plus grande hauteur: la Lune qui s'eſt levée à minuit 49 minutes, ne m'a pas permis de l'obſerver plus tard. Voici la nouvelle ſuite de mes obſervations; M. Meſſier reprit auſſi les ſiennes, après que je l'eus informé que la Comète paroiſſoit encore.

Le 9 Mai, à $12^h\ 27'\ 20''$, la Comète précédoit une étoile de ſixième grandeur, de $38'\ 24''$; elle étoit moins boréale de $20'\ 10''$: au même inſtant elle précédoit une autre étoile de ſeptième grandeur, de $1^d\ 4'\ 33''$, &

elle étoit plus nord de 20′ 59″. Les positions de ces étoiles ne se trouvent dans aucun Catalogue; je les ai déterminées dans la suite, en les comparant avec γ du Cygne; & par un milieu entre les deux observations, j'ai trouvé pour le 9 Mai, à $12^h\ 27'\ 20''$, l'ascension droite de la Comète, de $347^d\ 54'\ 20''$; sa déclinaison boréale, $39^d\ 34'\ 43''$: cette position est un peu incertaine.

Le 12, j'ai déterminé par un milieu entre six observations, qu'à $13^h\ 23'$, temps moyen, la Comète étoit à l'orient de la neuvième étoile d'Andromède, de 8′ 54″, & moins boréale de 3′ 35″; donc ascension droite $357^d\ 11'\ 45''$, déclinaison $40^d\ 32'\ 8''$.

Le 14, à $12^h\ 14'$, temps moyen, différence en ascension droite avec la dixième étoile d'Andromède — 44′ 7″, en déclinaison + 14′ 31″, par neuf observations; donc ascension droite de la Comète, $346^d\ 40'\ 18''$, déclinaison $41^d\ 8'\ 20''$.

Le 17, à $12^h\ 15'\ 11''$, temps moyen, la Comète précédoit la treizième étoile d'Andromède, de $3^d\ 22'\ 18''$, & elle étoit plus boréale de 20′ 30″; donc ascension droite $345^d\ 49'\ 7''$, déclinaison $42^d\ 3'\ 51''$. Au même instant, la Comète étoit à l'occident de l'étoile ι d'Andromède, de $6^d\ 4'\ 30''$, & moins boréale de 19″; ainsi, selon cette seconde observation, son ascension droite étoit de $345^d\ 49'\ 35''$, sa déclinaison $42^d\ 4'\ 3''$.

Le 21, à $11^h\ 14'\ 46''$, temps moyen, la Comète étoit à l'occident d'une étoile indéterminée & de sixième grandeur, de $7^d\ 13'\ 41''$; elle étoit plus boréale de 2′ 12″: ayant ensuite observé cette étoile au méridien, je conclus l'ascension droite de la Comète de $344^d\ 31'\ 52''$, sa déclinaison de $43^d\ 16'\ 4''$. Au même instant elle précédoit κ d'Andromède, de $7^d\ 55'\ 48''$, & elle étoit plus boréale de 8′ 0″; d'où j'ai déduit son ascension droite de $344^d\ 31'\ 52''$, & sa déclinaison de $43^d\ 16'\ 9''$.

Le 25 Mai, à $13^h\ 22'$, temps moyen, la Comète étoit plus orientale qu'une étoile indéterminée & de septième

Digitized by Google

grandeur, de 18′ 18″, & plus boréale de 16′ 16″; après avoir déterminé la position de cette étoile, j'en ai conclu l'ascension droite de la Comète de 343d 0′ 39″, sa déclinaison *boréale de 44d 29′ 0″. Cette observation n'est peut-être pas aussi exacte que les précédentes, parce que la Comète étoit extrêmement foible & très-élevée: la grande distance où elle étoit alors du Soleil & de la Terre, ainsi que la lumière de la Lune, me la dérobèrent tout-à-fait, & je ne la revis plus.

Voici les nouveaux élémens de l'orbite de cette Comète, que j'ai rectifiés sur la totalité de mes observations.

Longitude du nœud ascendant.....	1s 26d 49′ 21″
Inclinaison de l'orbite.....	51. 9. 12.
Lieu du périhélie sur l'orbite.....	2. 20. 44. 24.
Distance périhélie 0,707858, dont le logarithme = 9,849946.	
Temps moyen du passage au périhélie, 21 Janvier à 4h 56′ 47″.	
Sens du mouvement réel.....	rétrograde.

C'est la soixante-neuvième dont on ait calculé l'orbite,

Depuis le 24 Janvier jusqu'au 25 Mai, elle a parcouru sur son orbite un arc de 104d 38′ 31″, du même côté du périhélie; mais l'accord des observations avec le calcul dans la parabole, doit faire présumer que l'ellipse que parcourt cette Comète, est extrêmement alongée, & que sa période est fort longue.

La première des deux Tables suivantes contient les longitudes & les latitudes géocentriques de la Comète, calculées d'après les observations que je viens de détailler; les différences entre les positions observées & celles calculées d'après les élémens ci-dessus; & les distances de la Comète au Soleil & à la Terre, à l'instant de chaque observation. La deuxième Table renferme les ascensions droites & les déclinaisons des étoiles affectées de l'aberration & de la nutation, telles que je les ai employées pour réduire celles de la Comète.

Digitized by Google

TABLE I. *Des Longitudes & Latitudes géocentriques de la première Comète de 1784, comparées au calcul fait sur les élémens de l'orbite.*

MOI & JOURS.	TEMPS MOYEN.	LONGIT. OBSERVÉE.	LATITUDE OBSERVÉE.	Les élémens donnent en longit.	Les élémens donnent en latit.	Dist. de la Com. au ☉	Dist. de la Com. à la Terre.
	H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.	M. S.	celle Sol. = 1,000	
Janvier 24	7. 35. 53	348. 16. 10	10. 40. 20A.	— 0. 2	+ 0. 1	0,711	0,857.
Février 3	7. 38. 47	355. 14. 45	2. 46. 22B.	— 0. 5	+ 0. 26	0,756	1,149.
4	6. 56. 55	355. 39. 33	3. 43. 34B.	— 0. 2	+ 0. 7	0,763	1,178.
10	6. 41. 33	357. 40. 24	8. 40. 6	— 0. 32	— 0. 1	0,816	1,352.
13	7. 55. 7	358. 25. 57	10. 42. 41	+ 0. 42	+ 0. 24	0,847	1,433.
14	6. 44. 29	358. 38. 36	11. 18. 3	+ 0. 26	+ 0. 6	0,857	1,463.
23	7. 25. 14	0. 19. 6	15. 59. 28	— 0. 4	— 0. 25	0,965	1,691.
Mars 1	6. 52. 7	1. 21. 5	18. 50. 14	— 0. 19	+ 0. 17	1,058	1,843.
11	7. 23. 19	2. 39. 46	22. 18. 6	+ 0. 9	— 0. 25	1,197	2,028.
Mai 9	12. 27. 20	7. 58. 39	40. 26. 49	+ 2. 2	+ 0. 41	2,040	2,435.
12	13. 23. 0	8. 0. 50	41. 32. 49	+ 0. 11	+ 0. 22	2,082	2,434.
14	12. 14. 0	7. 58. 55	42. 16. 6	+ 0. 36	+ 0. 12	2,109	2,433.
17	12. 15. 11	7. 55. 3	43. 23. 27	— 0. 35	— 0. 15	2,149	2,430.
17	12. 15. 11	7. 54. 30	43. 23. 30	— 0. 2	— 0. 18	2,149	2,430.
21	11. 14. 46	7. 41. 43	44. 54. 53	+ 0. 28	+ 0. 29	2,203	2,426.
25	13. 22. 0	7. 20. 9	46. 31. 56	+ 0. 58	+ 1. 4	2,258	2,421.

Digitized by Google

TABLE II. *Des Aſcenſions & Déclinaiſons apparentes des Étoiles, auxquelles la Comète a été comparée.*

ASCENSION DROITE apparente.	DÉCLINAISON APPARENTE.	CARACTÈRE DES ÉTOILES, Et autorités ſur leſquelles leurs poſitions ſont établies.
D. M. S.	D. M. S.	
238. 27. 59	14. 47. 1 *A*	π de la Baleine, catalogue de Bradley.
352. 45. 32	0. 35. 35 *B*	λ des Poiſſons, catal. de Bradley.
353. 50. 30	2. 17. 18 *B*	19.e des Poiſſons, catal. de Bradley.
27. 43. 23	1. 42. 48	α du lien des Poiſſ., catal. de Bradley.
357. 52. 7	7. 17. 11	2. *c.* des Poiſſons, catal. de Mayer.
353. 5. 58	9. 7. 57	77.e de Pégaſe, déterm. par M. d'Agelet.
355. 23. 45	9. 44. 42	82.e de Pégaſe, déterminée par moi.
352. 56. 29	15. 8. 18½	76.e de Pégaſe, déterm. par M. d'Agelet.
355. 22. 33	17. 55. 16½	φ de Pégaſe, déterm. par M. d'Agelet.
350. 40. 0	21. 18. 56	γ de Pégaſe, déterminée par moi.
348. 32. 28	39. 55. 6	Étoile de 6.e grand. } déterm. par moi.
348. 59. 10	31. 13. 31	Étoile de 7.e grand. }
347.* 2. 50½	40. 35. 43½	9.e d'Andr. déterm. par M. d'Agelet.
347. 24. 24½	40. 53. 48	10.e d'Andr., déterm. par M. d'Agelet.
349. 11. 25	41. 43. 21	13.e d'Andr., déterm. par M. d'Agelet.
351. 54. 5	42. 4. 22	ι d'Andromède } déterm. par moi.
351. 45. 33	43. 13. 52	Étoile de 6.e grand. }
352. 27. 40	43. 8. 9	κ d'Andromède }
342. 42. 21	44. 12. 44	Étoile de 7.e grand. }

Cette Comète fut encore obſervée à Paris, par M.rs Caſſini & Meſſier; & à Toulouſe, par M. Darquier: on auroit pu la voir à Paris, dès le 18 Janvier, mais le mauvais temps ne le permit point.

Elle avoit été vue à l'île de Bourbon, dès le 15 Décembre 1783; M. de la Nux en fit, dans cette Iſle,

Digitized by Google

pluſieurs obſervations, dont la première eſt du 3 Janvier 1784; il en a déterminé les poſitions, en meſurant, avec un octant, ſa diſtance à pluſieurs étoiles fixes. M. Pingré qui a comparé ces obſervations à la théorie que j'ai rapportée ci-deſſus, a trouvé qu'elles s'y accordent auſſi bien qu'on peut l'attendre du moyen que M. de la Nux a employé pour fixer les lieux de la Comète: ces obſervations ſeront imprimées dans le recueil des Mémoires préſentés à l'Académie par les Savans étrangers.

On vit auſſi cette Comète, le 10 Janvier, au cap de bonne-Eſpérance; M. Tondu, étant en rade de la Guadeloupe, l'aperçut le 16 du même mois; M. le Chevalier d'Angos en fit pluſieurs obſervations à Malte, à commencer du 20 Janvier; enfin, elle fut encore obſervée par M. l'abbé de Beauchamp, à Bagdad, les 19 & 22 Janvier, enſuite à Baſſora, les 10, 20 & 25 Février.

Digitized by Google

OBSERVATION
DE L'ÉCLIPSE DE LUNE,
DU 6 MARS 1784,
Faite à l'Observatoire royal.

Par M. MÉCHAIN.

J'AI fait cette Observation de concert avec M. le Comte de Caſſini, qui donnera les détails de la ſienne. Je me ſuis ſervi d'une lunette achromatique de trois pieds & demi de foyer; les diſtances des cornes ont été priſes avec un micromètre, à fil curſeur, appliqué à cette lunette, & je n'ai employé qu'un groſſiſſement de vingt-ſept fois. M. de Caſſini meſuroit de ſon côté les parties éclairées du diſque de la Lune.

Temps vrai.	
14^h 10′ 0″	Pénombre ſenſible; la Lune étoit dans de très-légers nuages, & elle étoit entourée d'un halo coloré.
14. 24. 30	Commencement de l'éclipſe; le bord de l'ombre étoit très-diffus.
14. 30. 37	Le bord de l'ombre, qui eſt toujours mal terminé, touche le bord de la longue tache blanche, dans laquelle ſe trouve *Heraclides*.
14. 35. 10	*Heraclides* entre dans l'ombre.
14. 39. 47	*Ariſtarchus* entre.
14. 43. 10	Diſtance des cornes, 18′ 51″.
14. 43. 40	*Ariſtarchus* tout dans l'ombre, dont le bord devient un peu mieux terminé.
14. 45. 50	*Plato* entre.
14. 47. 20	*Idem*, tout dans l'ombre.
14. 48. 10	Diſtance des cornes, 20′ 28″.
14. 51. 30	Diſtance des cornes, 22′ 5″.
14. 56. 30	*Ariſtoteles* entre.
14. 58. 10	*Idem*, à moitié.

Digitized by Google

Temps vrai.	
14h 58′ 10″	Distance des cornes, 23′42″.
14. 59. 50	*Eudoxus* entre.
15. 0. 40	Un petit point lumineux, qui précède *Copernicus*, entre.
15. 2. 30	*Gallileus* entre dans l'ombre, qui le rase très-long-temps sans le couvrir entièrement.
15. 5. 30	L'ombre au bord de *Mare-Serenitatis*.
15. 6. 50	Distance des cornes, 25′ 18″.
15. 16. 30	Distance des cornes, 26′ 28″.
15. 19. 40	Distance des cornes, 26′ 55″.
15. 23. 0	L'ombre touche le bord de *Copernicus*, où elle est parvenue très-lentement.
15. 29. 10	Distance des cornes, 27′20″; cette distance n'augmenta plus, du moins sensiblement.
15. 33. 40	L'ombre touche *Menelaüs* & *Manilius*; la distance des cornes, comme la précédente.

Les nuages qui s'élevoient du sud ont couvert la Lune, qui n'a plus reparu que de temps en temps à travers des nuages blancs, mais trop denses pour qu'on pût observer aucune émersion, ni distance des cornes.

A 16h 46′ je revis la Lune dans un éclaircí; elle étoit parfaitement nette, & l'éclipse me parut totalement finie.

M. de Cassini avoit observé la plus grande phase de 12′ 28″, à 15h 32′, temps vrai.

Observation de la Lune au Méridien, avant le commencement de l'éclipse.

NOUS avons observé, avec M. de Cassini, le passage des deux bords de la Lune au méridien.

A 12h 3′ 38″,7 temps moyen, l'étoile *d* du Lion avoit précédé le centre de la Lune de 15′ 28″,9 de temps moyen, ou de 3d 52′ 52″,7, & la différence des hauteurs méridiennes du bord de la Lune & de l'étoile, corrigée de celle des réfractions, étoit de 9′ 35″,3. L'étoile ♌ de la

la Vierge, ſuivit le centre de la Lune au méridien de $1^h\,39'\,32'',4$, de temps moyen, ou de $24^d\,57'\,11'',5$; la différence des hauteurs méridiennes, corrigée de celle des réfractions, fut obſervée de $21'\,32'',9$, entre le bord ſupérieur de la Lune & l'étoile.

Selon le catalogue de Bradley, on a, pour le 6 Mars 1784, les poſitions de ces deux étoiles affectées de l'aberration de la nutation, comme il ſuit.

α du Lion.		δ de la Vierge.	
Aſcenſion droite.	*Déclinaiſon.*	*Aſcenſion droite.*	*Déclinaiſon.*
$162^d\,21'\,42'',7$	$4^d\,46'\,14'',8\,B.$	$191^d\,11'\,55'',5$	$4^d\,34'\,17'',5.$

En appliquant à ces poſitions les différences rapportées ci-deſſus, la parallaxe de la Lune en hauteur calculée dans le ſphéroïde de $37'\,55'',7$, & le demi-diamètre horizontal de $15'\,0'',1$, j'ai trouvé, pour $12^h\,3'\,38'',7$, l'aſcenſion droite du centre de la Lune de $166^d\,14'\,39'',7$, ſa déclinaiſon boréale de $5^d\,18'\,45'',8$; donc longitude $165^d\,16'\,56''$, latitude $0^d\,32'\,10'',7$ *A*, en ſuppoſant l'obliquité apparente de l'écliptique de $23^d\,28'\,10''$. Les Tables de la Lune, de Mayer, qui ſont inférées dans l'Aſtronomie de M. de la Lande, donnent, pour le même inſtant, la longitude de $36''$ plus avancée, & la latitude de $23''\,\frac{1}{2}$ plus auſtrale.

RECHERCHES
SUR LA FIGURE DES PLANÈTES.

Par M. LE GENDRE.

Lû le 7 Juillet 1784.

DEPUIS que Maclaurin a démontré ſynthétiquement & d'une manière très-élégante, que le ſphéroïde elliptique ſatisfait rigoureuſement à l'équilibre des Planètes dans les hypothèſes reçues, pluſieurs grands Géomètres * ſe ſont propoſé de déterminer directement toutes les figures d'équilibre poſſibles. Ils ont trouvé que l'ellipſoïde aplati ſatisfaiſoit de deux manières différentes, & ils ſont parvenus à exclure un grand nombre d'autres figures, comme ne pouvant remplir les conditions de l'équilibre; mais perſonne, que je ſache, n'a encore démontré que l'ellipſoïde aplati eſt abſolument le ſeul qui ſatisfaſſe à la queſtion. C'eſt cette propoſition qui fait le ſujet de ce Mémoire.

Je ſuppoſe, comme on paroît l'avoir fait juſqu'à préſent, que la figure cherchée eſt celle d'un ſolide de révolution peu différent d'une ſphère, & partagé en deux parties égales & ſemblables par ſon équateur. L'attraction de ce ſphéroïde s'évalue facilement à l'aide des formules que j'ai données pour cet objet, (*Mémoires des Savans étrangers, tome X*); & j'en tire l'équation du méridien

* M. d'Alembert, *tomes V & VII de ſes Opuſcules.* M. de la Place, *Mém. de l'Acad. ann. 1772.*

La propoſition qui fait l'objet de ce Mémoire, étant démontrée d'une manière beaucoup plus ſavante & plus générale dans un Mémoire que M. de la Place a déjà publié dans le volume de 1782, je dois faire obſerver que la date de mon Mémoire eſt antérieure, & que la propoſition qui paroît ici, telle qu'elle a été lûe en juin & juillet 1784, a donné lieu à M. de la Place, d'approfondir cette matière, & d'en préſenter aux Géomètres, une théorie complète.

Digitized by Google

exprimée par une ſuite infinie, équation d'une forme très-différente de celle qu'a trouvée M. de la Place, pour le cas où le ſphéroïde ne diffère qu'infiniment peu de la ſphère. Je fais voir enſuite que la ſérie renfermée dans cette équation, eſt toujours convergente; que l'ellipſe y eſt compriſe ſuivant le théorème de Maclaurin, & qu'aucune autre courbe n'y peut ſatisfaire.

Pour démontrer ces diverſes propoſitions, j'ai recours aux propriétés d'une eſpèce particulière de fonctions rationnelles qui ne ſe ſont point encore préſentées aux Analyſtes, & qui paroiſſent mériter leur attention; mais pour ne pas faire diverſion à mon ſujet principal, j'expoſe de ſuite ce qui a rapport à ces fonctions.

Théorèmes ſur une eſpèce particulière de fonctions rationnelles.

1. Les fonctions rationnelles dont il s'agit, ſont formées ſuivant cette loi, qu'il eſt facile de ſaiſir:

$$X^{r} = \tfrac{3}{2}x^{2} - \tfrac{1}{2},$$

$$X^{II} = \tfrac{5\cdot 7}{2\cdot 4}\cdot x^{4} - \tfrac{3\cdot 5}{2\cdot 4}\cdot 2x^{2} + \tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4},$$

$$X^{III} = \tfrac{7\cdot 9\cdot 11}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot x^{6} - \tfrac{5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot 3x^{4} + \tfrac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot 3x^{2} - \tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6},$$

$$X^{IV} = \tfrac{9\cdot 11\cdot 13\cdot 15}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot x^{8} - \tfrac{7\cdot 9\cdot 11\cdot 13}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot 4x^{6} + \tfrac{5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot 6x^{4} - \tfrac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot 4x^{2} + \tfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8},$$

&c.

Ces fonctions X^{I}, X^{II}, X^{III}, &c. viennent du développement de la quantité $(1 - 2xz + z^{2})^{-\frac{1}{2}}$, & on a exactement

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - 2xz + z^{2})}} + \frac{1}{\sqrt{(1 + 2xz + z^{2})}} = 1 + X^{I}z^{2} + X^{II}z^{4} + X^{III}z^{6} + \&c\ldots(A^{I}).$$

Digitized by Google

THÉORÈME I.

2. *Si on fait* $x = 1$, *les fonctions* X', X'', X''', &c. *se réduisent toutes à l'unité.*

Car en faisant $x = 1$, le premier membre de l'équation (A') devient $\frac{1}{1-z^2}$ c'est-à-dire, $1 + z^2 + z^4 + z^6 +$ &c.

THÉORÈME II.

3. *Les intégrales suivantes, prises depuis* $x = 0$ *jusqu'à* $x = 1$, *se réduisent toutes à zéro, quelles que soient les constantes* α, β, γ, &c.

$$\int \alpha X' dx = 0,$$
$$\int (\alpha + \beta x^2) X'' dx = 0,$$
$$\int (\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4) X''' dx = 0,$$
&c.

Car entre les limites données, on a, par exemple,

$$\int (\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4) X^{IV} dx = \frac{9.11\alpha + 7.11\beta + 7.9\gamma}{2.4.6} - \frac{3(7.9.\alpha + 5.9\beta + 5.7\gamma)}{2.4.6} + \frac{3(5.7\alpha + 3.7\beta + 3.5\gamma)}{2.4.6} - \frac{(3.5\alpha + 1.5\beta + 1.3\gamma)}{2.4.6}.$$

Or, n variant de l'unité, la différence troisième de la formule $(2n+1)(2n+3)\alpha + (2n-1)(2n+3)\beta + (2n-1)(2n+1)\gamma$ est nulle: donc $\int (\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4) X''' dx = 0$, & il est facile de voir qu'une démonstration semblable auroit lieu dans tous les autres cas.

THÉORÈME III.

4. *Entre les mêmes limites,* $x = 0$, $x = 1$, *on a généralement*

Digitized by Google

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1},$$

$$\int x^n X' dx = \frac{n}{n+1.n+3},$$

$$\int x^n X'' dx = \frac{n.n-2}{n+1.n+3.n+5},$$

$$\int x^n X''' dx = \frac{n.n-2.n-4}{n+1.n+3.n+5.n+7}.$$

&c.

Il suffira encore de démontrer cette proposition dans un cas particulier: or on a

$$\int x^n X''' dx = \frac{7.9.11}{2.4.6} \cdot \frac{1}{n+7} - \frac{5.7.9}{2.4.6} \cdot \frac{3}{n+5} + \frac{3.5.7}{2.4.6} \cdot \frac{3}{n+3} - \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{1}{n+1}.$$

Cette quantité réduite à un dénominateur commun, prendra la forme

$$\frac{\alpha n^3 + \beta n^2 + \gamma n + \delta}{n+1.n+3.n+5.n+7};$$

mais, suivant le théorème précédent, cette intégrale doit s'évanouir dans trois cas, lorsque $n = 0$, lorsque $n = 2$, & lorsque $n = 4$; elle deviendra donc

$$\frac{\alpha n (n-2)(n-4)}{n+1.n+3.n+5.n+7}.$$

Si on fait ensuite n infini, on aura

$$\frac{\alpha}{n} = \frac{7.9.11}{2.4.6} \cdot \frac{1}{n} - \frac{5.7.9}{2.4.6} \cdot \frac{3}{n} + \frac{3.5.7}{2.4.6} \cdot \frac{3}{n} - \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{1}{n};$$

donc par le théorème I, $\alpha = 1$, &

$$\int x^n X''' dx = \frac{n.n-2.n-4}{n+1.n+3.n+5.n+7}.$$

THÉORÈME IV.

5. *Si on intègre toujours entre les limites* $x = 0$ & $x = 1$,

on aura $\int X^{\mu} X^{\nu} dx = 0$ & $\int X^{\mu} X^{\mu} dx = \frac{1}{4\mu+1}$, *les indices* μ & ν *étant différens l'un de l'autre dans la première formule.*

C'eſt une conſéquence immédiate des deux *théorèmes précédens.*

THÉORÈME V.

6. *La fonction* X^{μ} *en général eſt décompoſable en* μ *facteurs de la forme* $x^2 - \alpha^2$, $x^2 - \zeta^2$, $x^2 - \gamma^2$, &c. $\alpha, \zeta, \gamma,$ *étant des racines réelles, inégales, & plus petites que l'unité.*

Prenons, par exemple, la fonction X^{IV}: puiſqu'entre les limites $x = 0$ & $x = 1$, on a $\int X^{IV} dx = 0$ (*Th. II*), il faut que X^{IV} ne ſoit pas toujours de même ſigne depuis $x = 0$ juſqu'à $x = 1$. Donc α étant moindre que l'unité, on peut ſuppoſer $X^{IV} = (x^2 - \alpha^2) P$; mais par le *théorème II*, on a $\int (x^2 - \alpha^2) X^{IV} dx = 0$ ou $\int (x^2 - \alpha^2)^2 P dx = 0$: il faut donc que depuis $x = 0$ juſqu'à $x = 1$, la fonction P n'ait pas toujours le même ſigne. Soit encore ζ plus petit que l'unité, & on pourra faire $P = (x^2 - \zeta^2) Q$ ou $X^{IV} = (x^2 - \alpha^2)(x^2 - \zeta^2) Q$; mais ſuivant le *théorème II*, on a $\int (x^2 - \alpha^2)(x^2 - \zeta^2) X^{IV} dx = 0$, ou $\int (x^2 - \alpha^2)^2 (x^2 - \zeta^2)^2 Q dx = 0$: d'où il ſuit que Q change encore de ſigne depuis $x = 0$ juſqu'à $x = 1$. Je fais de la même manière $Q = (x^2 - \gamma^2) R$, ou $X^{IV} = (x^2 - \alpha^2)(x^2 - \zeta^2)(x^2 - \gamma^2) R$; & comme, en vertu du même *théorème II*, on a $\int (x^2 - \alpha^2)(x^2 - \zeta^2)(x^2 - \gamma^2) X^{IV} dx = 0$, il en réſultera que R doit encore changer de ſigne depuis $x = 0$ juſqu'à $x = 1$, & que X^{IV} eſt enfin de la forme

$A (x^2 - \alpha^2)(x^2 - \zeta^2)(x^2 - \gamma^2)(x^2 - \delta^2)$,

$\alpha, \zeta, \gamma, \delta$ étant plus petites que l'unité; & A étant le coéfficient conſtant $\frac{9.11.13.15}{2.4.6.8}$.

Digitized by Google

Je dis de plus, que ces facteurs seront inégaux entr'eux : car si on avoit, par exemple, $\alpha = \beta$, X^{ν} seroit de la forme

$$A(x^2 - \alpha^2)^{\lambda}(x^2 - \zeta^2)(x^2 - \gamma^2).$$

Or on doit avoir, suivant le *théorème II*,

$$\int (x^2 - \zeta^2)(x^2 - \gamma^2) X^{\nu} dx = 0 :$$

il faudroit donc que

$$\int (x^2 - \alpha^2)^{\lambda}(x^2 - \zeta^2)^{\lambda}(x^2 - \gamma^2)^{\lambda} dx$$

fût zéro, ce qui est impossible.

THÉORÈME VI.

7. *Depuis* $x = 0$ *jusqu'à* $x = 1$ *exclusivement, la quantité* X^{μ} *est toujours plus petite que l'unité.*

Je reprends l'équation (A') *n.° 1*, & je suppose

$$1 - 2xz + z^2 = (1 - \alpha z)(1 - \zeta z);$$

j'aurai

$$\alpha + \zeta = 2x, \text{ \& } \alpha\zeta = 1.$$

Mais x étant régardé ici comme plus petit que l'unité, je puis supposer $x = \cos.\varphi$; il en résultera

$\alpha = \cos.\varphi + \sqrt{-1}\sin.\varphi$, & $\zeta = \cos.\varphi - \sqrt{-1}\sin.\varphi$:

on aura ensuite

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - 2xz + z^2)}} = (1 - \alpha z)^{-\frac{1}{2}}(1 - \zeta z)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left(1 + \tfrac{1}{2}\alpha z + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\alpha^2 z^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\alpha^3 z^3 + \text{\&c.}\right)$$

$$\left(1 + \tfrac{1}{2}\zeta z + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\zeta^2 z^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\zeta^3 z^3 + \text{\&c.}\right).$$

Développant ce produit, & ne conservant que les puissances paires de z, on aura la valeur de

$$\frac{1}{\sqrt{(1-2\alpha\zeta+\zeta^2)}} + \frac{1}{\sqrt{(1+2\alpha\zeta+\zeta^2)}}$$

exprimée par cette ſuite dont la loi eſt très-ſimple:

$$1 + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}(\alpha^2+\mathfrak{C}^2)\zeta^2 + \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}(\alpha^4+\mathfrak{C}^4)\zeta^4 + \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot12}(\alpha^6+\mathfrak{C}^6)\zeta^6 + \&c.$$
$$+ \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\,\alpha\,\mathfrak{C} + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{1}{2}(\alpha^2+\mathfrak{C}^2)\alpha\mathfrak{C} + \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10}\cdot\frac{1}{2}(\alpha^4+\mathfrak{C}^4)\alpha\mathfrak{C}$$
$$+ \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\,\alpha^2\mathfrak{C}^2 + \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{1\cdot3}{2\cdot4}(\alpha^2+\mathfrak{C}^2)\alpha^2\mathfrak{C}^2$$
$$+ \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\,\alpha^4\mathfrak{C}^4.$$

La ſuite

$$1 + X'\zeta^2 + X''\zeta^4 + X'''\zeta^6 + \&c.$$

étant ainſi trouvée, on peut faire

$$\alpha\mathfrak{C} = 1 \;\&\; \alpha^m + \mathfrak{C}^m = 2\cos.\, m\varphi,$$

& on aura

$$X' = \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot 2\cos.\,2\varphi + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2},$$

$$X'' = \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot 2\cos.\,4\varphi + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{1}{2}\,2\cos.\,2\varphi + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{1\cdot3}{2\cdot4},$$

$$X''' = \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot12}\cdot 2\cos.\,6\varphi + \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cos.\,4\varphi$$
$$+ \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\,2\cos.\,2\varphi + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6},$$

&c.

Il eſt clair maintenant que les fonctions X', X'', &c. ſont les plus grandes qu'il eſt poſſible, lorſque $\varphi = 0$, & qu'elles ſont plus petites dans tous les autres cas. Mais lorſque

lorſque $\phi = 0$, on a $x = 1$, & ſuivant le *théorème I*, ces fonctions ſe réduiſent à l'unité : donc elles ſont au-deſſous de l'unité, lorſque x eſt entre 0 & 1.

THÉORÈME VII.

8. *L'intégrale* $\int \frac{X^{\mu}\,dx}{(1+kx^2)^{\frac{2\mu+3}{2}}}$, *priſe entre les limites* $x = 0, x = 1$, *eſt égale à* $\frac{(-k)^{\mu}}{(2\mu+1)\,(1+k)^{\frac{2\mu+1}{2}}}$ *quel que ſoit* k.

Si on fait $z = \frac{p}{\sqrt{(1+kx^2)}}$, l'équation (A') *n.° 1.* donnera

$$\frac{\frac{1}{2}dx}{(1+kx^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\left[1-\frac{2px}{(1+kx^2)}+\frac{p^2}{1+kx^2}\right]}}$$

$$+\frac{\frac{1}{2}dx}{(1+kx^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\left[1+\frac{2px}{\sqrt{(1+kx^2)}}+\frac{p^2}{1+kx^2}\right]}}$$

$$=\frac{dx}{(1+kx^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{X^1\,dx}{(1+kx^2)^{\frac{1}{2}}}\cdot p^2+\frac{X^{11}\,dx}{(1+kx^2)^{\frac{5}{2}}}\cdot p^4+\&c.$$

Pour intégrer le premier membre, je fais $\frac{x}{\sqrt{(1+kx^2)}} = y$, enſuite $1+pky = u$, & la différencielle

$$\frac{\frac{1}{2}dx}{(1+kx^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\left[1-\frac{2px}{\sqrt{(1+kx^2)}}+\frac{p^2}{1+kx^2}\right]}}$$

Digitized by Google

devient

$$\frac{1}{2p\sqrt{k}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(1+k+kp^2-z^2)}},$$

dont l'intégrale eſt

$$-\frac{1}{2p\sqrt{k}} \text{ arc cof. } \frac{z}{\sqrt{(1+k+kp^2)}}.$$

Intégrant de la même manière, l'autre partie du premier membre, on trouvera que l'intégrale totale, priſe depuis $x = 0$ juſqu'à $x = 1$, eſt

$$\frac{1}{2p\sqrt{k}} \text{ arc cof. } \frac{\sqrt{(1+k)}-pk}{\sqrt{(1+k)}.\sqrt{(1+k+kp^2)}} - \frac{1}{2p\sqrt{k}} \text{ . arc cof. } \frac{\sqrt{(1+k)}+pk}{\sqrt{(1+k)}.\sqrt{(1+k+kp^2)}}.$$

Il eſt facile enſuite de voir que cette expreſſion revient à

$$\frac{1}{p\sqrt{k}} \text{ . arc tang. } \frac{p\sqrt{k}}{\sqrt{(1+k)}},$$

qui équivaut à la ſuite

$$\frac{1}{\sqrt{(1+k)}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{kp^2}{(1+k)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{5} \cdot \frac{k^2p^4}{(1+k)^{\frac{5}{2}}} - \text{ &c.}$$

d'où l'on conclud

$$\int \frac{X^{\mu}\,dx}{(1+kx^2)^{\frac{2\mu+3}{2}}} = \frac{(-k)^{\mu}}{(2\mu+1)(1+k)^{\frac{2\mu+1}{2}}}.$$

Équation du Méridien.

9. Je ſuppoſe, comme il a été dit ci-deſſus, que le méridien du ſphéroïde eſt une courbe quelconque, diviſée en quatre parties égales par le diamètre de l'équateur & par l'axe de rotation. J'appelle 1 la denſité du ſphéroïde; M, ſa maſſe ou ſon volume; Mf, la force centrifuge à la diſtance 1 de l'axe; $\frac{dM}{rr}$ l'attraction d'une particule dM à la diſtance r. Un point quelconque, hors du ſphéroïde, étant donné de poſition par ſa diſtance z au centre,

Digitized by Google

& par l'angle φ que fait cette diſtance avec l'axe, j'appelle V, la ſomme des quotiens qu'on aura en diviſant chaque particule du ſphéroïde par ſa diſtance à ce point.

L'attraction du ſphéroïde, ſur ce même point, ſe réduit à deux forces X & Y, parallèles à l'axe & à l'équateur, leſquelles peuvent s'exprimer de la manière ſuivante par les différences partielles de V:

$$X = -\frac{dV}{d\zeta}\ \text{cof.}\,\varphi + \frac{dV}{d\varphi}\cdot\frac{\text{ſin.}\,\varphi}{\zeta},$$

$$Y = -\frac{dV}{d\zeta}\ \text{ſin.}\,\varphi - \frac{dV}{d\varphi}\cdot\frac{\text{cof.}\,\varphi}{\zeta}.$$

Voyez le *tome X des Savans étrangers, page 423.*

On peut ſuppoſer maintenant que le point dont il s'agit, eſt ſitué à la ſurface même du ſphéroïde, & comme la réſultante des forces qui lui ſont appliquées, doit être perpendiculaire au méridien, on aura l'équation

$$\frac{Y = Mf\zeta\ \text{ſin.}\,\varphi}{X} = \frac{-d(\zeta\ \text{cof.}\,\varphi)}{d(\zeta\ \text{ſin.}\,\varphi)};$$

dans laquelle ſubſtituant les valeurs de X & de Y, & intégrant, on trouve l'équation du méridien,

$$V + \tfrac{1}{2}\,Mf\zeta^2\ \text{ſin.}^2\,\varphi = H',$$

H' étant une conſtante arbitraire. Cette équation eſt la même qu'a donnée M. de la Place, dans le volume de l'Académie de 1772, & dans ſa Théorie du mouvement & de la figure des planètes, *page 137.*

10. Si on ſubſtitue maintenant la valeur de V, que j'ai donnée dans le Mémoire cité *(page 422)*, pour les ſphéroïdes de révolution, l'équation du méridien deviendra

$$\left.\begin{aligned} H = {}& \tfrac{1}{2}f\zeta^2\,(1 - x^2) + \frac{1}{\zeta} \\ & + \frac{A}{\zeta^3}\,X^2 + \frac{B}{\zeta^5}\,X^4 + \frac{C}{\zeta^7}\,X^6 + \text{&c.} \end{aligned}\right\} \ldots (B')$$

Digitized by Google

Dans cette équation, j'ai fait cos. $\varphi = x$, & les quantités X', X'', X''' &c. ſont préciſément les fonctions dont il a été parlé ci-deſſus. Quant aux conſtantes H, A, B, C, &c. la première H eſt arbitraire, & doit ſe déterminer par la condition, que lorſque $\varphi = 0$, z ſoit égal au demi-axe du ſphéroïde; les autres dépendent des intégrations ſuivantes, qu'on doit étendre depuis $x = 0$ juſqu'à $x = 1$:

$$M = \frac{4\pi}{3} \int z^3 \, dx,$$

$$MA = \frac{4\pi}{5} \int z^5 X' \, dx,$$

$$MB = \frac{4\pi}{7} \int z^7 X'' \, dx,$$

$$MC = \frac{4\pi}{9} \int z^9 X''' \, dx,$$

&c.

11. L'équation *(B')* doit comprendre toutes les figures d'équilibre poſſibles; mais avant d'en tirer quelque conſéquence, il eſt bon de faire voir que la ſuite qu'elle renferme eſt toujours convergente, quel que ſoit le méridien du ſphéroïde, pourvu qu'il ne diffère pas beaucoup du cercle. Suppoſons donc $z = 1 + kp$, k étant une quantité très-petite, & p une fonction de x, telle que le produit kp ſoit toujours fort petit par rapport à l'unité. Si les deux parties du méridien, ſéparées par l'équateur, ne ſont qu'une ſeule & même courbe, il faudra que p ſoit une fonction paire de x; mais l'équation *(B')* n'eſt point aſſujettie à cette condition, elle n'exige la loi de continuité que depuis $x = 0$ juſqu'à $x = 1$. Il faut ſeulement ſuppoſer qu'à l'équateur où $x = 0$, $\frac{dp}{dx}$ devient nul: en ſorte que ſi p ſe réduit à $\alpha + C x^n$, lorſque x eſt infiniment petit, il faut que n ſoit plus grand que l'unité. De même, lorſque x eſt infiniment près de

Digitized by Google

l'unité, p devenant $\alpha' + \zeta'(1 - xx)^{n'}$, il faut que n' soit encore plus grand que l'unité, pour qu'on ait au pôle $\frac{dz}{d\varphi} = 0$. Avec ces deux conditions, la courbure du sphéroïde sera uniforme dans toute son étendue.

Maintenant, si on substitue la valeur de z dans les formules du *n.° 10*, & qu'on rejette les puissances de k, supérieures à la première, on aura

$$M = \frac{4\pi}{3}\int(1 + 3kp)\,dx,\ MA = \frac{4\pi}{5}\int(1 + 5kp)X'\,dx,\ \&c.$$

donc

$$A = 3k\int pX'\,dx,\ B = 3k\int pX''\,dx,\ C = 3k\int pX'''\,dx,\ \&c.$$

Or, la quantité X^{μ} étant toujours au-dessous de l'unité, & changeant μ fois de signe, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$ *(théorèmes V & VI)*, il est clair que l'aire $\int pX^{\mu}dx$, où p ne passe pas une certaine limite, est composée de parties positives & de parties négatives, qui se détruisent d'autant mieux qu'elles sont plus petites & plus multipliées, surtout lorsque μ est un nombre un peu grand. On doit donc regarder la suite A, B, C, &c. comme convergente, au moins lorsque μ a acquis une certaine grandeur.

12. Pour nous en assurer d'une manière plus précise, considérons le cas où $p = x^n$, alors, suivant le *n.° 4*, on aura

$$\int x^n X^{\mu}dx = \frac{n.n-2.n-4\ldots n-2\mu+2}{n+1.n+3.n+5\ldots n+2\mu+1};$$

si 2μ est considéré comme fort grand par rapport à n, on trouvera facilement par les formules connues,

$$\int x^n X^{\mu}dx = \frac{A'}{\mu^{n+\frac{1}{2}}},$$

A' étant un coefficient constant; or, nous avons dit *(n.° 11)* que n devoit être plus grand que l'unité; donc la suite A, B, C, D, &c. décroîtra, au moins dans les termes

Digitized by Google

éloignés, plus rapidement que la suite

$$\frac{A'}{1}, \quad \frac{A'}{4\sqrt{4}}, \quad \frac{A'}{9\sqrt{3}}, \text{ \&c.}$$

Donc si p étoit de la forme $\alpha + \zeta x^{n} + \gamma x^{m} +$ &c. ce qui comprend déjà un très-grand nombre de fonctions, la suite $\int p X^{\mu} dx$, $\int p X^{\mu+1} dx$, $\int p X^{\mu+2} dx$, &c. seroit plus convergente que la suite $\frac{1}{\mu^{\frac{1}{2}}}, \frac{1}{(\mu+1)^{\frac{1}{2}}}, \frac{1}{(\mu+2)^{\frac{1}{2}}}$, &c. en supposant toujours que μ a passé une certaine limite.

On pourroit, dans plusieurs autres cas encore très-étendus, démontrer la convergence de la suite $A, B, C, D,$ &c; mais nous nous bornerons à ce qui vient d'en être dit, & nous croyons qu'il y a d'autant moins de difficulté à admettre cette proposition, que la fonction p doit être comprise entre certaines limites, & satisfaire à des conditions particulières qui restreignent beaucoup l'étendue de l'aire $\int p X^{\mu} dx$.

La suite $A, B, C, D.$ &c. étant convergente, au moins dans les termes éloignés, on en conclura que la suite AX', BX'', CX''', &c. l'est aussi, puisque les quantités X', X'', X''', &c. ne peuvent jamais surpasser l'unité, & sont presque toujours fort au-dessous. D'où il résulte que l'équation (B') peut être employée comme représentant avec exactitude le méridien d'une planète en équilibre.

L'Ellipse est comprise dans l'équation (B').

13. On ne sauroit douter de cette proposition, d'après la théorie de Maclaurin, mais on sera bien aise de voir nos calculs s'accorder avec cette théorie. Soit donc a le demi-grand axe de l'ellipse, c son excentricité, $\frac{c^2}{a^2 - c^2} = k$; l'équation de l'ellipse sera $\zeta^2 = \frac{a^2}{1 + kx^2}$, & les intégrales M, MA, MB, &c. du *n.° 10*, seront, suivant le *théorème VII*,

$$M = \frac{4\pi a^2}{3}\int \frac{dx}{(1+kx^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{4\pi a^3}{3}\cdot\frac{1}{(1+k)^{\frac{1}{2}}},$$

$$MA = \frac{4\pi a^2}{5}\int \frac{X^1 dx}{(1+kx^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{4\pi a^5}{5}\cdot\frac{-k}{3(1+k)^{\frac{1}{2}}},$$

$$MB = \frac{4\pi a^7}{7}\int \frac{X^{11} dx}{(1+kx^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{4\pi a^7}{7}\cdot\frac{k^2}{5(1+k)^{\frac{1}{2}}},$$

$$MC = \frac{4\pi a^9}{9}\int \frac{X^{111} dx}{(1+kx^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{4\pi a^9}{9}\cdot\frac{-k^3}{7(1+k)^{\frac{1}{2}}},$$

&c.

D'où l'on tire

$$A = -\frac{3}{5}\cdot\frac{ka^3}{3(1+k)} = -\frac{3c^2}{5\cdot 7},\ B = \frac{3c^4}{5\cdot 7},\ C = \frac{-3c^6}{7\cdot 9},\ \&c.$$

& pour le dire en paſſant, ces valeurs confirment ce que nous avons dit *(n.os 11 & 12)* ſur la convergence de la ſuite, A, B, C, &c. a étant regardé ici comme l'unité.

Cela poſé, l'équation *(B')* deviendra

$$\left.\begin{aligned} H = \tfrac{1}{2} f a c^3 \left(1 - x^2\right) + \frac{3a}{c} \\ \left(\frac{1}{3} - \frac{X^1}{3\cdot 5}\cdot\frac{c^2}{c^2} + \frac{X^{11}}{5\cdot 7}\cdot\frac{c^4}{c^4} - \&c.\right) \end{aligned}\right\} \ldots (C')$$

& il faut faire voir qu'on peut rendre cette équation identique, en donnant aux conſtantes H & f les valeurs convenables.

14. Propoſons-nous d'abord de ſommer la ſuite

$$\frac{1}{1\cdot 3} - \frac{X^1}{3\cdot 5}\cdot\frac{c^2}{c^2} + \frac{X^{11}}{5\cdot 7}\cdot\frac{c^4}{c^4} - \frac{X^{111}}{7\cdot 9}\cdot\frac{c^6}{c^6} + \&c.$$

qui entre dans cette équation: ſuivant la formule *(A')*, *n.° 1*, on aura

$$\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{(1-2px\sqrt{-1}-p^2)}} + \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{(1+2px\sqrt{-1}-p^2)}}$$
$$= 1 - X^1 p^2 + X^{11} p^4 - X^{111} p^6 + \&c.$$

Digitized by Google

multipliant chaque membre par dp & intégrant, on aura

$$\tfrac{1}{2}\text{ arc fin. }\frac{p+x\sqrt{-1}}{\sqrt{(1-xx)}}+\tfrac{1}{2}\text{ arc fin. }\frac{p-x\sqrt{-1}}{\sqrt{(1-xx)}}$$
$$=p-\frac{X^{1}p^{3}}{3}+\frac{X^{11}p^{5}}{5}-\text{ \&c.}$$

Soit $u=\text{tang.}\downarrow$ & $p^{2}(1+u^{2})=u^{2}(1+x^{2}u^{2})$, on trouvera que le premier membre se réduit à l'arc réel $\downarrow$, & qu'ainsi on a

$$\downarrow=p-\tfrac{1}{3}X^{1}p^{3}+\tfrac{1}{5}X^{11}p^{5}-\tfrac{1}{7}X^{111}p^{7}+\text{ \&c.}$$

Multipliant chaque membre par $p\,dp$, l'intégrale du premier sera

$$\int\downarrow p\,dp=\tfrac{1}{2}pp\downarrow-\int\frac{p^{2}}{2}\cdot\frac{du}{1+uu}$$
$$=\tfrac{1}{2}p^{2}\downarrow-\int\frac{\frac{1}{2}u^{2}\,du(1+x^{2}u^{2})}{(1+u^{2})^{2}}=(\tfrac{1}{2}p^{2}+\frac{3x^{2}-1}{4})\downarrow$$
$$-\frac{u}{1+u^{2}}(\tfrac{1}{2}x^{2}u^{2}+\frac{3x^{2}-1}{4}).$$

J'apelle F, cette quantité, & j'aurai

$$F=\tfrac{1}{3}p^{3}-\frac{1}{3\cdot5}X^{1}p^{5}+\frac{1}{5\cdot7}X^{11}p^{7}-\frac{1}{7\cdot9}X^{111}p^{9}+\text{ \&c.}$$

Maintenant si l'on fait

$$p=\frac{c}{\zeta}\text{ \& }u^{2}=\frac{c^{2}}{a^{2}-c^{2}};$$

on verra facilement que l'équation

$$p^{2}(1+u^{2})=u^{2}(1+x^{2}u^{2}),$$

est la même que l'équation de l'ellipse

$$\frac{a^{2}}{\zeta^{2}}=1+\frac{c^{2}x^{2}}{a^{2}-c^{2}};$$

d'où il résulte qu'en faisant

$$\frac{c}{\sqrt{(a^{2}-c^{2})}}=\text{tang.}\downarrow=z,\text{ ou }\frac{c}{a}=\text{fin.}\downarrow;$$

la

la ſomme de la ſuite

$$\frac{1}{1\cdot 3} - \frac{x^2}{3\cdot 5}\cdot\frac{c^2}{c^2} + \frac{x^4}{5\cdot 7}\cdot\frac{c^4}{c^4} - \text{&c.}$$

ſera $\frac{F c^3}{c^3}$, F étant

$$\left(\tfrac{1}{2}p^2 + \frac{3x^2-1}{4}\right)\downarrow - \frac{\pi}{1+u^2}\left(\tfrac{1}{2}x^2u^2 + \frac{3x^2-1}{4}\right.$$

15. L'équation (C') devient, par cette ſubſtitution,

$$H p^2 = \tfrac{1}{2} a f c^2 (1 - x^2) + \frac{3aF}{c};$$

& comme chaque membre, eu égard à la variable x, eſt ſimplement de la forme $\alpha + \mathfrak{G}x^2$, on la rend bientôt identique en prenant

$$H = \frac{3}{2\,\text{ſin.}^3\downarrow}\,(\downarrow - \text{ſin.}\downarrow\,\text{cof.}\downarrow),$$

$$(D')\ldots fa^3 = \frac{3}{2\,\text{ſin.}^3\downarrow}\,[(3 - 2\,\text{ſin.}^2\downarrow)\downarrow - 3\,\text{ſin.}\downarrow\text{cof.}\downarrow].$$

Puiſque ſin. $\downarrow = \frac{c}{a}$, ces valeurs pourroient être exprimées par des ſuites convergentes & régulières, comme il ſuit :

$$H = 1 + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{3c^2}{5a^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{3c^4}{7a^4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{3c^6}{9a^6} + \text{&c.}$$

$$fa^3 = \frac{6c^2}{3\cdot 5a^2} + \tfrac{3}{2}\cdot\frac{6c^4}{5\cdot 7a^4} + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}\cdot\frac{6c^6}{7\cdot 9a^6} + \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{6c^8}{9\cdot 11a^8} + \text{&c.}$$

L'équation (D'), & celle qui exprime la maſſe du fluide $M = \frac{4}{3}\pi a^3$ cof.$\downarrow$, ſerviront à déterminer entièrement l'ellipſe qui ſatisfait à l'équilibre, & ces équations s'accordent parfaitement avec celles qui réſultent de la théorie de Maclaurin.

16. Si on élimine a^3 de ces deux équations, on aura

$$\frac{Mf}{2\pi} = \psi(3\cot.^3\psi + \cot.\psi) - 3\cot.^2\psi;$$

or, en regardant la force centrifuge Mf comme infiniment petite, cette équation eſt ſuſceptible de deux ſolutions; car ſelon qu'on ſuppoſe ψ infiniment petit, ou infiniment près de 90^d, on a

$$\frac{Mf}{2\pi} = \frac{4}{15}\psi^2 \text{ \& } \frac{Mf}{2\pi} = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}\pi - \psi\right).$$

En général la même équation eſt ſuſceptible de deux ſolutions, & il y a par conſéquent deux figures elliptiques qui ſatisfont à l'équilibre, quelle que ſoit la force centrifuge Mf, pourvu que $\frac{Mf}{2\pi}$ n'excède pas le *maximum* de $\psi(3\cot.^3\psi + \cot.\psi) - 3\cot.^2\psi$, qui eſt environ 0,22466, & qui a lieu lorſque $\frac{2\psi}{\text{ſin.}2\psi} = \frac{8 + \text{cof.}2\psi}{5 + 4\text{cof.}2\psi}$.

Au point du *maximum*, les deux figures elliptiques ſe réduiſent à une ſeule, dont les axes ſont dans le rapport de 1 à 2,72 environ.

Dans tous les autres cas, les deux ellipſes qui ſatisfont, ſont, l'une plus aplatie, l'autre moins que ſuivant le rapport précédent; & il eſt très-remarquable que ces deux figures diffèrent d'autant plus entr'elles, que la force centrifuge eſt plus petite. C'eſt ainſi que le ſphéroïde terreſtre qui eſt en équilibre lorſque les axes ſont dans le rapport de 230 à 231, peut l'être encore, ſi on ſuppoſe les axes dans le rapport de 1 à 681. M. d'Alembert eſt le premier qui ait remarqué qu'il pouvoit y avoir pluſieurs ſphéroïdes elliptiques qui ſatisfiſſent à l'équilibre. M. de la Place a fait voir enſuite que le nombre de ces ſphéroïdes ſe réduit à deux, & il a fixé en même temps les limites au-delà deſquelles la figure elliptique ceſſe de ſatisfaire. Au reſte, on peut obſerver que dans les ellipſoïdes extrêmement

Digitized by Google

aplatis, la pesanteur à l'équateur étant presque nulle, le fluide peut se dissiper avec beaucoup de facilité, & par conséquent cette figure d'équilibre ne doit pas être regardée comme bien stable.

L'Ellipse est la seule courbe qui satisfasse à l'équation (B').

17. Soient toujours a & c les élémens de l'ellipse trouvée, au moins de celle qui est peu excentrique, on peut supposer $a = 1$ & $\frac{c^2}{1-c^2} = k$; alors on aura

$$f = \frac{6c^2}{3\cdot 5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{6c^4}{5\cdot 7} + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}\cdot\frac{6c^6}{7\cdot 9} + \&c.$$
$$= \left(\frac{6}{3\cdot 5}k - \frac{6}{5\cdot 7}\cdot 2k^2 + \frac{6}{7\cdot 9}\cdot 3k^3 - \&c.\right)\sqrt{(1+k)}.$$

& l'équation *(B')* deviendra

$$H = \zeta^2(1-x^2)\left(\frac{3k}{3\cdot 5} - \frac{6k^2}{5\cdot 7} + \frac{9k^3}{7\cdot 9} - \&c.\right)\sqrt{(1+k)}$$
$$+ \frac{1}{\zeta} + \frac{A}{\zeta^2}\cdot X' + \frac{B}{\zeta^3}X'' + \frac{C}{\zeta^4}X''' + \&c. \Big\} \ldots (E')$$

Nous avons vu qu'on satisfaisoit à cette équation, en prenant $\frac{1}{\zeta^2} = 1 + kx^2$; mais supposons qu'on ait plus généralement

$$\frac{1}{\zeta^2} = 1 + k(x^2 + p) + k^2 q + k^3 r + \&c. \ldots (F')$$

p, q, r, &c. étant des fonctions quelconques de x.

Je substitue dans l'équation *(E')* la valeur de ζ, tirée de l'équation *(F')*; & calculant d'abord tout ce qui multiplie la première puissance de k, j'observe que la partie variable doit se détruire d'elle-même, à l'exception des termes qui renferment p. Or, on trouve facilement que les termes de cette espèce, introduits dans $\frac{1}{\zeta}$, A, B, C, &c.

ſont $\frac{1}{2}pk$, $-\frac{1}{2}k\int pX'dx$, $-\frac{1}{2}k\int pX''dx$, $-\frac{1}{2}k\int pX'''dx$, &c. il faut donc que la quantité

$$\tfrac{1}{2}p - \tfrac{1}{2}X'\int pX'dx - \tfrac{1}{2}X''\int pX''dx - \tfrac{1}{2}X'''\int pX'''dx - \&c.$$

ſe réduiſe à une conſtante que j'appelle $\frac{1}{2}\alpha$.

De-là réſulte la forme même de la valeur de p; ſavoir,

$$p = \alpha + \mathfrak{C}X' + \gamma X'' + \mathfrak{d}X''' + \&c.$$

& il n'eſt pas à craindre que cette ſuite ſoit divergente, ſuivant ce qui a été dit (*n.os 11 & 12*). Cette valeur de p donne, par le *théorème IV*,

$\int pX'dx = \frac{1}{3}\mathfrak{C}$, $\int pX''dx = \frac{1}{9}\gamma$, $\int pX'''dx = \frac{1}{13}\mathfrak{d}$, &c: & comme

$$p - 3X'\int pX'dx - 3X''\int pX''dx - \&c$$

doit ſe réduire à α, on aura cette ſeconde valeur de p

$$p = \alpha + \tfrac{3}{5}\mathfrak{C}X' + \tfrac{3}{9}\gamma X'' + \tfrac{3}{13}\mathfrak{d}X''' + \&c,$$

qui étant comparée à la précédente, donne $\mathfrak{C} = 0$, $\gamma = 0$, $\mathfrak{d} = 0$, &c. donc p ſe réduit à la conſtante α. Mais ſi on conſidère que la maſſe ne change pas & qu'elle eſt la même que dans le cas de l'ellipſoïde, on en conclura $\int pdx = 0$, & par conſéquent $p = \alpha = 0$.

18. On pourroit objecter que l'égalité des deux ſuites

$$\alpha + \mathfrak{C}X' + \gamma X'' + \mathfrak{d}X''' + \&c.$$
$$\alpha' + \mathfrak{C}'X' + \gamma'X'' + \mathfrak{d}'X''' + \&c.$$

n'entraine pas néceſſairement l'égalité des coéfficiens reſpectifs, comme nous venons de le ſuppoſer. Cette identité des coéfficiens eſt évidente, lorſque les ſuites n'ont qu'un nombre fini des termes; mais on pourroit la nier lorſqu'elles s'étendent à l'infini. Je réponds à cela que la nature des fonctions X', X'', X''', &c. exige qu'on ait $\alpha = \alpha'$, $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}'$, $\gamma = \gamma'$, &c. car ſi les deux ſéries

Digitized by Google

précédentes ne ſont pas égales terme à terme, leur différence

$$\alpha - \alpha' + (\zeta - \zeta')X' + (\gamma - \gamma')X'' + (\delta - \delta')X''' + \&c.$$

ſera zéro, quel que ſoit x. Appelons cette ſuite y, les intégrales définies $\int y\,dx$, $\int yX'\,dx$, $\int yX''\,dx$, &c. ſeront toutes nulles; or, ces intégrales ſont reſpectivement $\alpha - \alpha'$, $\frac{\zeta - \zeta'}{5}$, $\frac{\gamma - \gamma'}{9}$, &c. on a donc $\alpha = \alpha'$, $\zeta = \zeta'$, $\gamma = \gamma'$, &c.

19. Puiſque p eſt nulle, la valeur de $\frac{1}{\zeta^2}$ devient

$$\frac{1}{\zeta^2} = 1 + kx^2 + k^2q + k^3r + \&c.$$

or, ſi à l'aide de cette valeur on élimine ζ dans l'équation (E'), & qu'on calcule tous les termes multipliés par k^2, on trouvera de même que la partie affectée de q, & qui doit ſe réduire à une conſtante, eſt

$$\tfrac{1}{2}q - \tfrac{1}{2}X'\int qX'dx - \tfrac{1}{2}X''\int qX''dx - \tfrac{1}{2}X'''\int qX'''dx - \&c.$$

de-là on conclut, comme ci-devant, $q = 0$. On aura pareillement $r = 0$, $s = 0$, &c. de ſorte que l'équation générale (F') qui pouvoit repréſenter une courbe quelconque peu différente du cercle, ſe réduit à l'équation de l'ellipſe $\frac{1}{\zeta^2} = 1 + kx^2$.

Donc, ſi l'on ſuppoſe qu'une planète en équilibre ait la figure d'un ſolide de révolution peu différent d'une ſphère, & partagé en deux parties égales par ſon équateur, le méridien de cette planète ſera néceſſairement elliptique.

Digitized by Google

MÉMOIRE

Sur les moyens d'opérer une entière combuſtion de l'Huile, & d'augmenter la lumière des Lampes, en évitant la formation de la ſuie, à laquelle elles ſont ordinairement ſujettes.

Par M. MEUSNIER.

DÈS le 19 Mars 1783, j'ai eu l'honneur d'expliquer à l'Académie la nouvelle conſtruction de Lampes que j'avois imaginée, à l'occaſion de l'appareil à diſtiller dans le vide, que j'échauffois par ce moyen. Les premières épreuves de cette machine diſtillatoire que je fis à Cherbourg, au mois de Décembre 1781, & dont l'Académie fut inſtruite, par une lettre que j'eus l'honneur d'écrire à M. le Roi, qui voulut bien lui en faire la lecture, m'apprirent que les lampes ordinaires avoient les plus grands inconvéniens pour l'uſage auquel je les appliquois. Outre leur tendance naturelle à produire de la ſuie, le peu de chaleur qui accompagne l'eſpèce de diſtillation que j'opérois, faiſoit de la chaudière un vrai réfrigérant, contre lequel la ſuie ſe condenſoit en abondance; & la couche épaiſſe qui ſe formoit ainſi, ralentiſſant bientôt la diſtillation, m'obligeoit à prendre continuellement le ſoin de l'enlever, à meſure qu'elle ſe dépoſoit. Je mis donc la conſtruction d'une eſpèce de lampe tout-à-fait exempte de ſuie, au nombre des améliorations dont ces épreuves me firent connoître la néceſſité, & je ne tardai pas à m'en occuper.

J'avois remarqué que la ſuie des lampes, ſemblable à la ſuie des cheminées, étoit encore ſuſceptible de brûler;

Digitized by Google

& que des quantités considérables se réduisoient, par la combustion, en un volume presque insensible de cendres. Il s'ensuivoit de-là que la suie n'étoit autre chose que l'huile elle-même, qui avoit éprouvé le degré de chaleur nécessaire à l'inflammation, mais qui, par le défaut d'une quantité suffisante d'air pur, étoit demeurée dans l'état charbonneux; & il en résultoit qu'outre l'inconvénient qui m'avoit conduit à cette observation, j'avois encore éprouvé celui d'une consommation d'huile en pure perte, puisqu'une partie de l'huile employée n'avoit servi qu'à produire de la suie, sans donner lieu au dégagement de chaleur auquel elle étoit destinée.

Il ne suffiroit pas, en effet, pour que la combustion eut lieu, que le corps qui l'éprouve fut soumis au contact libre de l'air; les parties de ce milieu qui en avoisinent le foyer, ne tarderoient pas à s'épuiser de l'air vital, dont la combinaison avec les corps est la cause universelle de toute espèce de combustion; & cet effet cesseroit bientôt, si de nouvelles portions d'air, succédant continuellement aux premières, ne réparoient pas sans cesse la destruction de ce principe. La Nature elle-même a pourvu à ce renouvellement nécessaire, & la chaleur qui accompagne l'opération dont il s'agit, n'a pas pour unique objet, de mettre la substance combustible dans l'état où son affinité avec l'air vital peut s'exercer; elle sert encore, en dilatant l'air environnant, à en rendre les portions les plus voisines plus légères que le reste du milieu, & excite par cette cause, autour des corps brûlans, un courant d'air ascensionnel, qui présente sans cesse au feu un nouvel aliment.

Le même effet a lieu, d'une manière encore plus sensible, pour toutes les combustions que les différens usages de la vie & des arts ont renfermées dans tant d'espèces diverses de fourneaux: la cheminée, qui fait toujours partie de ces sortes de constructions, & que les premiers inventeurs ne regardèrent sans doute que comme une issue

Digitized by Google

néceſſaire aux vapeurs & à la fumée, a ſur-tout pour objet d'augmenter conſidérablement la rapidité du courant d'air aſcenſionnel, en donnant une grande longueur à cette colonne d'air chaud & léger, qui tend d'autant plus à monter, que ſa peſanteur eſt moindre par rapport à une colonne égale d'air froid.

Mais ſi ce renouvellement d'air, ſe faiſant ainſi d'une manière fortuite & ſans deſſein, ſuffit à la rigueur pour entretenir ſimplement un feu quelconque, il exige de plus des conditions particulières & des proportions préciſes, pour opérer une combuſtion complète; & la quantité d'air vital qui touche ſucceſſivement le foyer de la déflagration, doit être réglée de manière à ſaturer, pour ainſi dire, toute la matière combuſtible qui, dans le même temps, éprouve la chaleur de l'incandeſcence; ſans quoi l'excédant échappe à l'inflammation, & ſe volatiliſe ſans autre altération que celle qu'il doit à la chaleur violente qu'il a ſoufferte. On voit aſſez par-là que les ſubſtances volatiles ſont ſeules ſuſceptibles de cette combuſtion imparfaite; les autres brûlent plus lentement quand l'air vital leur manque; mais elles ne peuvent ſe diſſiper, & c'eſt par cette raiſon que les huiles fourniſſent une ſuie abondante, tandis que le charbon, eſſentiellement fixe & réfractaire, n'en produit aucune.

Ces conſidérations ſimples, & liées tout naturellement avec les connoiſſances que la nouvelle théorie des gaz a rendu familières à la plupart des Phyſiciens, m'apprirent donc également & les cauſes de la ſuie dont la formation m'étoit nuiſible, & les moyens de l'éviter: l'heureuſe application que M. Lavoiſier venoit de faire de l'air vital pur à une lampe dont la flamme mettoit en fuſion les ſubſtances les plus réfractaires, me confirma de plus en plus dans ces idées. Il ne s'agiſſoit que d'augmenter convenablement la rapidité du courant d'air occaſionné par la combuſtion; & pour ne pas mettre inutilement en mouvement une grande quantité d'air, il falloit aſſujettir l'air frais

Digitized by Google

frais attiré par ce courant, à toucher les flammes, dès qu'il entroit dans le fourneau où les lampes étoient renfermées. Une autre conſéquence de ces principes étoit de faire préſenter aux flammes le plus de ſurface poſſible; & j'adoptai, par cette raiſon, l'uſage des mèches plates en forme de ruban, qu'on emploie depuis quelques années.

Je fis donc conſtruire les lampes dont j'ai eu l'honneur de montrer le deſſin à l'Académie, à l'époque que j'ai citée au commencement de ce Mémoire: elles ſont, depuis ce temps-là, avec le reſte de ma machine diſtillatoire, à la raffinerie de l'Arſenal, où pluſieurs Membres de l'Académie les ont vues; & je déterminai, par différentes épreuves, les dimenſions de l'orifice qui devoit fournir l'air à la flamme, & de la cheminée qui devoit en déterminer le mouvement. Ces lampes conſiſtent d'abord uniquement en une boîte creuſe qui recouvre le vaſe où eſt contenue l'huile qui baigne le pied des mèches. Le fond inférieur de cette boîte eſt percé d'autant de trous qu'il y a de mèches, & ſur chaque trou eſt ſoudé un porte-mèche plat qui monte juſqu'au niveau du fond ſupérieur; ce dernier eſt percé lui-même, vis-à-vis l'extrémité de chaque porte-mèche, d'une ouverture ovale dont la mèche occupe le milieu; & la capacité de la boîte communiquant avec l'air inférieur par un conduit particulier, il arrive que quand la lampe eſt renfermée dans ſon fourneau, & ſous la chaudière qu'elle doit échauffer, l'action de la cheminée fait continuellement arriver dans la boîte de nouvel air frais qui, ſe répandant par les ouvertures ovales, alimente les flammes, & ſert tout entier à entretenir leur activité.

J'eus bientôt obtenu, avec cet appareil, des flammes pures, exemptes de ſuie; & au lieu de cette ſubſtance dont l'abondance me nuiſoit auparavant, je ne trouvois plus que quelques parcelles de cendre blanche contre le fond de la chaudière qui étoit frappé par les flammes: je remarquai même une augmentation ſenſible dans la production de chaleur, & je m'en aſſurai par des moyens directs; mais je

ne tardai pas à m'apercevoir qu'un courant d'air trop rapide pouvoit auſſi-bien nuire à mon objet que le défaut contraire, & qu'alors les flammes ſingulièrement diminuées, étoient à la vérité exemptes de ſuie, mais ne produiſoient plus, à beaucoup près, la chaleur dont elles étoient ſuſceptibles. On conçoit en effet comment le courant d'air dont il s'agit, devenant un vent réel, entraînoit les molécules embraſées, avant que leur chaleur eût pu déterminer de nouvelle huile à ſe volatiliſer & à brûler à ſon tour.

C'étoit par le moyen d'une eſpèce de robinet appliqué au haut de la cheminée du fourneau, que je faiſois varier le courant d'air, en augmentant ou diminuant l'orifice de ſortie; & j'avois employé ce moyen pour connoître la grandeur préciſe que je devois donner par la ſuite à cet orifice pour une lampe donnée. J'ouvrois plus ou moins ce robinet, juſqu'à ce que la flamme, devenue nette & brillante, n'éprouvât cependant aucune diminution marquée; & je meſurois la quantité d'air qui entroit alors dans le fourneau, par le moyen d'un inſtrument très-délicat, dont j'ai donné autrefois la deſcription à l'Académie: mais une nouvelle obſervation m'apprit bientôt que le même degré d'ouverture de ce robinet ne convenoit pas à toutes les circonſtances, & qu'il devoit varier ſuivant la longeur de la mèche & la température de l'air extérieur. Ces deux cauſes changent en effet la quantité d'huile qui ſe conſomme, & celle de l'air qui paſſe par les mêmes orifices; & puiſqu'elles ſont expoſées à des variations continuelles, je reconnus la néceſſité de conſerver ce robinet, que je n'avois d'abord employé que comme un moyen de recherche.

Une remarque devoit encore ajouter un dernier degré de perfection à ces lampes, dont l'objet étoit devenu pour moi de produire le plus de chaleur poſſible, avec une quantité donnée d'huile. L'air arrivant auprès des flammes, ſe dilatoit néceſſairement en s'échauffant preſque ſubitement; & cette dilatation tendant à en écarter une grande partie de la flamme qui en étoit environnée, faiſoit que

Digitized by Google

tout l'air vital apporté par ce courant, ne ſervoit pas à la combuſtion. Il falloit donc mettre en mouvement plus d'air qu'il n'étoit néceſſaire pour obtenir une entière combuſtion; & cet air ſurabondant ne pouvoit que refroidir le fourneau, en ſe chargeant d'une partie de la chaleur qu'il ne contribuoit point à augmenter. Cette conſidération me porta à entourer toutes les flammes d'autant de tuyaux de cuivre qui alloient ſe terminer à quelques lignes du fond de la chaudière; & l'air contenu par leur moyen, ne pouvant plus ſe dilater que ſuivant la longueur de ces tuyaux, ni s'éloigner de la flamme, ſervoit alors en bien plus grande quantité à rendre la combuſtion complète. Je m'aperçus en effet, à l'aide de l'inſtrument délicat dont j'ai parlé, qu'avec un courant d'air ſenſiblement moindre, j'obtenois la même eſpèce de flamme qu'auparavant, & quelques degrés de chaleur de plus.

Tel eſt l'hiſtorique de mes recherches ſur les lampes deſtinées à produire de la chaleur; & l'application des mêmes principes à celles qui ont pour objet d'éclairer, eſt immédiate, puiſque la chaleur & la lumière ſe dégagent en même temps dans toutes les eſpèces de combuſtions. C'eſt par cette raiſon que, ſans faire aucun changement à la conſtruction que j'avois adoptée, j'ai fait exécuter une lampe à réverbère, que j'ai eu l'honneur de faire voir dernièrement à l'Académie. Il y a cependant une obſervation à faire, concernant les tuyaux de cuivre dont j'ai parlé ci-devant, & que j'ai transformés néceſſairement en un tube de verre, dès qu'il a été deſtiné à environner une flamme viſible; c'eſt que ce petit appareil ne pouvant avoir d'autre objet que d'économiſer la chaleur, en empêchant que la dilatation n'éloigne l'air nouveau de la flamme, à meſure qu'il entre dans l'appareil, peut être ſuppléé par une ouverture un peu plus grande du robinet qui termine la cheminée; & qu'alors on évite la perte de lumière, qu'occaſionne inceſſamment un obſtacle de plus qu'on lui

donne à traverſer. On peut donc établir que, dans tous les cas où ce tube de verre pourra être ſuppléé autrement; il eſt plutôt nuiſible qu'avantageux, dès qu'il s'agit de lampes deſtinées à éclairer, & je ne l'ai ajouté à ma dernière lampe, que pour développer cette vérité.

On voit, par cette théorie, qu'il y a bien des mécaniſmes propres à remplir l'objet que je m'étois propoſé, avec des lampes renfermées, & qu'il ne s'agit que d'opérer, autour de la flamme, un renouvellement d'air ſuffiſant. C'eſt ainſi que M. Argant a fait connoître, à Paris, vers la fin de l'année dernière, un moyen très-ingénieux & applicable à des lampes iſolées. Il diſpoſe ſa mèche circulairement autour d'un tuyau cylindrique vertical, qui devient ainſi une ſorte de cheminée, dans laquelle il paſſe continuellement de nouvel air, qui touche la ſurface intérieure de la flamme. Il y a même une remarque très-intéreſſante à faire au ſujet de ces lampes, à laquelle les obſervations qui precèdent conduiſent tout naturellement, c'eſt que la dilatation continuelle du nouvel air & l'augmentation de ſon volume tendent à le porter ſur la flamme, plutôt que de l'en éloigner; & c'eſt à cette circonſtance qu'eſt dû ſans doute le bon effet de ces lampes, puiſque leur cheminée, contenant un air qui n'eſt chaud que ſur une petite longueur dans la partie ſupérieure, ne tireroit point aſſez ſans la cauſe qui fait ſervir preſque tout l'air qu'elle fournit à une entière combuſtion. M. Argant emploie au ſurplus un mécaniſme particulier pour gouverner ſes lampes, & ne pouvant faire varier à volonté le courant d'air, comme je le fais à l'aide du robinet qui occupe le haut de la cheminée des miennes, il agit ſur la conſommation d'huile, en alongeant ou raccourciſſant la mèche, par le moyen le plus ſimple & le plus commode: il obtient par-là ce qu'on pourroit appeler l'équilibre néceſſaire entre la quantité du combuſtible conſommé & celle de l'air vital qui lui eſt fourni. Il a ſenti que cet équilibre ne

Digitized by Google

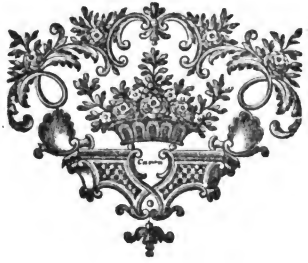
ſauroit être permanent; & c'eſt en cela que la lampe de M. Argant porte ce caractère qui annonce un inventeur conduit par une théorie fondée.

Si l'on peut faire cependant un reproche à ces lampes, c'eſt que l'orifice intérieur ne pouvant être diminué au-delà d'un certain point, l'étendue de leur mèche circulaire donne lieu à une conſommation d'huile & une production de lumière plus conſidérables qu'il n'eſt néceſſaire dans pluſieurs cas; & que, très-propres à éclairer de vaſtes emplacemens, elles ne peuvent être appliquées avec le même avantage à l'uſage d'un ſeul homme.

Il me reſte à parler du tube de verre que M.rs Quinquet & Lange ont ajouté depuis peu aux lampes de M. Argant, & qui a les plus grands rapports avec le tube de cuivre que j'emploie dans les miennes. Il ſembleroit d'abord qu'il a pour objet d'exciter un courant d'air qui touche la flamme extérieurement, tandis que le conduit intérieur, inventé par M. Argant, fournit de l'air à la ſurface intérieure; mais le tube de verre dont il s'agit, beaucoup trop court pour pouvoir agir ainſi à la manière d'une cheminée, ajoute, tel qu'il eſt, bien peu de choſe à l'effet de ces lampes, & pourra toujours être ſuppléé par le conduit intérieur, quand il ſera bien proportionné & la lampe bien gouvernée. La lumière alors n'aura plus ce verre à traverſer; & s'il peut avoir une utilité réelle, ce n'eſt guère qu'en plein air où il garantit la flamme de l'agitation d'un vent médiocre. Ces lampes manquent au reſte du moyen que M. Argant avoit imaginé pour en gouverner la mèche; & depuis qu'elles ſe ſont répandues, on en voit pluſieurs qui jettent ſouvent une fumée épaiſſe: elles ſont d'ailleurs tout-à-fait dans le cas de celles de M. Argant, ayant de toute néceſſité une mèche très-étendue, dont le développement équivaut à cinq ou ſix mèches de nos réverbères ordinaires; & la grande lumière qu'elles répandent, tient principalement à la conſommation d'huile qui réſulte de la grandeur de leur mèche.

Digitized by Google

La véritable utilité d'un tube de verre environnant la flamme d'une lampe, eſt qu'en faiſant fonction de cheminée, il déterminera l'entrée d'un courant d'air par ſon orifice inférieur; mais il faut qu'alors il ait au moins ſix à ſept pouces de longueur, ſur quinze à dix-huit lignes de diamètre, ſuivant la groſſeur des mèches; & je me ſuis aſſuré, par des expériences multipliées, que cet appareil ſimple, appliqué à des lampes anciennes & de toutes ſortes de conſtructions, leur donne ſans dépenſe tous les avantages qu'on vante dans les nouvelles lampes.



Digitized by Google

OBSERVATION ANATOMIQUE.

Par M. DE FOUCHY.

LE premier des accidens qui m'ont tenu abſent de l'Académie, pendant un temps aſſez long, a été accompagné d'une circonſtance qui m'a paru mériter que je la communiquaſſe à l'Académie.

Le 24 Mars dernier, ſortant de chez M. Aniſſon, où j'avois aſſiſté à l'examen de ſa nouvelle preſſe, je retournois chez moi, vers les ſept heures du ſoir, & il commençoit à faire un peu obſcur. En traverſant le boulevart, alors très-dérangé par le pavé de la Comédie italienne & par les fouilles des tuyaux, un pavé à moitié ſorti de ſa place, m'accrocha le pied, & me fit tomber en avant & un peu de côté, le viſage ſur un tas d'éclats de grès qui ſe trouva-là. Le coup porta principalement ſur le vomer & ſur le coin de l'orbite de l'œil droit; la peau qui couvre le vomer, fut entamée, & il en ſortit aſſez de ſang. Je ſentis, à l'inſtant du coup, une vive douleur qui ſe communiqua à l'œil gauche; mais je n'éprouvai ni étourdiſſement ni mal de cœur. Je me relevai ſur le champ, & continuai mon chemin, tenant mon mouchoir ſur la plaie du nez qui me faiſoit beaucoup de douleur. À mon arrivée, je lavai cette plaie qui ne ſaignoit plus, avec du vin chaud, & la douleur diminua peu-à-peu aſſez pour ne pas m'empêcher de dormir. Le lendemain matin elle étoit ſupportable, & je crus remarquer que je la ſentois aſſez diſtinctement en deux endroits; ſavoir, au vomer, & au-deſſus de l'œil gauche qui n'avoit point eſſuyé de coup; celle du vomer étoit accompagnée d'une circonſtance particulière & qui a duré long-temps, c'eſt que lorſque je pouſſois, même légèrement, avec le doigt, le vomer à droite ou à gauche, je ſentois une

Digitized by Google

petite crépitation interne, comme ſi l'engrenage de ces os avec ceux de la face avoit ſouffert. Juſque-là je n'avois rien aperçu d'extraordinaire, je ſortis même & ne rentrai que pour dîner ; mais voici ce qui le fut, & qui me parut mériter conſidération.

Sur la fin du dîner, je ſentis un petit redoublement de douleur au-deſſus de l'œil gauche, & dans l'inſtant même je ceſſai de pouvoir prononcer les mots que je voulois. J'entendois ce que l'on diſoit, & je penſois ce que je devois répondre; mais je prononçois d'autres mots que ceux qui devoient exprimer ma penſée; ou ſi je les commençois, je ne les achevois pas, & j'y ſubſtituois d'autres mots; j'avois cependant tous les mouvemens auſſi libres qu'à l'ordinaire; je n'abandonnai ni ma fourchette ni un morceau de pain que je tenois; je voyois nettement tous les objets; j'entendois diſtinctement ce qu'on diſoit, & les organes qui concourent à la penſée, étoient, à ce qui me paroiſſoit, dans l'état naturel.

Cette eſpèce de paroxiſme dura à peu-près une minute, & pendant ſa durée j'eus l'eſprit aſſez libre pour remarquer cette ſingulière diſtinction dans le ſenſorium de l'ame, qui n'avoit qu'une ſeule de ſes parties affectée, ſans qu'aucune des autres eût éprouvé le moindre dérangement.

Lorſque M. Vicq-d'Azyr lut, à l'aſſemblée de l'Académie du 30 Avril dernier, ſon Mémoire ſur l'Anatomie comparée du cerveau de l'homme & des autres animaux, je fus frappé de ce qu'il diſoit des filets nerveux, qui partant du cerveau, venoient à travers l'os cribleux, ſe rendre dans l'intérieur du nez, & je crus y apercevoir la cauſe de l'état dans lequel je m'étois trouvé, ces filets ayant pu être ébranlés par le coup qu'avoit reçu le vomer, & tranſmettre leur ébranlement au cerveau; mais je n'y trouvai point la raiſon du ſingulier phénomène du ſenſorium de l'ame affecté dans une ſeule de ſes parties, ſans que les autres l'aient été en aucune manière. Je me renferme ici purement dans le fait que j'ai cru devoir communiquer à l'Académie,

Digitized by Google

l'Académie, & le conſigner, ſi elle le juge à propos, dans ſes regiſtres. Une obſervation de cette eſpèce doit être extrêmement rare, puiſqu'elle exige qu'un Phyſicien en ſoit le ſujet, & que l'accident n'ait pas été aſſez grave pour l'empêcher d'en obſerver toutes les circonſtances. Quelque zèle cependant que j'aie pour l'avancement des Sciences qui ſont l'objet de l'Académie, j'eſpère qu'elle me pardonnera aiſément de ne pas deſirer de lui en préſenter ſouvent de pareilles.

Digitized by Google

RENSEIGNEMENS GÉNÉRAUX

Pour tenir lieu de réponſe à une Queſtion adreſſée à l'Académie, par M. GASTÉ DE BONAY, concernant la cherté & la rareté du Bois à brûler, particulièrement du Charbon de bois, relativement aux groſſes Forges & Fourneaux à Fer.

Par M. MORAND.

« LA néceſſité d'aviſer à la cherté & à la rareté du bois » de chauffage, ainſi que du charbon végétal (je tranſ- » cris ici la Lettre écrite à l'Académie), devient de jour » en jour plus preſſante; les groſſes forges & fourneaux, » en un mot, les mines à feu, par leur énorme conſom- » mation, ſont en partie cauſe de cette diſette, pour le » charbon de végétal. Le bois eſt preſque par-tout aujourd'hui » à un prix que les manufactures ne peuvent plus ſupporter; » en ſorte qu'il faut, ou que le produit des ouvrages, déjà » fort cher, augmente encore, ou que beaucoup d'entr'elles » ſoient miſes bas : l'une & l'autre alternative ne peut être » que très-fâcheuſe. On n'a pas beſoin de rien ajouter à cette remarque ».

Depuis long-temps l'inquiétude ſur le dépériſſement des bois du royaume eſt générale; Paris s'en eſt reſſenti cet hiver & le précédent; les provinces n'en ſont pas exemptes; l'Académie eſt conſultée à cette occaſion par un citoyen zèlé & honnête, réſidant près d'Argentan, en baſſe-Normandie.

M. Gaſté de Bonay, eſt à portée d'éprouver l'inconvénient de la cherté & de la rareté du bois employé en charbon dans les groſſes forges & fourneaux à fer; il eſt

Digitized by Google

inſtruit auſſi, à ce qu'il paroît, « d'eſſais infructueux faits dans ſa province, pour appliquer à ces uſines le feu de charbon de terre, dont le ſuccès néanmoins tendroit à augmenter le bois de chauffage; » enfin diverſes annonces qui lui ſont parvenues ſur cette ſubſtitution de combuſtible, le conduiſent à préſumer qu'il exiſte une *méthode ſûre de faire cette application ;* elle eſt ignorée dans les parties occidentales de la France, aſſez garnies de groſſes forges. M. Gaſté a recours à l'Académie pour ſavoir *ſi l'on a réellement quelque connoiſſance de la poſſibilité de réuſſir ;* il prie l'Académie de l'indiquer.

L'Académie portée de tout temps à concourir au bien public, ſoit par ſes propres travaux, ſoit par ceux de ſes Correſpondans, & même ceux des Savans étrangers, qu'Elle publie à la ſuite de ſes Mémoires, m'a chargé de préſenter, dans une de ſes ſéances, un projet de réponſe à cette Lettre. La recherche de la manière de procéder pour remplir l'intention de l'Académie, a été peu embarraſſante : un ſimple énoncé des différens articles traités juſques à ce jour par différens Savans, touchant l'application du feu de charbon de terre aux groſſes forges, m'a ſemblé ce qu'il y avoit de plus naturel & de plus convenable; c'eſt à quoi j'ai cru devoir d'autant plus me borner, que ces articles ſe trouvent recueillis dans un ſeul & même ouvrage, connu du Public & avoué de l'Académie, l'art d'exploiter les mines de charbon de terre. Je me bornerai donc à préſenter ici une Table purement indicative ſuivant l'ordre de l'ouvrage; je mettrai enſuite ſous les yeux de l'Académie ce que j'y ai ajouté de relatif au point où on en eſt, depuis l'impreſſion achevée, touchant la ſubſtitution économique du feu de braiſe de charbon de terre au charbon végétal, dans les forges & fourneaux à fer, objet principal ſur lequel M. Gaſté de Bonay propoſe la queſtion : *y a-t-il poſſibilité de réuſſir!*

La deſcription de l'art auquel je renvoie M. Gaſté de Bonay, renferme des preuves que la méthode exiſte, puiſ-

que l'opération s'exécute avec ſuccès en Angleterre, où le procédé en a été communiqué, ſuivant Becher, par un Allemand nommé Blawenſtein.

Il eſt bien vrai que, juſques à ce jour, nous n'avons pu, en France, avoir le même ſuccès pour les forges & fourneaux à fer : cela tiendroit-il à la nature de la mine de fer, dont telle ou telle eſpèce peut ou ne peut pas être traitée avec le charbon de terre ainſi fabriqué ? Ne faudroit-il point, dans une comparaiſon bien faite de celles que l'on traite de cette façon en Angleterre, & des eſpèces que nous avons en France, trouver celles qui ſont propres à être traitées par ce procédé ? Ces points de recherche, ainſi que beaucoup d'autres propres à ouvrir de nouvelles vues pour perfectionner les tentatives déjà faites, ſe trouvent préſentés, rapprochés avec ſoin dans un détail convenable, ſous les titres qui forment l'eſpèce d'index dont j'ai parlé il n'y a qu'un inſtant, pour ſervir de réponſe à M. Gaſté.

Du charbon de terre pour les ouvrages de forge & pour les travaux métallurgiques..... *Page* 1159.

Du feu de charbon de terre appliqué à la réduction des minérais, en particulier de la mine de fer ; hiſtoire des procédés connus pour rendre ce combuſtible propre à ces opérations ; connoiſſances fondamentales de métallurgie à rapprocher de ces tentatives faites ou à faire..... 1165.

Coup-d'œil général ſur la fonte des mines, dans les principales circonſtances qui conſtituent cette opération..... 1168.

Des mines de fer..... *Idem.*

Des fondans..... 1171.

Des charbons de bois, eſſai de comparaiſon entr'eux & les charbons de terre..... 1174.

Différentes eſpèces de braiſe de charbon de terre, leur fabrication en grand..... 1177.

Fabrication de braiſe de charbon de terre, nommée *coaks*, pour fondre le minérais de fer, à Carron en Écoſſe, d'après M. Jars..... 1178.

Fabrication de ces mêmes braiſes nommées *cinders*, d'après M. Jars..... 1178.

Digitized by Google

Préparation de braiſe de charbon de terre, nommée *cinders*, dans des fours, à Neucaſtle, d'après M. Jars..... *Page* 1179.

Cuiſſon de charbon de terre, exécutée en meule, à Saint-Bel en Lyonnois, par M. Jars..... 1183.

Qualité générale du feu de charbon de terre, pour les opérations métallurgiques..... 1187.

Recherches ſur la réduction des charbons de terre en braiſe.. 1188 &..... 1190.

Analyſe des procédés indiqués pour faire des braiſes de charbon de terre, en alumelles & dans des fours..... 1192.

Opérations métallurgiques exécutées & tentées avec le charbon de terre brute, ou de ſes braiſes..... 1201.

Grillage, ou rôtiſſage des mines..... *Idem.*

Des minérais de fer qui ſe traitent dans quelques forges, en Angleterre, & de leur grillage..... 1202.

Grillage de la mine de fer, aux forges de Carron & à Cliſton en Angleterre, d'après M. Jars..... 1203.

De la fonte des minérais en général..... 1304.

Fonte des minérais de fer dans des hauts fourneaux, aux forges de Carron en Écoſſe, d'après M. Jars..... 1205.

Fourneau à vent, ou fourneau anglois, en uſage à Neucaſtle, pour fondre la gueuſe de fer, avec le clod-coak, réduit en une eſpèce de cinders, appelé *coak*, ſans aucune addition de charbon de bois, d'après M. Jars..... 1206.

Eſſais faits dans le Marquiſat de Franchimont, aux forges de Theux, pays de Liége, par M. de Limbourg l'aîné, Docteur en Médecine..... 1213.

Obſervations ſur ces eſſais..... 1215.

Tentative faite en Languedoc..... 1218.

Expériences faites avec différentes proportions de mélange de charbon de bois & de houille..... 1219.

Fonte de gueuſe de fer exécutée à la forge d'Aizy en Bourgogne, dans l'année 1775, avec le charbon de terre de Montcenis réduit en braiſe..... 1221.

Hiſtoire & analyſe des opérations faites à Aizy & aux forges de Breteuil en Normandie..... 1587.

Je viens donc tout de ſuite à l'addition que j'ai annoncée. Une remarque ſur laquelle je n'ai ceſſé d'inſiſter, toutes

les fois que j'ai eu à répondre ſur l'emploi du feu de charbon de terre, c'eſt que, de tous les combuſtibles, le charbon de terre eſt celui qui a le plus beſoin de l'action de l'air libre, perſonne ne l'ignore; mais, dans les nouvelles applications que l'on tente de ce feu particulier, a-t-on toujours ce principe de fait aſſez préſent à l'idée? Je le crois de la plus grande conſéquence pour l'emploi du charbon de terre aux groſſes forges & aux fourneaux à fer. On ne parviendra à un ſuccès complet, qu'autant que la conſtruction du fourneau ſe rapportera à ce principe, de manière que l'air agiſſe ſur le combuſtible & avec la plus grande liberté, & dans la plus grande étendue poſſible. Il n'y aura alors rien de ſurprenant qu'avec un petit nombre de charges de coaks, & une petite quantité de fondant calcaire, on parvienne à avoir un produit conſidérable de fonte. Toutes les perſonnes inſtruites ou intelligentes dans les différentes parties qui conſtituent l'art des forges, n'ont beſoin que d'être miſes ſur la voie. On eſt au ſurplus dans l'expectative d'eſſais qui doivent ſe faire à Montcenis en Bourgogne.

M. Wilxinſon, anglois de nation, connu depuis pluſieurs années à Nantes, doit établir à Montcenis des forges, ſans cours d'eau pour moteur, & où le charbon de terre ſera employée en braiſe, le tout à la manière connue en Angleterre.

Digitized by Google

MÉMOIRE

SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES,

Par M. COUSIN.

(1.) J'AI démontré dans nos Mémoires pour 1783, un théorème qu'on peut énoncer d'une manière beaucoup plus générale, que voici :

L'équation de l'ordre n

$$\alpha\frac{d^n z}{dy^n} + \mathcal{C}\frac{d^n z}{dy^{n-1}dx} + \gamma\frac{d^n z}{dy^{n-2}dx^2} + \ldots + \varepsilon\frac{d^n z}{dx^n} = \tau,$$

dans laquelle α, $\mathcal{C}$, $\gamma \ldots \varepsilon$, τ, ſont des fonctions de x, y, z, & des différences partielles de z juſqu'à celles de l'ordre $n - 1$ inclusivement, étant propoſée; ſi on nomme p, q, r, s, &c. les différences partielles de l'ordre $n - 1$, & qu'ayant formé l'équation

$$\alpha m^n + \mathcal{C}m^{n-1} + \gamma m^{n-2} + \ldots + \varepsilon = 0,$$

l'on faſſe, pour abréger,

$$\alpha m + \mathcal{C} = \alpha\lambda,\ \alpha\lambda m + \gamma = \alpha\mu,\ \alpha\mu m + \delta = \alpha\nu,\ \&c.$$

toutes les intégrales de la propoſée dépendront de pouvoir ſatisfaire aux équations priſes deux à deux, qu'on formera, en mettant ſucceſſivement pour m ſes valeurs dans ces deux-ci,

$$m\,dy + dx = 0,$$

$$\alpha m(dp + \lambda dq + \mu dr + \nu ds + \&c.) + \tau dx = 0.$$

Nous commencerons par appliquer ce théorème aux équations linéaires, c'eſt-à-dire, à celles où z & ſes différences partielles de tous les ordres ſont ſous une forme linéaire.

Digitized by Google

(2.) Les équations linéaires de l'ordre n peuvent toutes se repréſenter par

$$\alpha\frac{d^n\zeta}{dy^n}+\mathfrak{C}\frac{d^n\zeta}{dy^{n-1}dx}+\gamma\frac{d^n\zeta}{dy^{n-2}dx^2}+\ldots+\varepsilon\frac{d^n\zeta}{dx^n}=\theta$$
$$+\mathfrak{C}'\frac{d^{n-1}\zeta}{dy^{n-1}}+\gamma'\frac{d^{n-1}\zeta}{dy^{n-2}dx}+\ldots+\varepsilon'\frac{d^{n-1}\zeta}{dx^{n-1}}$$
$$+\gamma''\frac{d^{n-2}\zeta}{dy^{n-2}}+\ldots+\varepsilon''\frac{d^{n-2}\zeta}{dx^{n-2}}$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots+\varrho\zeta$$

dans laquelle les coéfficiens de ζ & de ſes différences partielles & θ ſont des fonctions de x, y. Alors, ſi nous nommons p, q, r, s, &c. les différences partielles de l'ordre $n-1$, p', q', r', &c. celles de l'ordre $n-2$, &c. nous aurons à réſoudre les équations aux différences ordinaires,

$$mdy+dx=0,$$

$$\alpha m(dp+\lambda dq+\mu dr+\nu ds+\&c.)$$
$$-(\mathfrak{C}'p+\gamma'q+\delta'r+\&c.+\gamma''p'$$
$$+\delta''q'+\&c.+\&c.+\varrho\zeta-\theta)dx=0.$$

Déſignons par m, m', m'', &c. les valeurs de m, par $dt\,1$, $ds\,1$, $dr\,1$, &c. les différentielles exactes qu'on trouvera en cherchant les facteurs propres à rendre intégrables

$$mdy+dx,\ m'dy+dx,\ m''dy+dx,\ \&c.$$

Cela poſé, ayant multiplié les équations

$$\frac{dt\,1}{dy}dy+\frac{dt\,1}{dx}dx=0,$$

$$\alpha m(dp+\lambda dq+\mu dr+\&c.)$$
$$-(\mathfrak{C}'p+\gamma'q+\delta'r+\&c.+\gamma''p'$$
$$+\delta''q'+\&c.+\&c.+\varrho\zeta-\theta)dx=0,$$

la première par Δ, & l'autre par Λ, nous les ajouterons enſemble, & nous donnerons à la réſultante la forme que voici:

Digitized by Google

$$d.\Lambda\alpha m(p + \lambda q + \mu r + \&c.)$$
$$- pd.\Lambda\alpha m - qd.\Lambda\lambda\alpha m - rd.\Lambda\mu\alpha m - \&c.$$
$$- \Lambda(\mathcal{C}'p + \gamma' q + \delta' r + \&c. + \gamma'' p^{\circ}$$
$$+ \delta'' q^{\circ} + \&c. + \&c. + \varrho\zeta - \theta)dx$$
$$+ \Delta\left(\frac{d\imath\imath}{dy}dy + \frac{d\imath\imath}{dx}dx\right) = 0.$$

Nous ſuppoſerons

$$- pd.\Lambda\alpha m - qd.\Lambda\lambda\alpha m - rd.\Lambda\mu\alpha m - \&c.$$
$$- \Lambda(\mathcal{C}'p + \gamma' q + \delta' r + \&c. + \gamma'' p^{\circ}$$
$$+ \delta'' q^{\circ} + \&c. + \&c. + \varrho\zeta)dx$$
$$+ \Delta\left(\frac{d\imath\imath}{dy}dy + \frac{d\imath\imath}{dx}dx\right),$$

une différentielle exacte que nous nommerons dV; & $\theta\imath$ étant l'intégrale de $\Lambda\theta dx$, priſe par rapport à x, après avoir mis pour y ſa valeur en x & $\imath$, nous aurons

$$(1)\ldots\Lambda\alpha m(p + \lambda q + \mu r + \&c.) + V + \theta\imath = 0:$$

nous aurons auſſi

$$- p\frac{d.\Lambda\alpha m}{dy} - q\frac{d.\Lambda\lambda\alpha m}{dy} - r\frac{d.\Lambda\mu\alpha m}{dy} - \&c.$$
$$+ \Delta\frac{d\imath\imath}{dy} = \frac{dV}{dy};$$

$$- p\left(\frac{d.\Lambda\alpha m}{dx} + \Lambda\mathcal{C}'\right) - q\left(\frac{d.\Lambda\lambda\alpha m}{dx} + \Lambda\gamma'\right)$$
$$- r\left(\frac{d.\Lambda\mu\alpha m}{dx} + \Lambda\delta'\right) + \&c.$$
$$- \Lambda(\gamma'' p^{\circ} + \delta'' q^{\circ} + \&c. + \&c. + \varrho\zeta)$$
$$+ \Delta\frac{d\imath\imath}{dx} = \frac{dV}{dx};$$

d'où nous tirerons, en éliminant Δ, & faiſant pour abréger,

$$\frac{dV}{dy} - m\frac{dV}{dx} = (V),\ \frac{d.\Lambda\alpha m}{dy} - m\frac{d.\Lambda\alpha m}{dx} = (\Lambda\alpha m),\ \&c.$$

$$(2)\ \ldots\ -p\,[(\Lambda\alpha m) - m\Lambda\zeta'] - q\,[(\Lambda\lambda\alpha m) - m\Lambda\gamma'] - r\,[(\Lambda\mu\alpha m) - m\Lambda\delta'] - \&c. + m\Lambda(\gamma'' p' + \delta'' q' + \&c. + \&c. + \varsigma\zeta) = (V).$$

(3.) Si la propoſée a une intégrale de l'ordre immédiatement inférieur, j'entends par-là une équation linéaire de l'ordre $n - 1$, qui renferme une fonction arbitraire de t 1, on pourra ſuppoſer

$$V = Mp' + Nq' + \&c. + M'p'' + N'q'' + \&c. + \&c. + U\zeta + \varphi : t1;$$

d'où l'on tirera

$$(V) = (M)p' + M(p - mq) + (N)q' + N(q - mr) + \&c. + (M')p'' + M'(p' - mq') + (N')q'' + N'(q' - mr') + \&c. + \&c. + (U)\zeta + U[p^{(n-2)'} - mq^{(n-2)'}].$$

Partant, ſi l'on fait pour abréger,

$$(\Lambda\alpha m) - m\Lambda\zeta' = \omega,\ (\Lambda\lambda\alpha m) - m\Lambda\gamma' = \pi,\ (\Lambda\mu\alpha m) - m\Lambda\delta' = \varpi, \&c,$$

l'équation (2) donnera

$$-\omega = M, -\pi = N - mM, -\varpi = P - mM, \&c,$$
$$m\Lambda\gamma'' = (M) + M', m\Lambda\delta'' = (N) - mM' + N', \&c,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ m\Lambda\varsigma = (U).$$

La première ſérie contient $n - 1$ équations, la ſeconde en contient $n - 2$, & ainſi de ſuite; le nombre de toutes les équations eſt la ſomme d'une progreſſion arithmétique, dont le premier terme eſt 1, & le dernier $n - 1$, c'eſt-

à-dire que ce nombre $= n \cdot \frac{n-1}{2}$: & comme il n'y a que $\frac{(n-1.)(n-2)}{2}$ inconnues à déterminer, il reſte $n - 1$ équations de condition, qui doivent avoir lieu pour que la propoſée ait une intégrale de l'ordre immédiatement inférieur, voici cette intégrale :

$$\Lambda\alpha m(p + \lambda q + \mu r + \&c.) + Mp' + Nq' + \&c. + M'p'' + N'q'' + \&c. + \&c. + Uz + \varphi : t1 + \theta 1 = 0.$$

Si la propoſée étoit du ſecond ordre, on auroit les trois équations

$$(\Lambda\alpha m) - m\Lambda\xi' + U = 0,$$
$$(\Lambda\gamma) + m\Lambda\gamma' + mU = 0,$$
$$m\Lambda\varrho = (U),$$

dont la première donneroit U; des deux autres, l'une ſerviroit à trouver le facteur Λ, & la ſeconde ſeroit l'équation de condition. Si l'équation du ſecond ordre n'étoit autre que $\frac{d^2z}{dy^2} = X^2 \frac{d^2z}{dx^2}$, qui eſt celle des cordes vibrantes lorſque X ne renferme que x & des conſtantes, les trois équations deviendroient

$$(U) = 0,$$
$$\Lambda m \frac{dm}{dx} + 2U = 0,$$
$$2(\Lambda) - 3\Lambda \frac{dm}{dx} = 0:$$

on tireroit des deux premières $(\Lambda) \frac{d.m^2}{dx} = \Lambda m \frac{d^2.m^2}{dx^2}$; on auroit par conſéquent

$$\frac{1}{4} \frac{d.m^2}{m^2} = \frac{d^2.m^2}{dx} : \frac{d.m^2}{dx}, \quad (m^2) - \tfrac{1}{4} d.m^2 = adx,$$
$$\& \; 16\, m = (ax + b)^2,$$

a & b étant des conſtantes, c'eſt la valeur de X pour que l'équation des cordes vibrantes ait une intégrale de l'ordre immédiatement inférieur. Tout ce que contient ce numéro, s'accorde bien avec ce qui eſt démontré d'une autre manière, *n.os 84* & *85* de nos leçons de calcul différentiel & de calcul intégral.

(4.) Mais la propoſée pourroit n'avoir pas d'intégrale de l'ordre immédiatement inférieur, & qu'il fût cependant poſſible d'en tirer la valeur complète de z, en donnant à z & V des formes très-générales, au moyen de coéfficiens indéterminés. La ſeule ſuppoſition de

$$V = Af:s1 + Bf':s1 + Cf'':s1 + \&c. + L,$$
$$z = Mf:s1 + Nf':s1 + Pf'':s1 + \&c. + W,$$

réſoudroit un cas fort étendu: alors on mettroit ces valeurs dans les équations (1) & (2), & on auroit pour déterminer $A, M, B, N,$ &c. des équations aux différences partielles de l'ordre $n - 1$, auxquelles il ſuffiroit de ſatisfaire. Si z & V devoient renfermer des termes où la fonction arbitraire fût embarraſſée du ſigne intégral, tels que ceux-ci:

$$Af Bds\,1f:s1,\ Mf Ndt\,1f Pds\,1f:s1,\ \&c.$$

on les introduiroit; & ayant donné à z, V les valeurs les plus générales dont ils fuſſent ſuſceptibles, les conditions qu'on trouveroit, indiqueroient les cas où l'intégrale complète ſeroit poſſible en termes finis. Cette méthode d'intégrer les équations linéaires aux différences partielles de tous les ordres, eſt ſimple & générale: il ne ſera pas inutile de l'éclaircir par quelques exemples.

(5.) Lorſque la propoſée eſt du ſecond ordre, en faiſant, pour abréger, $\Lambda(\pi\alpha m + \omega\gamma) = \sigma$, on tire des équations (1) & (2),

$$\sigma p = \Lambda\gamma\,[\Lambda m\varsigma z - (V)] - \pi(01 + V),$$
$$\sigma q = \Lambda\alpha m\,[\Lambda m\varsigma z - (V)] + \omega(01 + V).$$

Digitized by Google

Je pourrois ſubſtituer ces valeurs dans $dz = p\,dy + q\,dx$; j'en tirerois z, pourvu que $m\varsigma$ fût le facteur propre à rendre intégrable $\frac{\gamma\,dy + \alpha m\,dx}{\gamma(\alpha m) - \alpha m(\gamma) - \alpha m^2\gamma' - m\gamma\varepsilon'}$; l'autre condition donneroit une équation aux différences partielles qu'il ſeroit néceſſaire d'intégrer complétement, pour que la valeur de z renfermât deux fonctions arbitraires; mais ce cas particulier pourra ſe déduire aiſément de la ſolution générale que nous avons indiquée.

(6.) Nous ferons d'abord

$$V = Af:s + Bf':s + Cf'':s + \ldots\ldots\ldots + Kf^{n}:s + L,$$
$$z = Mf:s + Nf':s + Pf'':s + \ldots\ldots\ldots + Vf^{n}:s + W,$$

ds étant la différentielle exacte qu'on trouve en cherchant le facteur propre à rendre intégrable $m'dy + dx$. Par ces ſubſtitutions, $\Delta m\varsigma z - (V)$ devient

$$[\Delta Mm\varsigma - (A)]f:s + [\Delta Nm\varsigma - (B) - A(s)]f':s + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + [\Delta Vm\varsigma - (K) - I(s)]f^{n}:s - K(s)f^{(n+1)}:s + \Delta Wm\varsigma - (L);$$

on trouvera donc facilement les valeurs de p & q que donnent les formules du *n.° précédent.* Mais on a auſſi

$$p = \frac{dM}{dy}f:s + \left(\frac{dN}{dy} + M\frac{ds}{dy}\right)f':s + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \left(\frac{dU}{dy} + T\frac{ds}{dy}\right)f^{n}:s + U\frac{ds}{dy}f^{(n+1)}:s + \frac{dW}{dy},$$

Digitized by Google

$$q = \frac{dM}{ds} f:s + \left(\frac{dN}{ds} + M\frac{ds}{ds}\right) f':s + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots + \left(\frac{dU}{ds} + T\frac{ds}{ds}\right) f^{n}:s + U\frac{ds}{ds} f^{(n+1)}:s + \frac{dW}{ds};$$

il ne s'agira donc que de déterminer les coéfficiens A, M, B, N, &c. au moyen des équations ſuivantes qui ſont du premier ordre :

$$\Lambda\gamma\ [\Lambda Mm\varsigma - (A)] - \pi A = \sigma\frac{dM}{dy},$$

$$\Lambda\alpha m\ [\Lambda Mm\varsigma - (A)] + \omega A = \sigma\frac{dM}{ds},$$

$$\Lambda\gamma\ [\Lambda Nm\varsigma - (B) - A(s)] - \pi B = \sigma\left(\frac{dN}{dy} + M\frac{ds}{dy}\right),$$

$$\Lambda\alpha m\ [\Lambda Nm\varsigma - (B) - A(s)] + \omega B = \sigma\left(\frac{dN}{ds} + M\frac{ds}{ds}\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Lambda\gamma\ [\Lambda Um\varsigma - (K) - I(s)] - \pi K = \sigma\left(\frac{dU}{dy} + T\frac{ds}{dy}\right),$$

$$\Lambda\alpha m\ [\Lambda Um\varsigma - (K) - I(s)] + \omega K = \sigma\left(\frac{dU}{ds} + T\frac{ds}{ds}\right),$$

$$\Lambda\gamma\ [\Lambda Wm\varsigma - (L)] - \pi(\vartheta 1 + L) = \sigma\frac{dW}{dy},$$

$$\Lambda\alpha m\ [\Lambda Wm\varsigma - (L)] + \omega(\vartheta 1 + L) = \sigma\frac{dW}{ds}.$$

On aura de plus les deux équations

$$\Lambda K\gamma(s) = -\sigma U\frac{ds}{dy},\quad \Lambda K\alpha m(s) = -\sigma U\frac{ds}{ds}$$

qui, à cauſe de $\gamma = \alpha mm'$ toujours vraie par la propriété des équations du ſecond degré, ſe réduiſent à une ſeule qui renferme les conditions qui doivent avoir lieu pour que l'intégrale ſoit telle que nous l'avons ſuppoſée. Nous n'avons trouvé qu'une partie de la valeur de ζ, nous trouverons l'autre, en changeant dans la première, m en m', s en t, & $f:s$ en $\varphi:t$.

Digitized by Google

(7.) Si l'équation du second ordre est celle des cordes vibrantes, $\frac{d^2 z}{dy^2} = X^n \frac{d^2 z}{dx^2}$, on fera $\Lambda m = 1$,

$$m = -X^n, \quad m' = X^n,$$

$$y - \int \frac{dx}{X^n} = t, \quad y + \int \frac{dx}{X^n} = s;$$

partant $(s) = 2$. Alors en supposant que les coëfficiens sont tous fonctions de x seul, on aura à résoudre les équations

$$d\frac{A}{X^n} = 0, \quad dA = \frac{nX^{n-1}dX}{dx} dM,$$

$$d\frac{B}{X^n} = \frac{MdX - nAdx}{X^{n+1}},$$

$$dB + \frac{nAdx}{X^n} = \frac{nX^{n-1}dX}{dx}\left(dN + \frac{Mdx}{X^n}\right),$$

$$\ldots\ldots d\frac{K}{X^n} = \frac{TdX - nIdx}{X^{n+1}},$$

$$dK + \frac{nIdx}{X^n} = \frac{nX^{n-1}dX}{dx}\left(dU + \frac{Tdx}{X^n}\right),$$

$$2Kdx = Udx.$$

On en tire $A = aX$ & $M = ax + b$, a & b étant des constantes, ou bien $A = 0$ & $M = 1$; nous examinerons séparément ces deux cas, en supposant $X = (ax + b)^n$.

Dans le premier cas, on peut supposer

$$N = e(1)(ax + b)^{-n+2},$$
$$P = e(2)(ax + b)^{-2n+3}, \text{ &c.}$$
$$B = g(1)(ax + b),$$
$$C = g(2)(ax + b)^{-n+2}, \text{ &c.}$$

$e(1)$, $g(1)$, &c. étant des constantes. Par ces substitutions, nos équations deviennent

Digitized by Google

$$g(1)(1-\partial)+2=\partial,$$
$$g(1)+2=ae(1)(2-\partial)\partial+\partial,$$
$$2ag(2)(1-\partial)+2g(1)=ae(1)\partial,$$
$$ag(2)(2-\partial)+2g(1)=a^2e(2)(3-2\partial)\partial+ae(1)\partial,$$
$$3ag(3)(1-\partial)+2g(2)=ae(2)\partial,$$
$$ag(3)(3-2\partial)+2g(2)=a^2e(3)(4-3\partial)\partial+ae(2)\partial,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2g(n)=ae(n)\partial.$$

On en tire par l'élimination

$$g(1)=-\frac{2-\partial}{1-\partial},\ e(1)=-\frac{1}{a(1-\partial)},$$
$$g(2)=\frac{4-3\partial}{2a(1-\partial)^2},\ e(2)=\frac{4-3\partial}{2a^2(1-\partial)^2(3-2\partial)},$$
$$g(3)=-\frac{(4-3\partial)(6-5\partial)}{2.3a^3(1-\partial)^3(3-2\partial)},$$
$$e(3)=-\frac{6-5\partial}{2.3a^3(1-\partial)^3(3-2\partial)},\ \&c.$$

& que ∂ doit être une quantité de cette forme $\frac{2n}{2n-1}$, n étant un nombre entier positif.

Lorsque $A=0$ & $M=1$, on a $B=-1$, & on peut supposer

$$N=e(1)(ax+b)^{-\partial-1},$$
$$P=e(2)(ax+b)^{-2(\partial-1)},\ \&c.$$
$$C=g(2)(ax+b)^{-\partial+1},\ \&c.$$

ce qui change nos équations en celles-ci:

$$ae(1)(1-\partial)+1=0,$$
$$ag(2)(1-2\partial)-2=ae(1)\partial,$$

Digitized by Google

$$ag(2)(1-\partial)-2=2a^2e(2)(1-\partial)\partial + ae(1)\partial,$$

$$ag(3)(2-3\partial)+2g(2)=ae(2)\partial,$$

$$2ag(3)(1-\partial)+2g(2)=3a^2e(3)(1-\partial)\partial+ae(2)\partial,$$

$$ag(4)(3-4\partial)+2g(3)=ae(3)\partial,$$

$$3ag(4)(1-\partial)+2g(3)=4a^2e(4)(1-\partial)\partial+ae(3)\partial,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2g(n)=ae(n)\partial.$$

Il eſt facile d'en tirer

$$e(1)=-\frac{1}{a(1-\partial)},$$

$$g(2)=\frac{2-3\partial}{a(1-\partial)(1-2\partial)},$$

$$e(2)=\frac{2-3\partial}{2a^2(1-\partial)^2(1-2\partial)},$$

$$g(3)=-\frac{4-5\partial}{2a^2(1-\partial)^2(1-2\partial)},$$

$$e(3)=-\frac{4-5\partial}{2.3a^3(1-\partial)^3(1-2\partial)},\ \&c.$$

& que ∂ doit être une quantité telle que $\frac{2n}{2n+1}$, où n eſt un nombre entier poſitif. Il ſuit de ce qui précède que ſi X eſt une quantité de cette forme $(ax+b)^{\frac{2n}{2n\pm1}}$, l'équation des cordes vibrantes a pour intégrale finie complète,

$$z=M(f:s+\varphi:t)+N(f':s+\varphi':t)+\ldots\ldots\ldots\ldots+U(f^{n'}:s+\varphi^{n'}:t).$$

(8.) Si z devoit renfermer des termes où la fonction

arbitraire fût embarraſſée du ſigne intégral ; s'il devoit renfermer le terme $R \int S\, d\, s\, f : s$, on repréſenteroit par $G \int H\, d\, s\, f : s$ celui qui devroit entrer dans V. Partant, ſoit

$$V = G \int H\, d\, s\, f : s + A f : s + B f' : s + \&c.$$

$$\frac{dV}{ds} = \frac{dG}{ds} \int H\, d\, s\, f : s + A\, 1\, f : s + B\, 1 f' : s + \&c.$$

$$\zeta = R \int S d s f : s + M f : s + N f' : s + \&c.$$

$$\frac{d\zeta}{ds} = \frac{dR}{ds} \int S\, d\, s\, f : s + M\, 1\, f : s + N\, 1 f' : s + \&c.$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{dR}{dt} \int S\, d\, s\, f : s + R \int \frac{dS}{dt} d\, s\, f : s + M 2 f : s + N 2 f' : s + \&c.$$

à cauſe de $(V) = \frac{dV}{ds}\ (s)$, les équations du $n.^{o}$ 5 donneront

$$\sigma p = m \gamma \varsigma \Lambda^{2} R \int S\, d\, s\, f : s - (\pi G + \Lambda \gamma (s) \frac{dG}{ds}) \int H d s f : s + A 2 f : s + B\, 2 f' : s + \&c.$$

$$\sigma q = m^{2} \alpha \varsigma \Lambda^{2} R \int S d s f : s + (\omega G - \Lambda \alpha m (s) \frac{dG}{ds}) \int H d s f : s + A 3 f : s + B\, 3 f' : s + \&c.$$

mais on a auſſi

$$p = \frac{dR}{dy} \int S d s f : s + \frac{dt}{dy} R \int \frac{dS}{dt} d s f : s + M 3 f : s + N 3 f' : s + \&c.$$

$$q = \frac{dR}{dx} \int S d s f : s + \frac{dt}{dx} R \int \frac{dS}{dt} d s f : s + M 4 f : s + N 4 f' : s + \&c.$$

Il ſera donc facile de former ces deux équations

$$R\, 1 \int S d s f : s - \frac{dt}{dy} \sigma R \int \frac{dS}{dt} d s f : s - G\, 1 \int H d s f : s = A\, 5 f : s + \&c.$$

$$R2\int S ds f:s - \frac{dt}{dx}\sigma R\int\frac{dS}{dt}\,ds f:s + G2\int H ds f:s = M5 f:s + \&c.$$

dans lesquelles on a fait, pour abréger,

$$\pi G + \Lambda\gamma(s)\frac{dG}{ds} = G1,$$

$$m\gamma\varrho\Lambda^2 R - \sigma\frac{dR}{dy} = R1,$$

$$\omega G - \Lambda\alpha m(s)\frac{dG}{ds} = G2,$$

$$m^2\alpha\varrho\Lambda^2 R - \sigma\frac{dR}{dx} = R2.$$

(9.) On en tirera, en éliminant $\int H ds f:s$, & faisant, pour abréger,

$$\frac{R1G2 + R2G1}{\sigma R\left(G2\frac{dt}{dy} + G1\frac{dt}{dx}\right)} = \gamma 1,$$

$$\gamma 1\int S ds f:s - \int\frac{dS}{dt}\,ds f:s = M6 f:s + \&c.$$

Au moyen de celle-ci, on aura $\int S ds f:s$ en quantités débarrassées du signe intégral, à moins que $\frac{d\gamma 1}{ds}$ ne soit nul; donc $\gamma 1$ ne doit pas renfermer s. On le fera passer sous le signe intégral, & l'équation précédente deviendra

$$\int\left(\gamma 1 S - \frac{dS}{dt}\right)ds f:s = M6 f:s + \&c:$$

or $e^{-\int\gamma 1\,dt}\left(\gamma 1 S - \frac{dS}{dt}\right)$ est la différentielle de $-Se^{-\int\gamma 1\,dt}$ prise par rapport à t & divisée par dt; ayant donc multiplié les deux membres de la dernière équation par $e^{-\int\gamma 1\,dt}$, on l'intégrera, & on aura

$$e^{-\int\gamma 1\,dt}\int S ds f:s = \int e^{-\int\gamma 1\,dt} M6\,dt.f:s + \&c.$$

Celle-ci donnera $\int S ds f:s$ en quantités délivrées du signe

intégral, toutes les fois que $G2\,\frac{dt}{dy} + G1\,\frac{dt}{dx}$ ne ſera pas nul; & lorſqu'il ſera nul, on aura une équation de cette forme,

$$(R1G2 + R2G1)\int Sdsf:s = A6f:s + \&c.$$

qui donnera $\int Sdsf:s$ en quantités délivrées du ſigne intégral, à moins que $R1G2 + R2G1$ ne ſoit nul auſſi : il eſt donc néceſſaire de former ces deux équations

$$G2m + G1 = 0, R1G2 + R2G1 = 0,$$

deſquelles on tire $R1 - mR2 = 0$.

Cette dernière équation ſera facilement changée en celle-ci,

$$\frac{1}{R}\frac{dR}{ds} = (\tau)\ldots\ldots\frac{\gamma - \alpha m^2}{\varphi(s)}\,m\varphi\Lambda^2,$$

qui, étant intégrée, donne $R = e^{\int\tau ds}\varphi:t$.

Il ſuit de-là, que quand l'intégrale doit contenir le terme $R\int Sdsf:s$, la partie de la valeur de z, dont il s'agit, renferme une fonction arbitraire de t, outre celle de s, & que par conſéquent elle peut être priſe pour l'intégrale complète. On parviendroit au même réſultat, quel que fût le nombre des termes affectés du ſigne intégral & le nombre de ces ſignes dans chaque terme; donc, ſi l'intégrale complète eſt poſſible, en termes finis, on doit la trouver délivrée du ſigne intégral relativement à l'une ou à l'autre des fonctions arbitraires. M. de la Place a, le premier, fait cette remarque importante, dans les Mémoires de l'Académie, pour l'année 1773.

(10.) Nous prendrons, pour ſecond exemple, les équations aux différences partielles du troiſième ordre, par rapport auxquelles les équations (1) & (2) deviennent

$$\Lambda\alpha m(p + \lambda q + \mu r) + V + \theta 1 = 0,$$
$$-\omega p - \pi q - \varpi r + \Lambda m(\gamma''p' + \delta''q' + \varsigma\zeta) = (V).$$

Ayant fait, pour abréger,

Digitized by Google

$$\frac{dN}{dy} + M\frac{ds}{dy} = N1, \frac{dP}{dy} + N\frac{ds}{dy} = P1, \&c.$$

$$\frac{dN}{dx} + M\frac{ds}{dx} = N2, \frac{dP}{dx} + N\frac{ds}{dx} = P2, \&c.$$

$$\frac{dN1}{dy} + \frac{dM}{dy}\frac{ds}{dy} = N3, \frac{dP1}{dy} + N1\frac{ds}{dy} = P3, \&c.$$

$$\frac{dN1}{dx} + \frac{dM}{dy}\frac{ds}{dx} = N4, \frac{dP1}{dx} + N1\frac{ds}{dx} = P4, \&c.$$

$$\frac{dN2}{dx} + \frac{dM}{dx}\frac{ds}{dx} = N5, \frac{dP2}{dx} + N2\frac{ds}{dx} = P5, \&c.$$

de $z = Mf{:}s + Nf'{:}s + Pf''{:}s + \ldots\ldots + Uf^{n-1}{:}s + W$,

on tire

$$p' = \frac{dM}{dy} f{:}s + N1f'{:}s + \ldots\ldots + U1f^{n-1}{:}s + U\frac{ds}{dy}f^{(n+1.)1}{:}s + \frac{dW}{dy},$$

$$q' = \frac{dM}{dx} f{:}s + N2f'{:}s + \ldots\ldots + U2f^{n-1}{:}s + U\frac{ds}{dx}f^{(n+1.)1}{:}s + \frac{dW}{dx},$$

$$p = \frac{d^2M}{dy^2} f{:}s + N3f'{:}s + \ldots\ldots + U3f^{n-1}{:}s + (\frac{ds}{dy}U1 + \frac{d.U\frac{ds}{dy}}{dy})f^{(n+1.)1}{:}s + U(\frac{ds}{dy})^2 f^{(n+2.)1}{:}s + \frac{d^2W}{dy^2},$$

$$q = \frac{d^2M}{dydx} f{:}s + N4f'{:}s + \ldots\ldots + U4f^{n-1}{:}s + (\frac{ds}{dx}U1 + \frac{d.U\frac{ds}{dy}}{dx})f^{(n+1.)1}{:}s + U\frac{ds}{dy}\frac{ds}{dx}f^{(n+2.)1}{:}s + \frac{d^2W}{dydx},$$

Digitized by Google

$$r = \frac{d^n M}{dz^n} f:s + N5f':s + \ldots\ldots + U5f^{n-1}:s$$

$$+ \left(\frac{ds}{dz} U2 + \frac{d.U\frac{ds}{dz}}{dz}\right) f^{(n+1).1}:s$$

$$+ U\left(\frac{ds}{dz}\right)^n f^{(n+2).1}:s + \frac{d^n W}{dz^n}.$$

(11.) Nous ferons

$$V = Af:s + Bf':s + Cf'':s$$

$$+ \ldots\ldots + Kf^{n-1}:s + Lf^{(n+1).1}:s + \Gamma;$$

c'eſt-à-dire, que nous lui donnerons un terme de plus qu'à z; nous lui en donnerions deux, ſi l'équation étoit du quatrième ordre, & ainſi de ſuite: partant

$$(V) = (A)f:s + [(B) + A(s)]f':s$$

$$+ \ldots\ldots + [(K) + I(s)]f^{n-1}:s$$

$$+ [(L) + K(s)]f^{(n+1).1}:s$$

$$+ L(s)f^{(n+2).1}:s + (\Gamma).$$

On aura donc, pour déterminer A, M, B, N..... K, U, Γ, W, les équations du ſecond ordre

$$\Lambda\alpha m\left(\frac{d^2 M}{dy^2} + \lambda\frac{d^2 M}{dy\,dz} + \mu\frac{d^2 M}{dz^2}\right) + A = 0,$$

$$\omega\frac{d^2 M}{dy^2} + \pi\frac{d^2 M}{dy\,dz} + \varpi\frac{d^2 M}{dz^2}$$

$$- \Lambda m\left(\gamma''\frac{dM}{dy} + \delta''\frac{dM}{dz} + \varrho M\right) + (A) = 0,$$

$$\Lambda\alpha m(N3 + \lambda N4 + \mu N5) + B = 0,$$

$$\omega N3 + \pi N4 + \varpi N5 - \Lambda m(\gamma''N1 + \delta''N2 + \varrho N)$$

$$+ (B) + A(s) = 0,$$

.....

$$\Lambda\alpha m(U3 + \lambda U4 + \mu U5) + K = 0,$$

Digitized by Google

$$\omega U_3 + \pi U_4 + \varpi U_5 - \Lambda m$$
$$\left(\gamma'' U_1 + \delta'' U_2 + \varsigma U\right) + (K) + I(s) = 0,$$
$$\Lambda\alpha m\left(\frac{d^2w}{dy^2} + \lambda\frac{d^2w}{dy\,dx} + \mu\frac{d^2w}{dx^2}\right) + \Gamma + \theta_1 = 0,$$
$$\omega\frac{d^2w}{dy^2} + \pi\frac{d^2w}{dy\,dx} + \varpi\frac{d^2w}{dx^2}$$
$$- \Lambda m\left(\gamma''\frac{dw}{dy} + \delta''\frac{dw}{dx} + \varsigma w\right) + (\Gamma) = 0.$$

On aura de plus ces quatre équations

$$\Lambda\alpha m\left[\frac{ds}{dy}U_1 + \frac{d.U\frac{ds}{dy}}{dy} + \lambda\left(\frac{ds}{dx}U_1 + \frac{d.U\frac{ds}{dy}}{dx}\right)\right.$$
$$\left. + \mu\left(\frac{ds}{dx}U_2 + \frac{d.U\frac{ds}{dx}}{dx}\right)\right] + L = 0,$$
$$\omega\left(\frac{ds}{dy}U_1 + \frac{d.U\frac{ds}{dy}}{dy}\right) + \pi\left(\frac{ds}{dx}U_1 + \frac{d.U\frac{ds}{dy}}{dx}\right)$$
$$+ \varpi\left(\frac{ds}{dx}U_2 + \frac{d.U\frac{ds}{dx}}{dx}\right) - \Lambda m\left(\gamma''\frac{ds}{dx}\right.$$
$$\left. + \delta''\frac{ds}{dx}\right)U + (L) + K(s) = 0,$$
$$\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 + \lambda\frac{ds}{dy}\,\frac{ds}{dx} + \mu\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 0,$$
$$\omega\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 + \pi\frac{ds}{dy}\,\frac{ds}{dx} + \varpi\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 + L(s) = 0;$$

dont la troisième, qui n'eſt autre que

$$\alpha(mm')^2 - \gamma mm' - \delta(m + m') = 0,$$

eſt toujours vraie par la nature de l'équation du troiſième degré, dont m & m' ſont deux racines; il n'y a donc effectivement que deux équations de condition, pour que les ſuppoſitions que nous avons faites puiſſent avoir lieu.

Digitized by Google

(12.) Si l'équation du troiſième ordre étoit

$$\frac{d^3\zeta}{dx^3} + a\frac{d^3\zeta}{dx^2dy} + b\frac{d^3\zeta}{dxdy^2} + c\frac{d^3\zeta}{dy^3} + \frac{1}{u}\left(a'\frac{d^2\zeta}{dx^2} + b'\frac{d^2\zeta}{dxdy} + c'\frac{d^2\zeta}{dy^2}\right) + \frac{1}{u^2}\left(e\frac{d\zeta}{dx} + f\frac{d\zeta}{dy}\right) + \frac{g\zeta}{u^3} = 0,$$

où $a, b, c, a', b', c', e, f, g$ ſont des conſtantes & $u = hx + iy, h, i$ étant auſſi conſtans; on auroit m, m', m'' conſtans, $t = my + x$, $s = m'y + x$, $r = m''y + x$, $(s) = m' - m$.

Ayant fait $\Lambda = -1$, on ſuppoſeroit

$$M = e(1)u^3, N = e(2)u^{3+1} \ldots U = e(n+1)u^{3+n},$$
$$A = g(1)u^{3-2}, B = g(2)u^{3-1} \ldots K = g(n+1)u^{3+n-2},$$
$$L = g(n+2)u^{3+n-1};$$

& par ces ſubſtitutions, les équations qu'il s'agiroit de réſoudre deviendroient

$$cm\partial.(\partial - 1)(i^3 + \lambda ih + \mu h^2)e(1) = g(1),$$
$$[m\partial.(\partial - 1)(c'i^3 + b'ih + a'h^2) + m\partial(fi + eh) + mg]e(1) = (hm - i)(\partial - 2)g(1),$$
$$(i^3 + \lambda ih + \mu h^2)(\partial + 1)\partial e(2) + [(2i + \lambda h).m^3 + \lambda i + 2\mu h]\partial e(1) = \frac{g(2)}{cm},$$

$$[(c'i^3 + b'ih + a'h^2)(\partial + 1)\partial + (fi + eh)(\partial + 1) + g]e(2) + \{[2(c'i + b'h).m' + b'i + 2a'h]\partial + fm' + e\}e(1) = \frac{hm - i}{m}(\partial - 1)g(2) + \frac{m - m'}{m}g(1),$$

$$(i^3 + \lambda ih + \mu h^2)(\partial + 1)(\partial + 2)e(3) + [(2i + \lambda h).m'' + \lambda i + 2\mu h](\partial + 1)e(2) + (m''^3 + \lambda m'' + \mu)e(1) = \frac{g(3)}{cm},$$

$$[(c'i^2 + b'ih + a'h^2)(\partial + 1)(\partial + 2) + (fi + eh)(\partial + 2) + g]e(3) + \{[(2c'i + b'h).m' + b'i + 2a'h](\partial + 1) + fm' + e\}e(2) + (c'm'^2 + b'm' + a')e(1) = \frac{hm - i}{m}\partial g(3) + \frac{m - m'}{m} g(2),$$

$$(i^2 + \lambda ih + \mu h^2)(\partial + 2)(\partial + 3)e(4) + [(2i + \lambda h).m' + \lambda i + 2\mu h](\partial + 2)e(3) + (m'^2 + \lambda m' + \mu)e(2) = \frac{g(4)}{me},$$

$$[(c'i^2 + b'ih + a'h^2)(\partial + 2)(\partial + 3) + (fi + eh)(\partial + 3) + g]e(4) + \{[(2c'i + b'h).m' + b'i + 2a'h](\partial + 2) + fm' + e\}e(3) + (c'm'^2 + b'm' + a')e(2) = \frac{hm - i}{m}(\partial + 1)g(4) + \frac{m - m'}{m} g(3), \text{ \&c.}$$

dont les deux premières donneront $\frac{e(1)}{g(1)}$ & ∂ par une équation du troisième degré; les autres serviront à trouver $e(2)$, $g(2)$, &c. Quant aux conditions d'intégrabilité, elles seront renfermées dans celles-ci

$$[(2i + \lambda h).m' + \lambda i + 2\mu h](\partial + n)e(n + 1) + (m'^2 + \lambda m' + \mu)e(n) = \frac{c'm'^2 + b'm' + a'}{c(m - m')},$$

$$\{[(2c'i + b'h).m' + b'i + 2a'h](\partial + n) + fm' + e\}e(n + 1) + (c'm'^2 + b'm' + a')[e(n) - \frac{hm - i}{m - m'}(\partial + n - 1)] = \frac{m - m'}{m} g(n + 1).$$

(13.) Il nous reste à discuter le cas où z pourroit renfermer des termes dans lesquels la fonction arbitraire seroit embarrassée du signe intégral. Si, par exemple,

$$z = Rf Sdsf:s + Mf:s + \text{\&c.}$$

on aura

$$p' = \frac{dR}{dy}\int S\,ds f:s + \frac{dt}{dy}R\int\frac{dS}{dt}\,ds f:s + M3f:s + \&c.$$

$$q' = \frac{dR}{dx}\int S\,ds f:s + \frac{dt}{dx}R\int\frac{dS}{dt}\,ds f:s + M4f:s + \&c.$$

$$p = \frac{d^2R}{dy^2}\int S\,ds f:s + \left(2\frac{dR}{dy}\frac{dt}{dy} + R\frac{d^2t}{dy^2}\right)\int\frac{dS}{dt}\,ds f:s + R\left(\frac{dt}{dy}\right)^2\int\frac{d^2S}{dt^2}\,ds f:s + m1f:s + \&c.$$

$$q = \frac{d^2R}{dydx}\int S\,ds f:s + \left(\frac{dR}{dy}\frac{dt}{dx} + \frac{dR}{dx}\frac{dt}{dy} + R\frac{d^2t}{dydx}\right)\int\frac{dS}{dt}\,ds f:s + R\frac{dt}{dy}\frac{dt}{dx}\int\frac{d^2S}{dt^2}\,ds f:s + m2f:s + \&c.$$

$$r = \frac{d^2R}{dx^2}\int S\,ds f:s + \left(2\frac{dR}{dx}\frac{dt}{dx} + R\frac{d^2t}{dx^2}\right)\int\frac{dS}{dt}\,ds f:s + R\left(\frac{dt}{dx}\right)^2\int\frac{d^2S}{dt^2}\,ds f:s + m3f:s + \&c;$$

& faisant, pour abréger,

$$\frac{d^2R}{dy^2} + \lambda\frac{d^2R}{dydx} + \mu\frac{d^2R}{dx^2} = R1,$$

$$2\frac{dR}{dy}\frac{dt}{dy} + R\frac{d^2t}{dy^2} + \lambda\left(\frac{dR}{dy}\frac{dt}{dx} + \frac{dR}{dx}\frac{dt}{dy} + R\frac{d^2t}{dxdy}\right) + \mu\left(2\frac{dR}{dx}\frac{dt}{dx} + R\frac{d^2t}{dx^2}\right) = S1,$$

$$\left(\frac{dt}{dy}\right)^2 + \lambda\frac{dt}{dy}\frac{dt}{dx} + \mu\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = T1,$$

$$\varpi\,\frac{d^2R}{dy^2} + \pi\frac{d^2R}{dydx} + \varpi\frac{d^2R}{dx^2} - m\Lambda\left(\gamma''\frac{dR}{dy} + \delta''\frac{dR}{dx} + \varsigma R\right) = R2,$$

$$\varpi\left(2\frac{dR}{dy}\frac{dt}{dy} + R\frac{d^2t}{dy^2}\right) + \pi\left(\frac{dR}{dy}\frac{dt}{dx} + \frac{dR}{dx}\frac{dt}{dy} + R\frac{d^2t}{dydx}\right) + \varpi\left(\frac{dR}{dx}\frac{dt}{dx} + R\frac{d^2t}{dx^2}\right) - m\Lambda\left(\gamma''\frac{dt}{dy} + \delta''\frac{dt}{dx}\right)R = S2,$$

Digitized by Google

$\varpi\left(\frac{dt}{dy}\right)^2 + \pi\frac{dt}{dy}\frac{dt}{dz} + \varpi\left(\frac{dt}{dz}\right)^2 = T2,$

les deux équations

$$\Lambda\alpha m\,(R1\int S ds f:s + S1\int\frac{dS}{dt}\,ds f:s + RT1\int\frac{d^2S}{dt^2}\,ds f:s) + G\int H ds f:s = m4 f:s + \&c.$$

$$R2\int S\,ds f:s + S2\int\frac{dS}{dt}\,ds f:s + RT2\int\frac{d^2S}{dt^2}\,ds f:s + \frac{dG}{dt}(s)\int H ds f:s = m5 f:s + \&c.$$

desquelles on tirera, en éliminant $\int H ds f:s$ & faisant, pour abréger, $\frac{\Lambda\alpha m(t)}{G}\frac{dG}{dt} = b$,

$$(bR1 - R2)\int S ds f:s + (bS1 - S2)\int\frac{dS}{dt}\,ds f:s + (bT1 - T2)R\int\frac{d^2S}{dt^2}\,ds f:s = m6 f:s + \&c.$$

(14.) Si $bT1 - T2$ n'est pas nul, en faisant pour abréger,

$$\frac{bR1 - R2}{R(bT1 - T2)} = V1,\quad \frac{bS1 - S2}{R(bT1 - T2)} = V2;$$

on aura

$$V1\int S ds f:s + V2\int\frac{dS}{dt}\,ds f:s + \int\frac{d^2S}{dt^2}\,ds f:s = m7 f:s + \&c.$$

& différenciant par rapport à s,

$$\frac{dV1}{ds}\int S ds f:s + \frac{dV2}{ds}\int\frac{dS}{dt}\,ds f:s = m8 f:s + \&c.$$

Si $\frac{dV2}{ds}$ n'est pas nul, on tirera de celle-ci $\int S ds f:s$ en quantités délivrées du signe intégral, à moins que $\frac{dV1}{ds}:\frac{dV2}{ds}$, que nous ferons $= \sigma 1$, ne renferme point s. On mettra $\sigma 1$ sous le signe, & ayant intégré par rapport à t, on aura

Digitized by Google

$\int S ds f:s$ en quantités délivrées du ſigne intégral; ce qui ne pouvant être par l'hypothèſe, il faut néceſſairement que $\frac{dV_2}{ds}$ ſoit nul. Mais l'équation qui précède donnera le même réſultat, à moins que $\frac{dV_1}{ds}$ ne ſoit nul: donc V_1 & V_2 ne doivent pas renfermer s, & on pourra les faire paſſer ſous le ſigne, d'où reſultera cette équation,

$$\int \left(\frac{d^2 S}{dt^2} + V_2 \frac{dS}{dt} + V_1 S\right) ds f:s = m 7 f:s + \&c.$$

Or θ étant donné par

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{d.V_2\theta}{dt} + V_1\theta = 0,$$

on a, pour l'intégrale de

$$\left(\frac{d^2 S}{dt^2} + V_2 \frac{dS}{dt} + V_1 S\right)\theta dt,$$

la quantité ſuivante:

$$\theta \frac{dS}{dt} + \left(V_2\theta - \frac{d\theta}{dt}\right) S;$$

donc l'équation dont il s'agit deviendra

$$\int \left[\theta \frac{dS}{dt} + \left(V_2\theta - \frac{d\theta}{dt}\right) S\right] ds f:s = \int \theta m 7 dt f:s + \&c.$$

qui, étant intégrée une ſeconde fois par rapport à t, donnera $\int S ds f:s$ en quantités délivrées du ſigne intégral: donc $bT_1 - T_2$ doit être nul; & comme on démontrera, de la même manière, que $bS_1 - S_2$, $bR_1 - R_2$ doivent être nuls auſſi, on aura trois équations que nous pourrons écrire comme il ſuit:

$$bT_1 - T_2 = 0,\ bR_1 - R_2 = 0,\ b(S_1 + tR_1) - S_2 - tR_2 = 0.$$

(15.) Ces équations, ou celles-ci,

$$(b - \omega)m^3 + (b\lambda - \pi)m + b\mu - \varpi = 0,$$

Digitized by Google

$$(b-\omega)\frac{d^2R}{dy^2}+(b\lambda-\pi)\frac{d^2R}{dydx}+(b\mu-\varpi)\frac{d^2R}{dx^2}$$
$$+m\Lambda\left(\gamma^{11}\frac{dR}{dy}+\delta^{11}\frac{dR}{dx}+\varsigma R\right)=0,$$

$$(b-\omega)\frac{d^2.Rt}{dy^2}+(b\lambda-\pi)\frac{d^2.Rt}{dydx}+(b\mu-\varpi)\frac{d^2.Rt}{dx^2}$$
$$+m\Lambda\left(\gamma^{11}\frac{d.Rt}{dy}+\delta^{11}\frac{d.Rt}{dx}+\varsigma Rt\right)=0,$$

ſont voir que quelle que ſoit la valeur de R qui doit ſatisfaire aux conditions qu'elles renferment, ſi on la repréſente par u, $R=u\varphi:t$ y ſatisfera auſſi. Il eſt donc clair que ſi l'intégrale complète eſt poſſible en termes finis, on l'aura toujours délivrée du ſigne intégral, relativement à deux des trois fonctions arbitraires qu'elle doit renfermer; il n'eſt pas moins clair qu'on ne peut pas la ſuppoſer abſolument délivrée de ce ſigne, ſans diminuer la généralité des ſuppoſitions. Généralement ſi l'intégrale complète d'une équation linéaire de l'ordre n eſt poſſible en termes finis, on l'aura toujours délivrée du ſigne intégral, relativement à $n-1$ des fonctions arbitraires qu'elle doit renfermer; mais on ne pourra pas la ſuppoſer abſolument délivrée de ce ſigne, ſans diminuer la généralité de la ſolution.

Digitized by Google

MÉMOIRE
SUR L'ILE DE FRISLANDE,

Par M. BUACHE.

Lû le 9 Juillet 1785.

JE me propoſe de démontrer, dans ce Mémoire, l'exiſtence & la véritable poſition d'une iſle que la géographie moderne a réformée & exclue des Cartes, après l'y avoir admiſe pendant près de trois cents ans, & l'y avoir même repréſentée avec des détails aſſez conſidérables.

On a eu connoiſſance de l'île de Friſlande, vers la fin du quatorzième ſiècle, par les lettres & mémoires de deux frères Vénitiens, de la famille des Zeni, qu'on dit avoir abordé dans cette iſle, & y avoir été retenus par un Prince du pays. Nous avons, dans la collection de Ramuſio, au *tome II*, une relation abrégée de leurs voyages & de leurs découvertes, tirée de leurs lettres & mémoires, & publiée par un de leurs deſcendans. Nous avons auſſi, dans une édition italienne de Ptolémée, publiée par Girolamo Ruſcelli *(Veniſe, 1561*, in 4.°), la copie d'une carte originale de ces mêmes voyages & découvertes, qui fut trouvée parmi les lettres des deux frères Zeni, & miſe au jour en même temps que la relation de leurs expéditions, pour en faciliter l'intelligence.

Si l'île de Friſlande n'exiſtoit pas, comme l'a prétendu Laët, dans ſon Traité de l'origine des Américains, & comme on pourroit être tenté de le croire, après la réforme qui en a été faite par les derniers Géographes, les voyages des Zeni ſeroient une pure fiction; leur relation ne pourroit être regardée que comme un roman, ainſi que la carte qui l'accompagne; & on ne pourroit en tirer aucun fruit, ni même les citer dans une diſcuſſion ſérieuſe. D'un autre côté, ſi les voyages des Zeni étoient

Digitized by Google

véritables & leur relation authentique, comme l'ont prétendu pluſieurs ſavans d'Italie plus à portée que Laët d'être inſtruits ſur ce point, l'île de Friſlande auroit exiſté réellement; elle exiſteroit même encore, du moins en partie, puiſqu'aucune hiſtoire ne parle de révolution qui ait pu l'anéantir; & il y auroit lieu de croire qu'on pourroit en trouver quelques veſtiges. Ce ſont ces conſidérations qui m'ont engagé dans les recherches que je vais ſoumettre au jugement de l'Académie. Je deſirois ſur-tout pouvoir rendre utiles la relation & la carte des Zeni, qui me paroiſſoient devoir répandre quelque jour ſur l'hiſtoire des découvertes & de la population.

On voit l'île de Friſlande ſur des cartes manuſcrites de Texéira, ſur les cartes gravées de Mercator, Blaeu, Dudley, Bertius, Coronelli & autres principaux Géographes des deux derniers ſiècles: elle y eſt placée dans le ſud-oueſt de l'Iſlande, aſſez près du Groenland, & repréſentée ſur toutes comme une terre bien connue & d'une étendue conſidérable. M. Deliſle la marquoit encore en 1714 & 1720 ſur ſes Hémiſphères, mais figurée comme une terre peu connue & dont on n'a qu'une idée vague: il la nomme *Friſlande* dans ſon Hémiſphère ſeptentrional de 1714, & *Terre de Bus*, ci-devant *Friſlande*, dans ſon Hémiſphère occidental de 1720. M. Danville, n'admettant dans ſes cartes que des connoiſſances certaines, en a exclu l'île de Bus & toute idée de Friſlande. Enfin, dans une carte réduite des *Mers du nord*, publiée par M.rs de Verdun, de Borda & Pingré, en 1776, & à la ſuite d'un voyage qui a rectifié nos connoiſſances ſur toutes les parties du globe que ces ſavans ont parcourues, on ne voit aucune trace de Friſlande; & l'île de *Bus* n'y eſt marquée que comme très-douteuſe, & ſeulement ſur l'autorité des cartes de Vankeulen, qui ne la figurent elles-mêmes que comme une terre peu connue.

Il y a, à la vérité, ſur ces cartes de Vankeulen, une légende concernant cette terre, & qui dit: *Cette Terre*

Digitized by Google

a été submergée, & n'a plus aujourd'hui qu'un quart de lieue de circuit, lorsque la mer est grosse ; c'étoit, il y a bien des années, une grande île nommée Frislande, qui avoit bien 100 milles de circuit, & sur laquelle il y avoit plusieurs villages : mais cette légende n'est elle-même fondée que sur une conjecture mise en avant par quelques historiens, dans la vue d'expliquer pourquoi l'île de Frislande ne se retrouvoit pas. On avoit cru de même, pendant un temps, que le Groenland avoit été englouti, parce qu'on ne le retrouvoit pas.

À l'occasion de cette légende, qui n'a point échappé aux recherches de M.rs de Verdun, de Borda & Pingré, ces savans nous exposent, dans la relation de leur voyage, leur opinion sur l'île de *Frislande* & sur la terre de *Bus*. Il est dit, au *tome II* de cette relation, *page 359* : « Cette » île de Frislande est réellement représentée comme une » grande île, sur plusieurs cartes de l'Atlas de Mercator, » de l'Arcano del Mare, &c. & cela avec des détails » de villes, de villages, &c. qui persuaderoient presque » que cette île a autrefois existé : nous sommes fort éloignés » de le croire ; mais que cette île ait existé ou non, il » est au moins certain qu'elle n'existe plus. Nous avons » traversé le lieu où elle est placée, sur plusieurs cartes de » l'Arcano del Mare & de Mercator, & nous n'en avons » pas aperçu le plus léger vestige : mais existe-t-il au » moins, sous le nom de *Bus*, une petite partie de cette » île, nous en doutons, parce que nous ne voyons pas » que l'existence de cette île *Bus* soit suffisamment con- » statée ». Telle est l'opinion que des Savans, à qui la Géographie a tant d'obligations, ont pu se former de l'île de Frislande ; & on doit la considérer comme le résultat de l'état actuel de nos connoissances sur ce point.

C'est aussi l'opinion qui avoit été le plus généralement adoptée auparavant, à en juger par le titre d'une carte particulière de Frislande, publiée par le P. Coronelli, géographe de la république de Venise. Ce titre est : *Frislanda*

Digitized by Google

Friſlanda ſcoperta da Nicolo Zeno, patricio Veneto, creduta favoloſa, o nel mare ſommerſa. Coronelli aſſure, d'un autre côté, dans ſon *Iſolario*, que l'on regarde à Veniſe l'hiſtoire de la découverte des Zeni comme une hiſtoire vraie & authentique. En donnant à ſa carte de Friſlande le titre que l'on vient de voir, il aura ſans doute voulu ſe conformer à l'idée qu'on en avoit ailleurs, & qui étoit plus généralement reçue.

La plupart des auteurs ont regardé en effet l'île de Friſlande comme une terre fabuleuſe, parce que, depuis le temps de ſa découverte, elle n'a été retrouvée par aucun des navigateurs qui ont parcouru les mers du nord; parce qu'il n'en eſt pas fait la moindre mention dans les Hiſtoires connues, même dans celle des Souverains à qui on en attribuoit la poſſeſſion; & parce que la ſeule relation qui l'a fait connoître, contient quelques détails qui paroiſſent peu vraiſemblables. Quelques ſavans, qui ont conſidéré avec plus d'attention la relation & les Cartes de cette découverte, n'ont pu ſe perſuader qu'une île, repréſentée avec des détails conſidérables & des noms étrangers à la langue des navigateurs qui en parlent, ne dût être conſidérée que comme une fiction: ils n'ont pu croire non plus que des perſonnes de la première qualité, telles qu'étoient les Zeni à Veniſe, n'euſſent publié qu'un roman, dans une relation qu'ils donnoient comme véritable, & euſſent voulu en impoſer auſſi groſſièrement au public. Ils ont mieux aimé ſuppoſer que l'île de Friſlande, qu'on ne retrouvoit pas, auroit été ſubmergée ou engloutie dans la mer, depuis l'époque de ſa découverte.

Il y a une troiſième opinion, ſuivant laquelle la terre de Friſlande ne ſeroit autre choſe que la partie occidentale de l'Iſlande; mais cette opinion n'a ſervi qu'à fortifier les doutes que l'on avoit ſur l'exiſtence de cette terre, & je ne la cite ici que pour indiquer l'ouvrage dans lequel elle eſt développée, & qui contient d'ailleurs

des observations curieuses sur la question dont il s'agit dans ce Mémoire : ce sont les *Reflessioni geographiche sopra la Terra incognita*, du P. Vitale Terra-Rossa, bénédictin & professeur en l'université de Padoue.

Quelque bien fondée que paroisse l'opinion des auteurs qui croient cette île fabuleuse ou submergée, il s'en faut de beaucoup qu'elle soit sans difficultés, & qu'elle réponde, d'une manière satisfaisante, à toutes les objections qu'on peut former contr'elle; aujourd'hui sur-tout qu'on voit reparoître, dans les découvertes des derniers navigateurs, plusieurs terres ou îles qu'on avoit regardées de même comme très-douteuses, & qu'on avoit exclues en conséquence des cartes modernes : telles sont les îles de *Quiros* & autres anciennes découvertes des Espagnols dans la mer du Sud.

J'observerai d'abord que supposer la submersion totale d'une île aussi grande que celle dont il est ici question, c'est supposer une révolution terrible, dont les effets auroient dû se faire ressentir au loin, & être connus au moins dans les terres ou îles voisines. On nous a conservé les dates & jusqu'aux moindres détails des différens ravages que la mer a faits, depuis l'an 800, sur les îles de Heyligland & de Norstrand, voisines des côtes du Jutland. On nous a conservé de même les dates des principaux événemens qui ont eu lieu en Islande, depuis une longue suite de siècles, & entr'autres des feux qui sont sortis de la mer aux environs de cette île; mais on ne trouve nulle part un seul mot qui ait rapport à la submersion totale de Frislande, laquelle submersion n'auroit pu arriver encore qu'après l'an 1400, ou depuis le commencement du XVe siècle. Supposition pour supposition, il me sembleroit beaucoup plus simple & même plus naturel de supposer une erreur dans les Cartes géographiques, que d'admettre gratuitement une révolution aussi étonnante.

Il me paroîtroit également plus simple & plus naturel

Digitized by Google

de ſuppoſer les cartes en défaut, lorſqu'on ne trouve pas une terre à la place où ces cartes en marquent une, que d'en conclure abſolument que cette terre n'exiſte pas. On ſait que la poſition d'une île qui n'eſt pas fixée par des obſervations aſtronomiques, peut varier conſidérablement, & au point qu'il ſe trouve quelquefois 200 à 300 lieues de différence entre ſa véritable poſition & celle que les cartes lui aſſignent. Les cartes ſont dreſſées en grande partie d'après les journaux des navigateurs, & ſur l'eſtime des pilotes : elles participent donc aux erreurs dont on ſait que cette eſtime eſt ſuſceptible ; & il eſt à remarquer que, dans les premiers temps des grandes navigations, ou à l'époque des premières découvertes, ces erreurs étoient très-conſidérables.

Par une ſuite de ces mêmes erreurs inévitables dans l'eſtime de la route du vaiſſeau, il pouvoit arriver qu'une même île vue par trois navigateurs, fût regardée par chacun d'eux comme une nouvelle découverte, & qu'elle parût enſuite ſur des cartes dans trois différentes poſitions, & ſous trois différens noms. La *Georgie* de Cook, par exemple, nouvellement découverte dans l'océan méridional, eſt la même terre que l'île de *Saint-Pierre*, vue par M. Duclos-Guyot, commandant le vaiſſeau eſpagnol *le Lion*, en 1756. Elle eſt la même encore, autant qu'on peut l'eſtimer, que la *terre de la Roche*, vue par un Officier de ce nom dans le ſiècle dernier, & qu'on avoit réformée dans les nouvelles cartes. On remarque encore que M. le chevalier Hebert, qui traverſa le premier du cap de Horn au cap de Bonne-eſpérance, en 1708, regarda les îles de Triſtan d'Acugna comme un objet de nouvelle découverte : s'eſtimant, à la vue de ces îles, être éloigné d'environ quatre cents lieues de la poſition que ſa carte donnoit aux îles d'Acugna, il crut que c'étoient de nouvelles Iſles, & les nomma en conſéquence *îles Hebert*. C'eſt ainſi ſans doute que ſe ſont multipliées les petites îles, les Roches & les Vigies,

qu'on voit en ſi grand nombre ſur les anciennes cartes ; & qu'une navigation plus éclairée a fait diſparoître en grande partie.

Il eſt évident qu'on ne retrouveroit pas les îles *Hebert*, ſi on les cherchoit ailleurs qu'à la place des îles de Triſtan d'Acugna ; comme on ne trouvera pas vraiſemblablement l'île de *Saint-Pierre*, ni la terre de *la Roche*, ailleurs que dans la Georgie du capitaine Cook ; cependant on n'en conclura pas que ces découvertes ſont fabuleuſes, ou que ces îles ont été ſubmergées. Ce ſont principalement les noms qu'on donne aux îles nouvelles ou réputées nouvelles, qui occaſionnent tant d'erreurs & de confuſion dans la géographie ; & il ſeroit à deſirer que les navigateurs ſe contentaſſent à l'avenir des noms que les îles portent dans le pays même, du moins à l'égard de celles qui ſont habitées. Outre que ce ſeroit un moyen ſûr pour reconnoître dans la ſuite les îles qui auroient déjà été découvertes ; il en réſulteroit encore de nouvelles lumières pour la géographie, en ce que les dénominations des lieux ſont pour la plupart ſignificatives, & ont rapport à la nature des pays ou à quelques productions remarquables. Magellan nous avoit déſigné par leurs véritables noms une partie des Iſles par où il avoit paſſé : on a reconnu les îles des Larrons, au nom de *Juvagana* qu'il avoit indiqué, & qui eſt le même que *Gua-han ;* & on retrouve toutes les autres découvertes de ſon vaiſſeau *la Victoire*, dans celles du capitaine Forreſt.

D'après toutes ces conſidérations, au lieu de ſuppoſer l'île de Friſlande fabuleuſe ou ſubmergée, je ſuppoſerai ſeulement que ſa poſition eſt défectueuſe dans les cartes qui la repréſentent, & ſon nom peut-être altéré ou défiguré dans la relation qui l'a fait connoître. Cette ſuppoſition me paroît d'abord pouvoir expliquer pourquoi cette île n'a été reconnue par aucun navigateur, & pourquoi on n'en trouve aucune mention dans l'hiſtoire ; elle m'autoriſe auſſi à ne pas rejeter comme fabuleuſes la relation & la

Digitized by Google

carte des découvertes des Zeni; & je puis maintenant faire uſage des lumières que j'y entrevois, & qui me paroiſſent conduire à la reconnoiſſance de la terre de Friſlande.

Pour que l'on puiſſe apprécier plus facilement les conſéquences que je déduis de ces deux pièces, je crois devoir rapporter ici un précis de la relation, & mettre ſous les yeux une copie de la carte des Zeni.

Dans la guerre qui s'éleva, en 1377, entre les Vénitiens & les Génois, au ſujet de l'île de Ténédos, Charles Zeni fut nommé Général de l'armée Vénitienne. Il avoit deux frères, Nicolas & Marc-Antoine: Nicolas voyant la guerre finie, réſolut de connoître le monde & de voyager; il fit équiper un vaiſſeau à ſes frais, & paſſa le détroit de Gibraltar, dans le deſſein de viſiter l'Angleterre & les Pays-bas. Après avoir couru durant quelques jours au nord, il eſſuya une tempête qui le pouſſa vers l'île de Friſlande & briſa ſon vaiſſeau ſur la côte: ce voyage ſe fit en 1380. Cette île appartenoit au roi de Norvège; mais un ſeigneur de ce pays, nommé Zichini, venoit d'y deſcendre avec une armée pour en faire la conquête; ce Prince poſſédoit les îles de *Portland*, ſituées au ſud & près de Friſlande, & qui étoient les plus riches & les plus peuplées du pays; il poſſédoit auſſi le duché de *Sorand*, ſitué dans la terre & du côté qui regarde l'Écoſſe: il avoit déjà remporté, l'année précédente, une victoire ſur le roi de Norvége.

Sur le bruit qui ſe répandit bientôt de l'arrivée d'un vaiſſeau étranger dans cette île, Zichini accourut au lieu où il étoit; il parla en latin à Zeni, & ayant appris qu'il étoit Vénitien, il le retira des mains des habitans qui ſe diſpoſoient à lui faire un mauvais parti, & le prit ſous ſa protection, ainſi que tout l'équipage: reconnoiſſant enſuite ſon mérite & ſes talens pour la navigation, il le fit monter ſur ſes vaiſſeaux, & recommanda à ſon Général de ne rien faire ſans ſes conſeils.

L'armée navale ayant tiré à l'oueſt, ſoumit ſans peine

Digitized by Google

quelques îles de peu de considération, entr'autres, *Ledova* & *Ilofe;* elle entra dans un golfe nommé *Sudero*, prit quelques vaisseaux chargés de poissons salés, dans un port de la terre nommé *Saneflol*, & soumit encore d'autres îles. La mer qu'ils parcoururent étoit tellement remplie d'écueils & de sirtes ou bas-fonds, que sans le secours de Zeni, la flotte se seroit perdue cent fois.

En abordant à la ville de *Bondendono*, on apprit que Zichini avoit remporté une victoire complète, qui l'avoit rendu maître de toute l'île : Zichini y vint lui-même quelque temps après, il témoigna beaucoup d'amitié à Zeni, & de-là se rendit à Frisslande, capitale de l'île, pour y faire son entrée. Cette ville est située dans la partie du sud-est & sur un golfe (car cette île en a beaucoup); il y a dans cette ville une si grande abondance de poissons, que les Anglois, les Flamands, les Écossois, les Danois & les Norvégiens y viennent en faire leurs provisions, & apportent par ce commerce beaucoup de richesses dans l'île.

Nicolas Zeni se voyant ainsi retenu & honoré par Zichini, écrivit à Marc-Antoine son frère, de le venir joindre. Celui-ci étant arrivé, Zichini partit avec les deux Zeni, sur une flotte considérable, pour aller attaquer l'*Estlande*, qui est située entre Frisslande & la Norvège. Il avoit déjà commencé à ravager ce pays, quand il apprit que le roi de Norvège s'approchoit de lui : il crut devoir se retirer; mais une tempête qui survint, lui fit perdre une partie de ses vaisseaux, & le reste fut jeté à l'île *Grisland*, qui est assez grande, mais inculte. La flotte du roi de Norvège périt aussi.

Zichini voyant qu'il n'étoit pas loin de l'Islande, qui appartenoit aussi au roi de Norwège, résolut de l'attaquer; mais comme il n'avoit que peu de monde, & que cette île étoit bien gardée, il se contenta de prendre les îles Islandiques de *Talas*, *Broas*, *Iscant*, *Trans*, *Mimant*, *Damberc* & *Bressa*. Il fit construire un fort dans celle de Bressa,

Digitized by Google

dont il donna le gouvernement à Nicolas Zeni; & lui ayant laiſſé quelques vaiſſeaux, il s'en retourna à Friſlande.

Dès le printemps ſuivant, Nicolas Zeni équipa trois vaiſſeaux, dans le deſſein d'aller découvrir de nouveaux pays; & s'étant mis en mer au mois de Juillet, il aborda au Groenland, à l'endroit où étoient bâtis le monaſtère & l'égliſe de Saint Thomas, deſſervie par des Frères Prêcheurs. Ne pouvant ſupporter la rigueur du froid de ce climat, & y étant tombé malade, il revint à l'île de Friſlande, où il mourut bientôt après.

Marc-Antoine ſuccéda à ſon frère dans ſes richeſſes & ſes dignités: il vouloit retourner à Veniſe, mais Zichini le retint, & l'engagea à faire avec lui une expédition dans l'île d'Eſtotiland. Il y avoit vingt-ſix ans que des pêcheurs Friſlandois avoient été pouſſés par une tempête juſqu'à cette île, qui eſt à plus de 1000 milles à l'oueſt de Friſlande: il n'en étoit revenu qu'un ſeul à Friſlande, & c'eſt ſur le rapport qu'il avoit fait de cette île, que Zichini avoit réſolu d'y aller. (On trouve ici, dans la relation, le récit de ce qui étoit arrivé à ces pêcheurs, & les noms de quelques autres terres nouvelles où ils avoient abordé; mais je paſſe ſur ces détails, tant pour abréger, que parce qu'ils ne ſont fondés que ſur le rapport d'un ſeul homme, & n'inſpirent pas le même degré de confiance que le récit des expéditions des Zeni).

Zichini ſe mit en mer avec une armée aſſez conſidérable, & fit route à l'oueſt. Après avoir dépaſſé quelques îles dépendantes de Friſlande, & quelques ſirtes ou basfonds, on aborda à *Ledova*, où l'on reſta ſept jours pour compléter les proviſions néceſſaires. On en partit le 1.er Juillet, & on navigua d'abord avec le vent en poupe; on eſſuya enſuite une tempête qui dura huit jours, & on fut pouſſé vers une île qu'on ne connoiſſoit pas. Les habitans, qui accoururent ſur le rivage, firent entendre à Zichini, que leur île s'appeloit *Icarie*, & leur Roi, *Icare*, comme tous ſes prédéceſſeurs, & qu'ils deſcendoient, à ce qu'ils

Digitized by Google

croyoient, d'un roi d'Écoſſe, qui les avoit menés-là. Ils le prièrent de ne point deſcendre dans leur île, parce que c'étoit une de leurs loix de n'y point laiſſer aborder d'étrangers: ils lui offrirent en même temps de recevoir parmi eux, s'il le vouloit, un homme de ſon équipage, qui leur ſerviroit d'interprète, comme ils en avoient déjà dix de différentes nations, & qui ſeroit traité comme un de leurs concitoyens. Zichini peu ſatisfait de cette réception, voulut deſcendre à terre, mais il ne put en venir à bout, & il fut contraint de paſſer outre.

Il courut de-là ſix jours à l'oueſt avec un vent favorable; le vent ayant enſuite paſſé au ſud, on navigua encore quatre jours & on découvrit enfin la terre. On trouva que ce n'étoit qu'une île, aſſez belle à la vérité, mais habitée par le peuple le plus ſauvage du monde, d'une petite taille, & ſi timide, que d'abord qu'ils voyoient quelqu'un, ils ſe retiroient dans des cavernes. On appela le port où l'on avoit abordé, port de *Trin;* & un cap voiſin, cap de *Trin* *.

Zichini avoit réſolu de bâtir une ville dans cet endroit & d'y laiſſer une colonie. Une partie de ſon équipage paroiſſant mécontente & demandant à s'en retourner, il les renvoya ſous la conduite de Marc-Antoine Zeni, qui fut chargé de cette commiſſion bien malgré lui. Marc-Antoine, pour ſon retour, tira droit à l'eſt, & courut vingt jours dans cette direction ſans voir la terre; il porta enſuite vers le ſud, & cinq jours après il ſe trouva à l'île de *Neome*, ce qui lui fit connoître qu'il avoit dépaſſé l'Iſlande. Ayant pris dans cette île qui étoit ſoumiſe à Zichini, les rafraîchiſſemens dont il avoit beſoin, il en partit & arriva trois jours après à Friſlande.

Telles ſont les circonſtances principales de la relation

* Dans un petit vocabulaire de la langue Cambrique, ou du pays de Galles, que Laët a inſéré dans ſes Obſervations ſur l'origine des Américains, on trouve le mot *Trwyn*, en correſpondance avec celui de *Naſus, Nez*, qui eſt ſouvent employé pour déſigner un cap.

des

des Zeni, & celles qui me paroiſſent propres à faire reconnoître l'île de Friſlande. J'ajouterai ici, d'après les remarques de Ramuſio, ſur cette relation, que tous ces détails ſont tirés des lettres de Nicolas Zeni à ſon frère Marc-Antoine, & de celles de Marc-Antoine à leur autre frère Charles. Après avoir été conſervées ſoigneuſement dans la famille, elles furent publiées dans la ſuite par un Seigneur de cette famille, qui avertit en même temps qu'il en avoit eu beaucoup d'autres; mais que ces lettres & mémoires lui étant tombés entre les mains, pendant qu'il étoit jeune, il les avoit déchirés, ne ſachant pas ce que c'étoit. On voit dans la relation le commencement d'une lettre de Marc-Antoine à ſon frère Charles, dans laquelle il lui mandoit que, pour ce qu'il ſouhaitoit de ſavoir touchant les mœurs des habitans & les animaux de ces pays-là, il en avoit compoſé un livre qu'il eſpéroit porter avec lui; que dans ce livre, il avoit traité de la ſituation des pays, des loix & des coutumes de *Friſlande*, d'*Iſlande*, d'*Eſtlande*, du royaume de *Norwège*, d'*Eſtotiland* & de *Drogium*; qu'il avoit écrit la vie de ſon frère Nicolas, les terres par lui découvertes, & les affaires du Groenland; qu'il avoit auſſi écrit la vie & les expéditions de Zichini, où l'on verroit la découverte des deux côtes du Groenland, & les villes qu'il avoit bâties par-tout; qu'enfin il eſpéroit lui dire de vive voix ce qui manqueroit à ſon livre. Celui des Zeni qui a mis ces lettres au jour, annonce encore qu'il a trouvé parmi ces lettres & mémoires, une ancienne carte à naviguer, toute gâtée & délabrée de vieilleſſe; qu'il a été aſſez heureux pour pouvoir en faire une copie, & qu'il la publie, afin qu'on entende mieux les choſes qu'il rapporte.

Je dois avertir, en finiſſant ce précis de la relation, qu'en paſſant ſous ſilence pluſieurs particularités, dont quelques-unes ont paru peu vraiſemblables & ont excité la critique, je n'ai point cherché à éviter les objections, mais ſeulement à abréger un récit qui pouvoit paroître déplacé ici, mais qui étoit néceſſaire pour l'intelligence de la ſuite

de ce Mémoire. On ſait au reſte, que les premiers qui ont parlé des pays inconnus avant eux, comme du nouveau Mexique, de la Guyane, &c. en ont dit des choſes fort extraordinaires, & que cela n'empêche pas qu'il y ait un nouveau Mexique, une Guyane, &c.

Je vais maintenant expoſer les conſéquences que je crois pouvoir déduire de la relation & de la carte des Zeni, & qui me paroiſſent des données ſuffiſantes pour réſoudre la queſtion qui nous occupe. Je commence par la relation & par les rapports qu'on y voit indiqués entre l'île de Friſlande & les autres terres voiſines, telles que la Norvège, l'Écoſſe, les îles de Schetland, l'Eſtotiland & l'Iſlande.

1.° Il eſt dit que l'île de Friſlande étoit poſſédée par les rois de Norvège, lorſque Nicolas Zeni y aborda en 1380. On connoît, par l'hiſtoire, quelles ont été dans tous les temps les poſſeſſions des Norvégiens au-dehors de la Norvège: ce ſont le Groenland, l'Iſlande, les îles de Fer-oë, de Schetland & les Orcades. Les îles de Schetland & les Orcades ont paſſé ſous la domination des rois d'Écoſſe, par le mariage de Marguerite, fille de Chriſtiern I, roi de Danemarck, avec James III, roi d'Écoſſe; mais toutes les autres ſont reſtées au pouvoir des rois de Norvège & de Danemarck, juſqu'à ce jour. Or, il eſt à remarquer que les îles de *Fer-oë*, qui ſont voiſines de Schetland, & pour le moins auſſi conſidérables qu'elles, ne ſont ici nommées nulle part, ni dans la relation ni ſur la carte des Zeni. Zichini, après avoir fait la conquête de Friſlande, va attaquer l'Eſtlande & l'Iſlande, parce qu'elles appartenoient auſſi au roi de Norvège: il devoit, par la même raiſon, attaquer pareillement les Fer-oë, qui ſe trouvoient d'ailleurs ſur la route, entre l'Eſtlande & l'Iſlande; cependant il n'en eſt pas fait la moindre mention dans cette circonſtance ni ailleurs. Ce ſilence de la relation ſur des îles auſſi étendues que celles de Fer-oë, cette omiſſion, dans la carte ſur-tout, où elle eſt un défaut eſſentiel, ne peuvent ſe concevoir, qu'en ſuppoſant que les îles de Fer-oë ſeroient la même

Digitized by Google

terre que l'île de Friſlande. Je me borne ici à annoncer ce premier réſultat, & à le préſenter ſeulement comme une des données de la queſtion. Avant que d'aller plus loin, je crois devoir prévenir les doutes & les objections que pourroit faire naître l'entrepriſe de Zichini contre les rois de Norvège. On concevra ſans peine comment ce Prince a pu tenter de ſe ſouſtraire à leur domination, & de s'ériger lui-même en ſouverain, ſi on ſe rappelle qu'en l'an 1348, il arriva une grande peſte, connue ſous le nom de *peſte noire*, & qui enleva une grande partie des habitans du Nord. La Norvège & le Danemarck furent, pour ainſi dire, épuiſés; on vit diſparoître tout-à-la-fois les marchands & les matelots qui compoſoient les compagnies du Groenland dans ces deux royaumes; la navigation & le commerce furent interrompus, & les Colonies négligées & preſque abandonnées. On ſait encore qu'à la ſuite de cette peſte, le Groenland a été perdu pendant long-temps, parce qu'on avoit ceſſé d'y envoyer.

2.° En parlant des poſſeſſions de Zichini, à l'époque de l'arrivée des Vénitiens, il eſt dit qu'outre les îles de Portland, ſituées au ſud & près de Friſlande, il étoit encore ſeigneur du duché de Sorand, ſitué dans la terre & du côté qui regarde l'Écoſſe, *Fra terra*, &c. *poſta d'alla banda verſo Scotia*. Il eſt viſible par ces expreſſions, que le duché de Sorand, qui regarde l'Écoſſe, n'en peut être éloigné de 300 lieues, ni ſitué près du Groenland, où les Géographes l'ont placé, & où les navigateurs l'ont cherché en vain. La relation nous indique ici une proximité entre le duché de Sorand & l'Écoſſe, ou du moins un intervalle peu conſidérable & qui n'empêche pas la communication. Or, ce duché de Sorand fait partie de l'île de Friſlande, comme on le voit par la carte des Zeni, & comme l'annonce auſſi la relation, dont il convient de remarquer ici les expreſſions & l'exactitude: elle nous dit que le duché de Sorand eſt dans la terre *Fra terra*, & cela ſignifie qu'il eſt ſitué dans l'île principale ou la

grande terre de Friſlande. On ſait que Pomona ou l'île principale des Orcades, ſe nomme encore *Mainland* ou Terre-ferme, & que la principale des îles de Schetland ſe nomme ſeulement *Mainland*; on pourroit même conclure de cette dénomination ſingulière, employée dans la relation, que la terre de Friſlande auroit été un compoſé de pluſieurs îles, comme les Orcades & les Schetland; & que ſes habitans auroient eu la même langue ou la même manière de déſigner les objets, que ceux de ces dernières îles: & à tous ces traits, on ſeroit tenté de reconnoître la terre de Friſlande dans la terre de Fer-oë, qui eſt un compoſé de pluſieurs îles, comme les Orcades & les Schetland, qui a été originairement peuplée, comme ces autres îles, par des Norvégiens, & qui d'ailleurs n'eſt pas fort éloignée de l'Écoſſe.

3.° La relation nous dit que l'*Eſtlande* eſt ſituée entre Friſlande & la Norvège: on ne peut diſconvenir que cette Eſtlande ne ſoit les îles de Schetland, que l'on nomme autrement dans le pays, *Hitland* ou *Hetland*; or, ſi nous avions à indiquer aujourd'hui la ſituation des îles de Schetland, nous dirions, en conſultant les cartes les plus exactes, que ces îles ſont ſituées entre les îles de Fer-oë & la Norvège. Ce rapport de Friſlande avec l'Eſtlande, nous indique donc encore une proximité entre les deux terres, telle qu'elle exiſte entre les Fer-oë & les Schetland, & telle qu'il faut la ſuppoſer auſſi pour concevoir la marche de Zichini dans ſes courſes ſur les poſſeſſions du roi de Norvège: on a vu que c'eſt par la terre d'Eſtlande qu'il a commencé ſes courſes, ce qui annonce que c'étoit la terre la plus proche de Friſlande. C'eſt ſur un rapport ſemblable, que le ſavant auteur de l'*Hiſtoire des Hommes*, a reconnu la vraie poſition de l'ancienne *Memphis*, capitale de l'Égypte. Pline avoit dit que les pyramides étoient ſituées entre Memphis & le Delta, & l'Hiſtorien en a conclu avec raiſon que Memphis étoit ſituée au ſud des pyramides; tandis que des voyageurs qui avoient été

Digitized by Google

ſur les lieux, la plaçoient directement à l'oueſt des mêmes pyramides.

4.° La diſtance de Friſſlande aux côtes de l'Amérique, telle qu'on peut l'eſtimer d'après la relation, tendroit à éloigner cette île de la poſition que les Géographes lui avoient aſſignée près du Groenland, & à la rapprocher des côtes de l'Europe. Suivant le rapport du pêcheur Friſſlandois qu'on dit avoir abordé à la côte d'Eſtotiland, aujourd'hui le Labrador, il y a plus de 1000 milles de diſtance entre les deux terres; & ſuivant le rapport de Marc-Antoine Zeni, ſur ſon retour du port de *Trin* qu'on voit ſitué, ſur la carte, à l'extrémité ſud du Groenland, vers le cap Farwell, l'île de Friſſlande ſeroit éloignée de la pointe ſud du Groenland, du côté de l'eſt, de plus de vingt jours de navigation. La première diſtance, celle de 1000 milles, eſt évaluée dans la relation même à 200 lieues, & ce ſont ces 200 lieues qu'il faut ſeulement conſidérer ici. Il eſt probable que c'eſt en lieues & non en milles, que le pêcheur Friſſlandois aura indiqué cette diſtance, & que l'évaluation en milles n'aura été ajoutée que dans la ſuite, & relativement à l'uſage reçu en Italie, de compter les eſpaces par milles: or, ces 200 lieues, qu'on doit réputer lieues Norvégiennes ou Danoiſes, répondroient à environ 350 de nos lieues marines, & l'île de Friſſlande ſeroit éloignée d'autant & même plus des côtes de l'Eſtotiland. Il s'en faut encore de 150 lieues que cette diſtance n'égale celle qui nous eſt indiquée par les meilleures cartes, entre les côtes du Labrador & les îles de Fer-oë; mais le pêcheur Friſſlandois peut n'avoir conſervé qu'une eſtime fort vague de ſa route, & il peut ſe faire auſſi qu'il ait indiqué à Zichini une diſtance au-deſſous de la véritable, pour le déterminer plus facilement à aller reconnoître cette terre.

A l'égard de la diſtance qu'on peut déduire de la navigation de Marc-Antoine à ſon retour du port de *Trin*, elle ſeroit de 400 de nos lieues marines, en ſuppoſant ſeulement 20 lieues par jour, & Friſſlande ſeroit éloignée

d'autant de la côte ſud du Groenland. La carte des mers du Nord, de M.rs de Verdun, de Borda & Pingré, n'en donne que 380 du cap Farewel aux îles de Fer-oë. On peut au moins conclure de ces diſtances, que Friſlande doit être plus éloignée du Groenland qu'on ne l'avoit cru, & qu'elle ſe rapproche aſſez de la poſition des îles de Fer-oë.

5.° Il réſulte de la même navigation de Marc-Antoine Zeni à ſon retour du port de *Trin*, que l'île de Friſlande étoit plus orientale que l'Iſlande. Après avoir couru pendant vingt jours à l'eſt, & enſuite cinq jours vers le ſud, il aborda, ſuivant la relation, à l'île de Neome, & il reconnut par-là qu'il avoit dépaſſé l'Iſlande. De l'île de Neome, il ſe rendit en trois jours à Friſlande; ainſi nous nous retrouvons encore ici ramenés vers les îles de Fer-oë, & par une circonſtance qui ne laiſſe aucun lieu de douter.

On voit par la carte des îles de Fer-oë, que je joins ici, que ces îles ſont remplies de golfes, comme l'étoit l'île de Friſlande, ſuivant la relation. On ſait que la mer, autour de ces îles, étoit autrefois extrêmement abondante en poiſſons; que dans tous les temps, la pêche a été la principale occupation de leurs habitans, & qu'aujourd'hui encore leur principal commerce conſiſte en poiſſons ſecs: c'eſt donc encore une terre ſemblable à celle de Friſlande, où, comme on l'a vu ci-devant, les Anglois, les Flamands, les Écoſſois, les Danois & les Norvégiens alloient faire leurs proviſions de poiſſons. On ſait enfin que la navigation eſt auſſi dangereuſe autour des îles de Fer-oë, qu'elle l'étoit, ſuivant la relation, autour de Friſlande. On pourroit trouver encore, dans les autres circonſtances de cette relation, beaucoup d'autres traits de reſſemblance aſſez frappans; mais il me ſuffira, je crois, d'ajouter ici ceux que nous préſente la carte de Friſlande, comparée à la Carte des îles de Fer-oë.

Je remarque d'abord que l'extrémité ſud de l'île de Friſlande ſe trouve placée, ſur la carte originale & ſur

Digitized by Google

toutes les cartes qui font mention de cette île, à la même latitude que l'extrémité ſud des îles de Fer-oë. La pointe ſud de ces îles eſt par 61d 17′ 45″ de latitude, ſuivant les obſervations de M.rs de Verdun, de Borda & Pingré; & la pointe ſud de Friſſlande eſt par 61 degrés moins quelques minutes ſur les anciennes cartes. On ne cherchera point à juſtifier la différence qui paroît entre ces deux réſultats, parce qu'on retrouve par-tout une différence ſemblable entre les nouvelles & les anciennes obſervations. Le rapport de latitude, que nous trouvons ici, peut donc être régardé comme aſſez exact, & venir à l'appui des autres preuves qui ſe ſont offertes d'ailleurs.

Si l'on compare maintenant les détails de la carte de Friſſlande, avec ceux de la carte de Fer-oë, on aperçoit les principaux caps, des golfes, des îles & autres objets remarquables, placés dans le même ordre & ſuivant les mêmes directions, dans l'une & dans l'autre carte. On y voit auſſi un aſſez grand nombre de dénominations ſemblables, & dans les mêmes poſitions, comme ſi l'une de ces cartes eût été dreſſée d'après une deſcription groſſière de l'autre.

On remarque d'abord une petite île, ſous le nom de *Monaco*, à l'extrémité ſud de Friſſlande, & une île ſemblable, avec le nom de *Munck* ou *le Moine*, à l'extrémité ſud des Fer-oë; c'eſt un haut rocher rond, & remarquable, tant à cauſe des écueils qui ſont aux environs, que parce que c'eſt un point de reconnoiſſance: il y a auprès ſix autres rochers qui s'élèvent tant ſoit peu au-deſſus de l'eau, & un courant ou ras de marée fort dangereux.

À la partie du nord-eſt de Friſſlande, on voit deux petites îles nommées l'une *Ibini*, & l'autre *Piglu;* on trouve de même à l'extrémité nord-eſt des Fer-oë une petite île nommée *Biſpen* ou l'Évêque, & une autre à côté, nommée *Fugl-oë. Biſpen* eſt, comme Monaco, un haut rocher rond, & un point de reconnoiſſance pour les navigateurs: *Fugl-oë* eſt la première des îles de Fer-oë du côté du Nord-eſt, &

Digitized by Google

n'eſt éloignée de Biſpen que d'un jet de pierre, ou d'une portée de fuſil au plus.

La partie du nord-oueſt de Friſlande ſe termine par un cap nommé *Spagia*, & la même partie dans les Fer-oë ſe termine par un îlot nommé *Stachen*. À la ſuite de *Spagia*, la côte ſeptentrionale de Friſlande nous préſente une ſuite d'objets ſous les noms de *Aqua*, *Andefort*, *Forali*, *Logoſt*, *Vadin*, *Rane* & *Rovea*; & on trouve à la ſuite de Stachen, ſur la côte nord des Fer-oë, les noms de *Funding*, *Andefort-Fugle*, *Goſte Kladi*, *Arne* & *Lamhau*, qui ſe ſuivent dans le même ordre que les précédens, & entre des golfes, comme ſur la carte de Friſlande.

Par le travers, ou vis-à-vis les golfes d'Andefort, Forali & Logoſt, on voit ſur la carte de Friſlande une aſſez grande île nommée *Duilo*; & ſur la carte des Fer-oë, par le travers des golfes Anding-fiord, Fugle-fiord & Goſte-fiord, on voit un groupe de quatre îles qui ſemblent ne former qu'une même terre, n'étant ſéparées que par de très-petits détroits, & qui ne forment qu'une même province dans l'adminiſtration civile & eccléſiaſtique du pays. Ces îles ſont *Vider-oë* ou *Vid-oë*, *Cun-oë*, *Bord-oë* & *Suin-oë*; on les nomme en général *Norder-oë*, îles du nord, & c'eſt la paroiſſe de *Vid-oë* qui eſt le chef-lieu ou la capitale de cette province. Si ces îles nous repréſentent celle de *Duilo* de la terre de Friſlande, comme il y a tout lieu de le penſer, il eſt auſſi très-probable qu'elles nous repréſenteront la *Thulé* des anciens, que l'on a placée ſucceſſivement dans l'Iſlande, dans les Schetland & dans la Norvège: cette conjecture eſt au moins fondée ſur la ſituation de ces îles, conforme à la deſcription qu'on a faite de Thulé, ſur l'analogie du nom de *Duilo* à celui de *Thulé*, & ſur la ſignification du mot de *Thule* qu'on a traduit juſqu'ici par extrémité, fin, ou dernière terre.

Sur la côte orientale de Friſlande, on voit une île nommée *Stremes*, que ſon nom & ſa poſition au-devant d'un grand golfe peuvent aiſément faire reconnoître ſur la côte de l'eſt des

de Fer-oë: c'eſt ſans doute l'île de *Nols-oë* qu'on voit au-devant du grand golfe de *Strom Fleſerne*, connu par ſes courans, & qui diviſe aujourd'hui le Mainland ou la terre ferme de Fer-oë en deux parties, dont l'une en a pris, comme le golfe, le nom de *Strom-oë*.

La côte occidentale de Friſſande nous préſente un cap *Bouet* dans la partie la plus avancée à l'oueſt; au ſud de ce cap ſont deux grands golfes nommés *Nordero* & *Sudero colfo*, & vis-à-vis le dernier de ces golfes ſont deux îles nommées *Ledeuc* ou *Ledova* & *Ilove*. On reconnoîtra ſans peine ces différens objets à la côte occidentale des Fer-oë, par ſa configuration & les dénominations qu'on y trouve. Le cap *Bouet* répond à *Myg-nes*, qui eſt une petite île la plus avancée à l'oueſt, & dont le nom même indique un cap. Les golfes *Nordero* & *Sudero* ſont les deux ouvertures des détroits qui s'avancent l'un au nord & l'autre au ſud, & qui ſéparent l'île de *Strom-oë* de celles de *Wag-oë* & de *Sand-oë*: les îles *Ledova* & *Ilofe* ſeront celles de *Heſt-oë* & de *Colter*. On trouve ſur la carte des Fer-oë un golfe nommé *Suderoë-fiord*, qui ſépare l'île de Portland, au nord, de celle de *Sku-oë*; mais ce n'eſt pas là le golfe *Sudero* de la carte de Friſſande, au-devant duquel il faut trouver trois îles. Le véritable *Sudero colfo* eſt le détroit qui ſépare Strom-oë de Sand-oë, comme le *Nordero colfo* eſt le détroit qui ſépare Strom-oë de Wag-oë: & on ne ſera pas ſurpris de voir dans l'ancienne carte le nom de *golfe*, au lieu de celui de *détroit*. On ne voit pas ſur la carte des Fer-oë ce grand nombre de petites îles qu'on trouve ſur la carte de Friſſande près de Nordero colfo; ce ſont vraiſemblablement que des petites roches, ou ces écueils qui rendoient la navigation ſi dangereuſe, comme on l'a vu dans la relation.

D'après ces premières reconnoiſſances, qui ſont aſſez évidentes par elles-mêmes, & qui confirment de plus en plus celles que la relation nous avoit données, il n'eſt plus guère permis de douter que les îles de Fer-oë ne

ſoient l'ancienne Friſlande. Je me bornerai, pour le reſte des détails de Friſlande, à en faire l'application ſur la carte des îles de Fer-oë, d'autant plus que les rapports des noms ſont moins ſenſibles; ſoit que la copie de la carte de Friſlande ait altéré & défiguré une partie de ſes noms, comme il y a lieu de le penſer, ſoit que la carte des Fer-oë ne nous fourniſſe pas tous les détails de ces îles. J'ajouterai ſeulement ici, que la ville de *Friſlande* peut ſe rapporter à la poſition de *King's-haun*, port ſitué comme Friſlande, dans la partie du S. E. de l'île & ſur un golfe qui en a pris le nom de *Scaale-fiord;* que *Godnec*, une des principales villes de Friſlande, répond à la poſition de *Thors-hawn*, qui eſt depuis très-long-temps le chef-lieu ou la capitale de toutes les îles de Fer-oë, & qui eſt auſſi le port le plus fréquenté pour le commerce de poiſſons; que *Sorand*, duché de l'ancienne Friſlande, peut être repréſenté par le lieu nommé *Scarvenes*, ſitué à la côte ſud de l'île de Sand-oë, & dans la partie de la grande terre qui regarde l'Écoſſe; & qu'enfin les îles de *Portland*, poſſédées par Zichini, & ſituées au ſud & près de Friſlande, peuvent être repréſentées par l'île de *Suder-oë*, qui eſt, comme l'indique ſon nom, la plus ſud des Fer-oë, & qui eſt auſſi l'une des plus riches & des plus peuplées de toutes ces îles. On remarquera que cette île eſt diviſée en trois preſqu'îles, par des golfes qui s'avancent dans les terres, & que la carte des Fer-oë nous donne même les noms des deux iſthmes: ainſi ces preſqu'îles peuvent être priſes avec quelque fondement pour les îles de Portland.

On pourroit déduire encore une nouvelle preuve, en faveur de l'opinion qui réſulte de ces recherches, du rapport qu'il nous paroît y avoir entre le nom de *Friſlande* & celui de *Fer-oë*. Lucas Jacobſon Debes, qui a écrit en danois une deſcription des îles de Fer-oë, dans le pays même & dans la ville de Thors-hawn, en 1670, nous expoſe les différentes opinions des Savans ſur

Digitized by Google

l'origine du nom de ces îles. Son opinion, entr'autres, & celle qui m'a paru la plus probable, eſt que les îles de *Fer-oë* ont été ainſi nommées du mot *fare*, qui, dans l'ancienne langue de ces îſes, ſignifie la même choſe que le mot *ferrie*, en anglois, c'eſt-à-dire, un paſſage d'eau; c'eſt à ce mot, ſans doute, qu'il faut auſſi rapporter l'origine des noms de *boſphore*, de *far* & de *fretum*, par leſquels on a déſigné les détroits. Les îles de Fer-oë ſont, comme on le voit par la carte, pleines de golfes, de détroits, de paſſages d'eau; c'eſt vraiment le pays des détroits. Or il eſt viſible qu'on a pu les appeler *Ferrieland*, au lieu de *Fer-oë*, c'eſt-à-dire, *terre*, au lieu d'*îles*, par la même raiſon qu'on a appelé *Schetland* ou *Hitland*, un autre corps d'îles ſemblable à celles-ci, & qui en eſt aſſez proche. De Ferrieland à Friſlande il n'y a pas, ce me ſemble, de différence aſſez conſidérable, pour ne pas reconnoître l'un de ces noms dans l'autre.

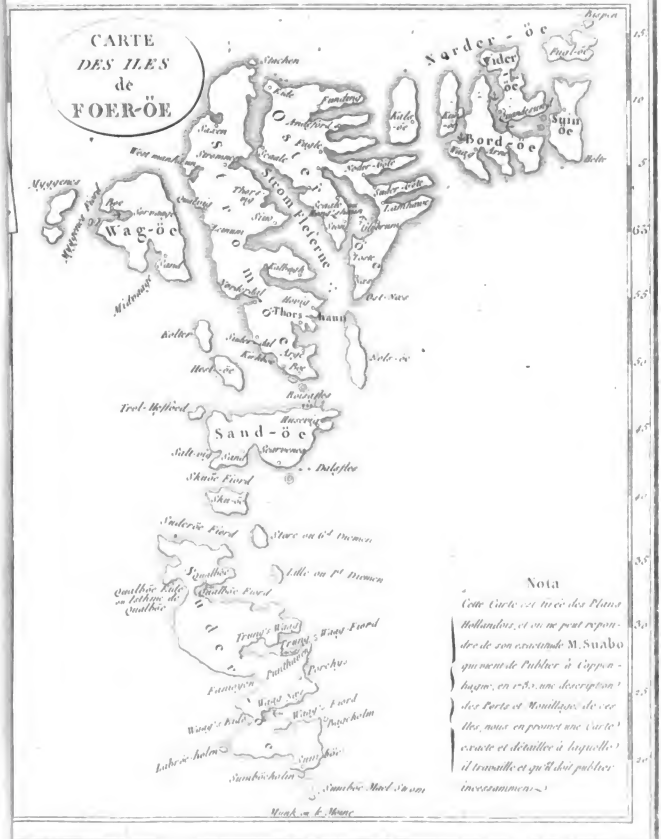
La ſeule difficulté qui pourroit peut-être arrêter encore & empêcher de reconnoître l'île de Friſlande à tant de marques, c'eſt la manière dont elle eſt figurée ſur la carte ancienne, qui nous la repréſente comme une grande terre, avec quelques petites îles ſeulement aux environs, tandis que Fer-oë eſt une terre découpée & diviſée en dix-ſept îles. Pour écarter cet obſtacle, il ſuffira de faire remarquer que les *Schetland*, qui ſont une autre terre découpée & diviſée comme celle de Fer-oë, ſont également repréſentées dans la même carte, comme un grande terre, avec quelques îles autour. On pourroit citer pluſieurs exemples d'erreurs ſemblables; Terre-neuve, entr'autres, eſt repréſentée ſur les anciennes cartes, bien différente de ce que nous la connoiſſons aujourd'hui; elle y eſt diviſée & coupée en pluſieurs îles, tandis qu'elle n'en forme qu'une grande. C'eſt ſans doute le peu de largeur des golfes & des détroits de Fer-oë, qui aura fait regarder & repréſenter la plupart de ces îles comme une terre continue; de même que c'eſt la grande étendue des golfes de Terre-neuve qui

aura donné lieu de diviſer cette terre en pluſieurs îles. J'ai diſtingué ſur la carte des îles de Fer-oë, celles de ces îles, dont l'enſemble me paroît devoir compoſer la grande terre de Friſlande; ce ſont *Strom-oë*, *Oſtr-oë*, *Wag-oë*, avec les îlots de Myg-nès & *Sand-oë*.

Après avoir reconnu l'île de *Friſlande* par tous les moyens que je viens d'expoſer, j'ai recherché quels pouvoient être les fondemens de la poſition que les géographes lui avoient aſſignée, & voici ce que j'ai trouvé de plus vraiſemblable à ce ſujet. Il eſt dit, dans la relation du ſecond voyage de Forbisher, que vingt-ſix jours après être ſorti des Orcades, il s'approcha de l'île de *Friſlande*, dont la côte, ſuivant cette relation, eſt pleine de montagnes pointues & très-élevées; qu'après l'avoir côtoyée quatre jours, il la quitta, & arriva huit jours après à l'endroit où il avoit abordé à ſon premier voyage, c'eſt-à-dire, au Groenland. C'eſt ſans doute d'après ce paſſage de Forbisher, que l'on aura placé l'île de Friſlande du côté du Groenland; mais il étoit aiſé de reconnoître que la Friſlande de Forbisher, ne pouvoit être celle des Zeni. Forbisher ayant rencontré ſur ſa route une île qu'il ne connoiſſoit pas, l'aura priſe pour la Friſlande des Zeni, dont la découverte étoit encore récente de ſon temps, & il l'aura nommée *Friſlande*, ſans s'embarraſſer beaucoup ſi les choſes convenoient ou non. C'eſt ainſi que ſe ſont établies pluſieurs erreurs en géographie; & lorſqu'elles ſont, comme celle-ci, la ſuite des obſervations d'un homme célèbre, elles s'accréditent & ſe perpétuent pendant des ſiècles.

S'il paroît maintenant démontré que l'île de Friſlande n'eſt point fabuleuſe ni ſubmergée, comme on l'avoit cru juſqu'à préſent, il s'enſuit néceſſairement que la relation des Zeni n'eſt point un roman, mais un monument précieux, d'où l'on peut tirer des connoiſſances utiles. On peut en conclure, entr'autres choſes, que le nouveau Groenland auroit été connu avant la découverte qui en a

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

été faite par les Danois; que l'Amérique auroit auſſi été connue & même habitée par des Européens, avant ſa découverte par Chriſtophe Colomb; que l'hiſtoire des colonies qu'on dit y avoir paſſé du pays de Galles l'an 1170, ſous la conduite de Madoc, un des fils d'Owen Guineth, roi de ce pays, pourroit paroître aſſez fondée; & que la découverte de l'île d'*Icare*, qui nous eſt encore inconnue, pourroit être très-intéreſſante, & fourniroit peut-être de nouvelles lumières. Il réſulteroit encore de la carte des Zeni, que la *Thulé* des anciens ſeroit plutôt l'île de Friſlande ou les Fer-oë, qu'aucun des autres pays auxquels on l'a rapportée ſucceſſivement.

Digitized by Google

SUITE DU MÉMOIRE SUR LE CALCUL DES PROBABILITÉS,

Par M. le Marquis DE CONDORCET.

ARTICLE. VI.

*Application des principes de l'*article précédent *à quelques queſtions de critique.*

I.

J'AI expoſé, dans l'*article précédent*, une méthode d'exprimer la probabilité des faits extraordinaires, en ayant égard à celle des témoignages qui les atteſtent, & à la probabilité propre de ces faits, qui, malgré la très-grande probabilité que produiroient les mêmes témoignages pour un fait ordinaire, peut alors devenir très-petite & fort au-deſſous de $\frac{1}{2}$.

II.

J'ai obſervé en même-temps qu'il ne falloit pas dans ce cas entendre, par la probabilité propre d'un fait, le rapport du nombre des combinaiſons où il a lieu, avec le nombre total des combinaiſons. Par exemple, ſi d'un jeu de dix cartes on en a tiré une, & qu'un témoin me diſe que c'eſt telle carte en particulier, la probabilité propre de ce fait, qu'il s'agit de comparer avec la probabilité qui naît du témoignage, n'eſt pas la probabilité de tirer cette carte, qui ſeroit $\frac{1}{10}$, mais la probabilité d'amener cette carte plutôt que telle autre carte déterminée en particulier; & comme toutes ces probabilités ſont égales, la probabilité propre eſt ici $\frac{1}{2}$.

Cette diſtinction étoit néceſſaire, & elle ſuffit pour

Digitized by Google

expliquer la contrariété d'opinions entre deux classes de philosophes. Les uns ne peuvent se persuader que les mêmes témoignages puissent produire, pour un fait extraordinaire, une probabilité égale à celle qu'ils produisent pour un fait ordinaire; & que, par exemple, si je crois un homme de bon sens qui me dit qu'une femme est accouchée d'un garçon, je dusse le croire également s'il me disoit qu'elle est accouchée de douze.

Les autres au contraire sont convaincus que les témoignages conservent toute leur force, pour les faits extraordinaires & très-peu probables, & ils sont frappés de cette observation, que si on tire une loterie de 100,000 billets, & qu'un homme, digne de foi, dise que le numéro 256, par exemple, a eu le premier lot, personne ne doutera de son témoignage, quoiqu'il y ait 99,999 à parier contre 1 que cet évènement n'est pas arrivé.

Or, au moyen de l'observation précédente, on voit que dans le second cas la probabilité propre du fait étant $\frac{1}{2}$, le témoignage conserve toute sa force, au lieu que dans le premier, cette probabilité étant très-petite, réduit presque à rien celle du témoignage.

III.

J'ai proposé ensuite de prendre, pour la probabilité propre du fait, le rapport du nombre de combinaisons qui donnent ce fait, ou un fait semblable au nombre total des combinaisons.

Ainsi, par exemple, dans le cas où on tire une carte d'un jeu de dix cartes, le nombre des combinaisons où l'on tire une carte déterminée quelconque est un; celui des combinaisons où l'on tire une autre carte déterminée est aussi un; donc $\frac{1}{2}$ exprimera la probabilité propre.

Si on me dit qu'on a tiré deux fois de suite la même carte, alors on trouvera qu'il n'y a que dix combinaisons qui donnent deux fois une même carte, & quatre-vingt-dix qui donnent deux cartes différentes: la probabilité

Digitized by Google

propre du fait n'eſt donc que $\frac{1}{10}$, & celle du témoignage commence à devenir plus foible.

Mais je crois devoir abandonner cette manière de conſidérer la queſtion, 1.° parce qu'elle me paroît trop hypothétique; 2.° parce que ſouvent cette comparaiſon d'évènemens ſemblables ſeroit difficile à faire, ou, ce qui eſt encore pis, ne ſe feroit que d'après des ſuppoſitions arbitraires; 3.° parce qu'en l'appliquant à des exemples, elle conduit à des réſultats trop éloignés de ceux que donneroit la raiſon commune.

I V.

J'en ai donc cherché une autre, & il m'a paru plus exact de prendre, pour probabilité propre d'un évènement, le rapport de la probabilité de cet évènement priſe dans le ſens ordinaire, avec la probabilité moyenne de tous les autres évènemens.

Ainſi, dans l'exemple précédent, nous avons dix combinaiſons où l'on tire deux cartes ſemblables, & quarante-cinq combinaiſons où l'on tire deux cartes différentes. La probabilité de tirer deux cartes différentes déterminées eſt $\frac{2}{100}$; celle de tirer deux cartes déterminées ſemblables eſt $\frac{1}{100}$. La probabilité moyenne d'un autre évènement que celui qui amène les deux cartes ſemblables données, ſera donc $\frac{45.\frac{2}{100}+9.\frac{1}{100}}{54} = \frac{99}{54.100}$; celle d'amener les deux cartes déterminées ſemblables ſera $\frac{1}{100}$; donc la probabilité propre de l'évènement ſera $\frac{54}{153}$.

Suppoſons enſuite que, dans le même exemple, on cherche la probabilité propre du fait, qu'on a tiré trois fois de ſuite la même carte.

Nous avons ici trois eſpèces de faits, 1.° ceux où l'on a amené trois cartes différentes; la probabilité de chaque fait

Digitized by Google

fait déterminé de ce genre eſt $\frac{6}{1000}$, & il y en a 120 : 2.° ceux où l'on tire deux fois la même carte ; ces faits ſont au nombre de 90, & la probabilité de chacun eſt $\frac{3}{1000}$: 3.° ceux où l'on tire trois fois la même carte ; ils ſont au nombre de 10, & la probabilité de chacun eſt $\frac{1}{1000}$. Nous avons donc $\frac{1}{1000}$ pour la probabilité du fait déterminé, & $\frac{6.120 + 3.90 + 9}{1000.219}$ pour la probabilité moyenne des autres faits. La probabilité propre du fait allégué ſera donc $\frac{219}{1218}$.

Ainſi ſuppoſons, par exemple, que la probabilité du témoignage ſoit $\frac{99}{100}$, c'eſt-à-dire, que le témoin ne ſe trompe ou ne veuille tromper qu'une fois ſur cent, on aura, d'après ſon témoignage, la probabilité $\frac{99}{100}$ ou $\frac{9.900}{10,000}$ qu'on a tiré une carte déterminée ; la probabilité $\frac{9.818}{10,000}$ qu'on a tiré deux fois la même carte ; & la probabilité $\frac{9.540}{10,000}$ qu'on l'a tirée trois fois.

Suppoſons encore que l'obſervation ait conſtaté que, ſur vingt millions d'hommes, un ſeul ait vécu 120 ans, & que la plus longue vie ait été de 130 ; qu'un homme me diſe que quelqu'un vient de mourir à 120 ans, & que je cherche la probabilité propre de cet évènement : je regarderai d'abord comme un fait unique, celui de vivre plus de 130 ans, fait que je ſuppoſe n'être pas arrivé ; j'aurai donc 131 faits différens, dont celui de mourir à 120 ans eſt un ſeul. La probabilité de celui-ci ſera $\frac{1}{20,000,131}$; la probabilité

moyenne des 130 autres ſera $\frac{20,000,130}{20,000,131.130}$; donc la probabilité propre cherchée ſera $\frac{130}{20,000,260}$, ou environ $\frac{1}{15384}$.

V.

Cette méthode s'appliquera également aux évènemens indéterminés. Ainſi, en continuant le même exemple, ſi le témoin a dit ſeulement que l'on a deux fois amené la même carte, ſans la nommer, alors ces dix évènemens, ayant chacun la probabilité $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{100}$ exprimera leur probabilité moyenne; $\frac{2}{100}$ exprimera de même celle des 45 autres évènemens ayant chacun la probabilité $\frac{2}{100}$: ainſi la probabilité propre de l'évènement ſera $\frac{1}{3}$.

Il peut paroître ſingulier que la probabilité propre de l'évènement, au lieu d'être la même ici que dans le cas de l'évènement déterminé, ſoit ſenſiblement moindre, qu'elle influe différemment ſur la crédibilité du témoin; qu'ainſi le même homme ſoit moins croyable lorſqu'il dit, en général, qu'il a vu amener deux fois de ſuite la même carte, que lorſqu'il dit qu'il a vu amener deux fois de ſuite telle carte en particulier. Cela vient de ce que, dans le ſecond cas, il y a neuf autres combinaiſons poſſibles, dont l'énonciation ne ſeroit pas plus probable que celle qu'il a faite, au lieu que dans le premier, toutes les autres énonciations qu'il n'a pas faites, ſont plus probables; c'eſt que dans le premier cas c'eſt ſeulement le fait extraordinaire qu'il a énoncé; & que dans le ſecond, il a énoncé un fait extraordinaire, par rapport à une partie des évènemens poſſibles, & un fait commun par rapport à une autre partie. Dans le premier, il ne s'agit que du fait extraordinaire; dans le ſecond, il s'agit du fait extraordinaire & du fait déterminé, qu'il faut comparer à la fois à

Digitized by Google

des faits déterminés plus ordinaires, & à des faits déterminés qui lui ſont ſemblables.

On ſuivra encore la même règle, s'il s'agit de faits indéterminés qui renferment pluſieurs combinaiſons d'une probabilité différente.

Suppoſons, par exemple, qu'on me diſe qu'un joueur de trictrac a cinq fois de ſuite amené plus de dix points.

Comme nous ne conſidérons ici que le nombre des points, nous avons, pour chaque coup, 11 évènemens poſſibles; c'eſt-à-dire, 11 dés, depuis 2 juſqu'à 12, dont les probabilités ſont $\frac{1}{36}$, $\frac{2}{36}$, $\frac{3}{36}$, $\frac{4}{36}$, $\frac{5}{36}$, $\frac{6}{36}$, $\frac{5}{36}$, $\frac{4}{36}$, $\frac{3}{36}$, $\frac{2}{36}$, & $\frac{1}{36}$, & les deux derniers ſont les ſeuls qui montent au-deſſus de 10. Cela poſé, comme on ne conſidère ici que la valeur de la ſomme des points dans chaque coup, il n'y aura que $\frac{15.14.13.12.11}{1.2.3.4.5}$, ou 3003 évènemens, dont 6 ſeulement appartiennent à la combinaiſon propoſée; or, comme la probabilité de ces ſix coups eſt $\frac{1}{12^5}$, on aura $\frac{1}{12^5.6}$ pour leur probabilité moyenne, & $\frac{11^5}{12^5.2997}$ ſera la probabilité des autres coups: la probabilité propre de l'évènement ſera donc ici $\frac{2997}{11^5.6+2997}$, ou $\frac{2997}{969,303}$.

VI.

De la même manière que les évènemens, qui ont une probabilité propre au-deſſous de $\frac{1}{2}$, deviennent moins croyables à meſure que cette probabilité diminue, les évènemens vraiſemblables en eux-mêmes, & dont la probabilité propre eſt au-deſſus de $\frac{1}{2}$, deviennent plus croyables à meſure que cette probabilité augmente, quoiqu'atteſtés

Digitized by Google

par un nombre égal de témoins. C'eſt ainſi, par exemple, qu'un fait aſtronomique qui ſe trouveroit d'accord avec la théorie de la gravitation, ſeroit cru facilement ſur l'aſſertion d'un ſeul Savant, même par ceux qui n'auroient pas vérifié ſes calculs; tandis que, ſi le même Savant avoit annoncé un fait contraire à cette théorie, il auroit beſoin d'une aſſez grande autorité, même pour que l'on crût devoir raiſonnablement examiner ſes calculs.

VII.

Si nous conſidérons maintenant deux claſſes d'évènemens ſeulement A & B, que la probabilité des évènemens A ſoit a & b, celle des évènemens B, a étant plus grand que b; qu'il y ait m évènemens A, & n évènemens B différens, la probabilité propre d'un évènement déterminé de la claſſe des B ſera exprimée par $\frac{b.(m+n-1)}{ma+b(m+2n-2)}$: quantité qui approchera de $\frac{b}{a+b}$ ſi m eſt beaucoup plus grand que n, mais ne pourra jamais être au-deſſous, & ne lui ſera rigoureuſement égale que lorſque $n = 1$. Elle approche beaucoup de $\frac{2b}{a+b}$, ſi $m = n$, & que a ſoit incomparablement plus grand que b; & la valeur de cette probabilité propre pourra d'ailleurs ſurpaſſer $\frac{2b}{a+b}$, mais ſeulement dans le cas où $n > m$, & elle aura $\frac{1}{2}$ pour ſa limite lorſque $a = b$.

Suppoſons, par exemple, qu'un certain évènement quelconque ne ſoit pas arrivé à un ſeul individu ſur cent millions d'individus de la même eſpèce. Alors $\frac{1}{100,000,002}$ exprimera la probabilité qu'il arrivera à un individu donné, & $\frac{100,000,001}{100,000,002}$ celle qu'il n'arrivera pas.

Digitized by Google

Si, après cela, un témoin raconte que cet évènement eſt arrivé à un individu déterminé, alors, comme il pouvoit également arriver à tous ceux de la même eſpèce, on aura pour m & n de très-grands nombres égaux entr'eux, a ſurpaſſera b incomparablement; en ſorte qu'on s'écartera peu de la vérité en ſuppoſant $\frac{1}{50.000,000}$ l'expreſſion de la probabilité propre de l'évènement.

Mais nous traiterons dans la ſuite plus en détail de l'application de cette méthode à la probabilité que peuvent avoir les évènemens naturels, pour ceux qui ne les ont point perſonnellement obſervés.

VIII.

Je vais maintenant eſſayer de faire à une queſtion de critique l'application des principes que je viens d'établir. Newton paroît être le premier qui ait eu l'idée d'appliquer le calcul des probabilités à la critique des faits. Il propoſe, dans ſon ouvrage ſur la chronologie, d'employer la connoiſſance de la durée moyenne des générations & des règnes, telle que l'expérience nous la donne, ſoit pour fixer d'une manière du moins approchée, des points de chronologie fort incertains, ſoit pour juger du plus ou du moins de confiance que méritent les différens ſyſtèmes imaginés pour concilier entr'elles des époques qui paroiſſent ſe contredire.

Quelques philoſophes ſe ſont ſervis depuis de cette évaluation de la durée moyenne des règnes, pour prouver le peu de probabilité de la durée attribuée par d'anciens hiſtoriens à certaines ſuites de Rois, & montrer par-là combien peu cette partie de leur hiſtoire méritoit de croyance. Ils ont penſé que la probabilité propre des faits devoit influer ſur le poids qu'il falloit attribuer aux témoignages qui les atteſtent, & en ont conclu que, malgré l'autorité des hiſtoriens les plus accrédités, les faits invraiſemblables devoient être rejetés.

Digitized by Google

Le ſavant Fréret, qui a combattu les principes de la chronologie de Newton, regardoit comme une eſpèce d'uſurpation l'uſage qui commençoit à s'introduire, d'employer dans la critique le calcul des probabilités : il a deſtiné un de ſes Mémoires à eſſayer d'en montrer l'inutilité & le danger. Ce calcul, ſelon lui, doit ſe borner à la théorie des jeux de haſard; on en connoiſſoit cependant alors des applications aux probabilités de la vie humaine, aux emprunts en rentes viagères ou en tontines, & même à quelques queſtions de Droit; mais il paroit que Fréret, quoiqu'il eût en phyſique, en mathématiques & ſur-tout en aſtronomie, des connoiſſances fort étendues, ne connoiſſoit pas les travaux de Halley, des Bernoulli, & de Moivre.

Il apporte pour motif principal de ſon opinion, que, dans les jeux de haſard, le nombre des combinaiſons poſſibles eſt fini, ou du moins donné par une théorie rigoureuſe: avantage que l'on perd néceſſairement lorſqu'on veut appliquer le calcul à la probabilité des faits naturels.

Il eſt vrai qu'alors on ne connoiſſoit pas, comme aujourd'hui, une méthode directe de calculer la probabilité des évènemens futurs ou inconnus d'après l'obſervation des évènemens paſſés, ou plutôt de déterminer la valeur moyenne de cette probabilité: mais on pouvoit employer le calcul d'après cette hypothèſe, que la ſuite des évènemens futurs ſera ſemblable à celle des évènemens paſſés; hypothèſe qu'on ſavoit déjà avoir une exactitude ſuffiſante, lorſque le nombre des obſervations eſt très-grand en lui-même, & par rapport à celui des évènemens inconnus ou futurs dont on cherche la probabilité.

Suivant toute apparence, quelques applications de calcul trop hypothétiques, fondées ſur de faux principes, ou même très-bizarres, qui avoient eu alors une ſorte de célébrité par leur ſingularité même, avoient frappé l'eſprit naturellement juſte & ſage de ce Savant, & l'avoient prévenu contre des recherches pour leſquelles ces premiers

Digitized by Google

eſſais n'étoient pas propres à inſpirer de la confiance; mais il ne nioit certainement pas le principe général, qu'il faut avoir égard à la probabilité propre, ſoit phyſique, ſoit morale, des évènemens; peu de critiques en ont même fait un uſage plus heureux, & il y a eu dans ce ſiècle peu d'érudits qui aient plus fortement ſenti l'utilité de l'étude des ſciences naturelles, & qui s'y ſoient livrés avec plus de zèle & de ſuccès.

Parmi ceux qui ont adopté le même principe, on doit citer M. de Voltaire, qui peut-être même en a quelquefois abuſé, ſur-tout lorſqu'il a voulu l'appliquer à la probabilité morale des évènemens, beaucoup plus difficile à évaluer que leur probabilité phyſique.

Dans le nombre des applications qu'il a faites de ce principe, on lui reproche ſur-tout d'avoir employé le peu de probabilité qu'il ſuppoſe à la très-longue durée du règne des ſept Rois de Rome, pour jeter de l'incertitude ſur cette partie de l'Hiſtoire Romaine. Comme ce fait eſt un de ceux auxquels il eſt le plus aiſé d'appliquer le calcul, nous l'avons choiſi pour exemple: nous allons donc chercher quelle eſt la probabilité propre de cet évènement, afin de voir ſi elle eſt aſſez petite pour affoiblir beaucoup le témoignage des hiſtoriens qui l'ont rapporté.

IX.

Nous obſerverons d'abord que ces Rois étoient électifs, & au lieu d'employer ici ou les générations des Rois héréditaires, qui ne peuvent s'y appliquer, ou celles des Rois électifs, qui nous donneroient un trop petit nombre d'obſervations, nous préférerons une hypothèſe qui ne doit pas s'écarter beaucup de la vérité, en prévenant d'ailleurs qu'elle eſt un peu trop favorable à la longue durée des règnes.

Nous ſuppoſerons donc, 1.° que les Rois électifs peuvent être élus, ou peuvent commencer à règner depuis l'âge de 30 ans juſqu'à celui de 60; & qu'il eſt également

Digitized by Google

probable qu'ils seront élus à une époque quelconque prise dans cet intervalle. Nous supposerons, 2.° que, depuis 30 jusqu'à 90 ans, la mortalité est constante, c'est-à-dire, comme si de 60 hommes de 30 ans il en mouroit un par année, un sur 45 hommes de 45 ans, un sur 30 hommes de 60 ans, &c. supposition un peu trop favorable à la durée de la vie.

Cela posé, la plus courte durée de chaque règne sera d'un an, la plus longue de 60; la plus courte durée de sept règnes sera sept ans, & la plus longue 420.

Il eût été plus exact de diminuer les règnes chacun d'une demi-année, de manière que la plus courte durée fût 3 ans $\frac{1}{2}$, & la plus longue $416\frac{1}{2}$, ou d'augmenter de 3 ans $\frac{1}{2}$ la durée des sept règnes; mais la différence n'est pas ici très-considérable, & nous donnons encore cet avantage à l'opinion favorable à la longue durée de ces règnes.

X.

Soit en général n la plus grande durée exprimée en années, pour celui qui est élu le plus jeune, m pour celui qui est élu le moins jeune, & p le nombre des règnes. Si l'on prend la formule

$$\frac{[(n-m+1).x(1-x)-x^{n-m+1}+x^{n+1}]^p}{(1-x)^{2p}.[\frac{(n+m).(n-m+1)}{2}]^p},$$

le coëfficient de x^r dans cette formule, développée en série, exprimera la probabilité que les p règnes dureront r années.

Or ici, $n = 60$, $m = 30$, $p = 7$, & comme il faut compter les règnes depuis la fondation jusqu'à la mort de Tarquin, $r = 257$.

Il faudra donc chercher le coëfficient de x^{257} dans la formule

$$\frac{[31x(1-x)-(x^{31}-x^{62})]^7}{(1-x)^{14}.45^7.31^7},$$

XI.

XI.

Si on appelle P ce coëfficient qui exprime la probabilité que les ſept règnes ont duré 257 ans, & qu'on veuille chercher la probabilité propre que cette durée a eu lieu, on obſervera qu'il y a ici 414 évènemens, puiſque les règnes peuvent durer depuis 7 juſqu'à 420 ans; que la probabilité de l'évènement déterminé étant P, celle de la probabilité moyenne des 413 autres évènemens ſera $\frac{1-P}{413}$, & qu'ainſi, la probabilité propre ſera $\frac{413P}{1+412P}$: c'eſt donc P qu'il nous reſte à chercher.

Pour cela, il ſuffira de développer le numérateur de la fonction ci-deſſus, qui, en n'ayant égard qu'aux termes où le coëfficient de x ne ſurpaſſe pas 257, donnera 24 termes; & comme on ſait qu'en général, le coëfficient de x^m dans $\frac{1}{(1-x)^n}$ eſt $\frac{n+m-1.....n+1}{1.2.3.....m-1}$, on aura facilement chacun des 24 termes & la valeur de P, qui ſera $\frac{792}{1,000,000}$.

Nous aurons donc $P = \frac{792}{1,000,000}$, & la probabilité propre du fait ſera $\frac{246,169}{1,000,000}$, ou, à très-peu de choſe près, $\frac{1}{4}$.

XII.

Si, au lieu de ce fait, nous examinons celui de l'Augure *Accius Nævius*, rapporté auſſi par les écrivains de l'Hiſtoire Romaine; comme juſqu'ici aucun raſoir n'a encore coupé de cailloux, en ſuppoſant ſeulement un million de faits contraires à ce récit, que nous puiſſions regarder comme certains, il ſuit de ce que nous avons dit, *n.° VII*, que la probabilité propre de cette aventure ſeroit $\frac{2}{1,000,000}$ à peu-près.

Supposons maintenant que, pour croire un fait, le placer dans la classe de ceux d'après lesquels on peut se permettre de raisonner, on exige une probabilité $\frac{9.999}{10,000}$, nous n'avons besoin que d'attribuer une probabilité $\frac{29.997}{29.998}$ au rapport des historiens qui ont parlé de la durée du règne des sept Rois de Rome; au lieu que, pour avoir la même probabilité, il en faudroit attribuer une de $\frac{449.949.001}{449.949.002}$ à l'historien qui a rapporté le fait.

On voit, dans le premier cas, un fait extraordinaire qui, tandis qu'un fait commun exigeroit seulement, pour avoir le même degré de croyance, qu'un ou plusieurs historiens ne se trompassent qu'une fois sur dix mille, exigeroit qu'ils ne se trompassent qu'une fois sur 29,998, ou près de 30000 Dans le second, on voit un fait tellement prodigieux, que la crédulité la plus excessive ne pourroit supposer aux historiens l'autorité nécessaire pour donner un motif suffisant de le croire.

XIII.

On auroit pu, au lieu de la méthode que nous avons suivie, supposer à chaque Roi de Rome l'âge que les historiens lui donnent à son avénement, & employer, au lieu de l'hypothèse de *Moivre*, celle de *Lambert*, qui est beaucoup plus exacte, & conduit aussi à des suites sommables. On auroit eu alors une probabilité propre très-sensiblement au-dessous de $\frac{1}{6}$, mais elle n'auroit pas été assez petite pour placer cette durée des règnes au nombre des évènemens qu'il faut rejeter, & elle seroit encore dans la classe de ceux qui exigent seulement des témoignages plus forts & beaucoup plus forts que n'en exigent les évènemens ordinaires.

XIV.

Supposons maintenant quil y ait eu deux classes d'historiens, dont les premiers aient porté la durée des sept

Digitized by Google

règnes à 257 ans, & les seconds à 140 ans seulement. En suivant les mêmes raisonnemens, on trouvera que, si ces derniers étoient les seuls, la probabilité que sept Rois ont régné 140 ans, est $\frac{8,887}{1,000,000}$; & par conséquent la probabilité propre de ce fait, si l'histoire l'avoit transmis seul, seroit $\frac{3,661,444}{4,632,557}$, c'est-à-dire, plus grande que $\frac{1}{2}$; & pour avoir une probabilité $\frac{9,999}{10,000}$, d'après le témoignage des historiens, il suffiroit que celle de ce témoignage fût $\frac{9,994}{10,000}$; c'est-à-dire, qu'au lieu qu'il faut, pour la durée de 257 ans, le témoignage d'un historien qui ne se trompe qu'une fois sur 29,998, il suffiroit, pour la durée de 140 ans, du témoignage d'un historien qui ne se trompât qu'une fois sur 1666.

Mais nous supposons des témoignages en faveur des deux durées, & d'après la théorie exposée ci-dessus, les probabilités propres des deux évènemens, & d'un autre évènement indéterminé quelconque qui auroit pu avoir lieu, seront,

Pour la durée de 140 ans..... $\frac{3,632,557}{4,968,390}$,

Pour la durée de 257 ans..... $\frac{325,512}{4,968,390}$,

Pour l'évènement indéterminé, non témoigné..... $\frac{990,321}{4,968,390}$.

Désignant ces trois probabilités par a, b, c; celle du témoignage en faveur de la durée de 140 ans par x; celle du témoignage en faveur de la durée de 257 ans par y, nous aurons, pour probabilité résultante du témoignage pour le premier évènement, $\frac{x.(1-y)}{1-xy}$; pour le second, $\frac{y.(1-x)}{1-xy}$; pour que ni l'un ni l'autre n'ait lieu $\frac{(1-x).(1-y)}{1-xy}$; & par conséquent,

$$\frac{a.x.(1-y)}{c+(a-c).x+(b-c).y+(c-a-b).xy},$$

$$\frac{b.y.(1-x)}{c+(a-c).x+(b-c).y+(c-a-b).xy},$$

$$\frac{c.(1-x).(1-y)}{c+(a-c).x+(b-c).y+(c-a-b).xy},$$

pour les probabilités des deux évènemens témoignés, & pour celle qu'aucun des deux n'a eu lieu. Pour que la probabilité fût égale entre les deux évènemens, il faudroit que l'on eût $x = \frac{by}{a+(b-a).y}$, & dans l'exemple proposé, $x = \frac{325.512.y}{3.652.537 - 3.327.025.y}$. Supposons $y = \frac{9.999}{10,000}$, nous aurons $x = \frac{9.987}{10,000}$; c'est-à-dire, qu'un témoignage qui se tromperoit une fois sur 770, devroit être cru sur la durée de 140 ans, plutôt que le témoignage qui ne se tromperoit qu'une fois sur 10,000, sur la durée de 257 ans.

Supposons enfin x seulement égal à $\frac{9}{10}$, & voyons quelle valeur devroit avoir y, pour que l'évènement auquel il se rapporte ait une probabilité égale à $\frac{9.099}{10,000}$. Dans ce cas on aura l'équation $y = \frac{338.589.476,666}{338.589.802,178}$; c'est-à-dire, qu'il faudroit un témoignage qui trompât moins qu'une fois sur un million trente mille; ainsi, pour avoir une probabilité $\frac{9.099}{10.000}$ de la durée de 257 ans, il suffira de pouvoir donner aux historiens qui l'ont rapportée, une probabilité telle qu'ils ne se trompent qu'une fois sur trente mille environ; mais si en même temps d'autres historiens qui se trompent une fois sur dix, ont fixé à ces mêmes règnes une durée de 140 ans, il faudra, pour avoir la même probabilité, en pouvoir supposer aux témoignages des premiers une telle, qu'ils ne se trompent qu'une fois sur environ un million trente mille.

Digitized by Google

MÉMOIRE
SUR LA GRANDEUR APPARENTE
DES CORPS OPAQUES,
Vus sur un fond lumineux ou autrement.

Par M. LE GENTIL.

LA matière sur laquelle j'entreprends aujourd'hui d'entretenir cette assemblée, a déjà été traitée, & elle mérite de l'être plus d'une fois. La question est de savoir si un corps opaque quelconque vu tout entier au-devant d'un corps lumineux, tel, par exemple, que le Soleil, paroîtroit plus petit que s'il étoit vu à l'opposite, sans cependant changer sa distance à l'œil de l'observateur. Après avoir souvent réfléchi aux raisons pour & contre, j'ai cru qu'en cette matière, comme en toute autre matière de science, la voie de l'expérience (quand on peut y avoir recours) étoit toujours la plus sûre, & celle qui nous conduisoit le plus infailliblement au but. C'est donc dans l'intention de découvrir si les corps opaques perdent sensiblement de leur grandeur apparente, lorsqu'ils sont vus sur un fond lumineux, que j'ai fait les expériences qui sont l'objet de ce Mémoire. Pour faire voir en peu de mots l'importance de cette matière, il suffira de faire remarquer que cette diminution, si elle existe, doit influer sur le diamètre de la Lune, dans la prédiction des éclipses de Soleil; sur le temps que Mercure & Vénus, dans leurs conjonctions écliptiques avec le Soleil, emploient à entrer sur son disque, & à en sortir; sur la grandeur réelle de ces planètes; & enfin sur plusieurs autres points de l'astronomie & de la physique, également intéressans pour le progrès de ces deux sciences. Avant que de rapporter mes expériences, je crois qu'il seroit bon de faire un précis histo-

Lû le 14 Nov. 1753. Relû le 4 Mars 1786.

Digitized by Google

rique de tout ce qui s'eſt paſſé juſqu'à ce jour, parmi les Aſtronomes, de plus intéreſſant ſur cette matière; je le crois même d'autant plus néceſſaire, qu'on ſera par-là plus à portée de voir ce que mes expériences y ont ajouté. Les paſſages de Mercure & de Vénus au-devant du diſque du Soleil, obſervés dans le ſiècle paſſé, ont fait naître l'idée de la diminution de la grandeur apparente des corps opaques, lorſqu'ils ſont vus ſur un fond lumineux. Gaſſendi, un des grands philoſophes de ſon temps, en a fait la remarque, pour la première fois, en 1631, dans la conjonction écliptique de Mercure: perſonne, avant lui, n'avoit été aſſez heureux pour voir cette planète ſur le Soleil. Ce célèbre philoſophe fut dans le plus grand étonnement de voir que Mercure lui paroiſſoit à peine ſous un angle d'un tiers de minute; il n'avoit ſous ſes yeux que des obſervations qui avoient toutes été faites à la vue ſimple ou avec de très-courtes lunettes, & dans des circonſtances où Mercure préſente à la Terre, ſinon tout ſon côté éclairé, au moins une aſſez grande partie. Il s'attendoit de le voir paroître ſur le Soleil, à peu-près de la même grandeur que ces obſervations l'avoient établi, c'eſt-à-dire, ſous un angle de deux ou trois minutes au moins. En liſant ſa Lettre à Schickard, intitulée *de Mercurio in Sole viſo*, l'on y voit qu'étant bien éloigné de penſer que Mercure dût lui paroître ſi petit, il l'avoit d'abord pris pour quelque tache qui s'étoit formée nouvellement; qu'il reconnut enfin, par le mouvement propre & uniforme de cette prétendue tache, en peu de temps, que c'étoit Mercure: d'où il conclut la néceſſité de diminuer la grandeur apparente des aſtres, beaucoup plus qu'on n'auroit pu ſe l'imaginer.

L'obſervation de Gaſſendi fut confirmée deux fois, dans le courant du ſiècle, une fois en 1639, par un paſſage de Vénus ſur le Soleil, qui fut obſervé en Angleterre par *Horoccius* & *Crabtrée*; & une autre fois en 1661, par un paſſage de Mercure ſur le Soleil, qui fut obſervé à Dantzick par *Hevelius*. Horoccius n'ignoroit pas ce qui avoit été

Digitized by Google

remarqué dans le paſſage de Mercure ſur le Soleil en 1631, touchant le diamètre apparent de cette planète ; cela lui ſervit d'avertiſſement pour le diamètre de Vénus, de ſorte que cet Aſtronome ne fut pas ſurpris au point que l'avoit été Gaſſendi pour qui la choſe avoit été nouvelle. Voici comment Horoccius s'exprime dans ſon Traité intitulé *Mercurius in Sole viſus*, pag. 112, c. I. *Præcipuè autem diametri Veneris apparentis mirabilem parvitatem lectoris conſideratione dignam commendarem, niſi conſimili in Mercurio novitate Aſtronomorum admirationem præoccupaſſet Gaſſendus: at qui veritatem primus docere non poſſum, ſecundus confirmo. Videant ergo, jam altero & notabiliori exemplo, quantùm decipiant planetarum radii in æſtimandis eorum diametris.*

Hevelius, qui nous a conſervé ce précieux Traité de Horoccius, ſur le paſſage de Vénus au-devant du Soleil, dit, à l'occaſion du diamètre de cette planète, que Mercure ne lui avoit paru, en 1661, que de 12 ſecondes, lorſqu'il paſſa ſur le Soleil ; qu'on ne devoit pas s'en étonner, puiſque le diamètre de Vénus, que les Aſtronomes les plus exacts faiſoient encore de près de 4 minutes dans ſon périgée, n'avoit été trouvé que de 1′ 16″ ſeulement dans ſon paſſage au-devant du Soleil.

Comme les diamètres de Mercure & de Vénus, qui avoient été obſervés dans leurs paſſages au-devant du Soleil, différoient ſi conſidérablement de ceux que tous les Aſtronomes attribuoient à ces planètes, cela fit croire à pluſieurs ſavans de ces temps-là, que quelque illuſion optique pouvoit en être la cauſe. Schickard, célèbre profeſſeur en aſtronomie & en hébreu dans l'univerſité de Tubinge, fut de ce ſentiment ; il compoſa, à l'occaſion du diamètre de Mercure obſervé par Gaſſendi, une diſſertation qu'il adreſſa à ce philoſophe : on y voit les raiſons qui lui faiſoient croire que cette planète, lorſqu'elle eſt vue ſur le Soleil, devoit perdre de ſa grandeur apparente. La dilatation de la lumière du Soleil qui, par ſa nature, ſe répand de tous côtés, & ſe renfle aux approches des

Digitized by Google

corps, en eſt, ſelon lui, la cauſe principale. Les lumières dont on a coutume de ſe ſervir pour éclairer les appartemens pendant la nuit, lui ſervent d'exemple: ſi l'on fait préſenter au-devant d'une de ces lumières un bâton, & qu'on l'obſerve de loin, il paroîtra dentelé profondément à l'endroit par où paſſe la lumière; d'où, par analogie, il conclut que les mêmes apparences doivent ſuivre Mercure lorſqu'il paſſe au-devant du Soleil. Horoccius convient avec Schickard, que la lumière ſe dilate à un point preſque incroyable, lorſque, pour l'apercevoir, nous n'avons d'autre ſecours que celui de la vue ſimple. Il admet auſſi l'expérience de cet Aſtronome, mais il la croit tout-à-fait étrangère à ſon ſujet; il prétend en effet que la diminution du bâton dont il eſt queſtion dans l'expérience de Schickard, n'a d'autres cauſes que les humeurs de l'œil, qui rompent & qui amplifient les rayons de la lumière; mais que ſi l'on reçoit ſur un mur l'ombre du bâton, elle paroîtra d'une grandeur uniforme. Or, continue Horoccius, c'eſt l'ombre de Mercure & de Vénus que l'on obſerve, lorſque l'on reçoit ſur un tableau, dans la chambre obſcure, l'image du Soleil qu'on a fait paſſer à travers une lunette, ce qui modère tellement les rayons de cet aſtre, que la vue n'en eſt point offenſée. On n'a donc rien à craindre alors de la trop grande dilatation des rayons du Soleil, & Vénus & Mercure ont été vus de la même grandeur qu'ils devoient paroître. Pour mieux combattre ſon adverſaire, Horoccius ſe ſert des éclipſes de Soleil, parce qu'à la ſimple vue l'on juge toujours la partie éclipſée trop petite, au lieu que les lunettes la repréſentent, auſſi-bien que le diamètre de la Lune, dans ſa véritable grandeur apparente: il cite l'éclipſe du 22 Mai 1639, & celle du 12 Mai 1621, dont il a obſervé la première & Gaſſendi la ſeconde.

Mais quel fonds peut-on faire ſur ces obſervations dont parle Horoccius? Quand même Gaſſendi & lui auroient excellé dans l'art d'obſerver, cet art étoit alors très-borné, les

Digitized by Google

les moyens leur manquoient pour l'exactitude, puiſque le micromètre n'étoit point encore connu. Sur une quantité auſſi grande qu'eſt celle du diamètre apparent de la Lune, comparé au diamètre apparent de Mercure, ils pouvoient aiſément ſe tromper dans leur eſtime d'une ou deux minutes, ſans que l'erreur pût être ſenſible. Les obſervations de Bouillaud, le plus célèbre Aſtronome de ces temps-là, ne ſont marquées que dans cette préciſion, & par conſéquent les deux obſervations dont parle Horoccius, n'attaquent en rien le ſentiment de Schickard.

Il eſt aiſé de voir, par ce qui vient d'être dit, que quoiqu'on eût, du temps de Gaſſendi & d'Horoccius, l'idée de la diminution des corps opaques lorſqu'ils ſont vus ſur un fond lumineux, on n'avoit cependant pu parvenir à établir rien de certain ſur ce ſujet. Perſonne en effet n'avoit cherché les moyens de meſurer avec exactitude les diamètres de Mercure & de Vénus, lorſqu'ils nous préſentent leur côté éclairé. On peut joindre à cela que la méthode groſſière dont les Aſtronomes s'étoient ſervie pour meſurer le diamètre de ces planètes dans leurs paſſages au-devant du Soleil, avoit dû influer ſur l'exactitude de leurs obſervations.

M. Huguens, qui eſt venu dans la ſuite, a à la vérité obſervé le diamètre éclairé de Vénus, avec une exactitude qui a ſurpaſſé de beaucoup celle de ſes prédéceſſeurs; mais comme il ne paroît pas avoir eu en vue la queſtion préſente, je n'inſiſterai pas ſur ſon obſervation: je me contenterai ſeulement de faire remarquer, comme en paſſant, qu'entre ſon réſultat & celui d'Horoccius & de Crabtrée, il y a 17 à 18 ſecondes de différence, dont Vénus leur auroit paru plus petite dans ſon paſſage au-devant du Soleil. Or, quoique l'obſervation d'Horoccius & de Crabtrée (comme je l'ai remarqué un peu plus haut) ne ſoit pas à l'abri de toute cenſure, cette quantité m'a paru trop conſidérable pour ne pas mériter attention, d'autant mieux

que j'ai pris un milieu entre les réſultats de ces deux Aſtronomes.

L'expérience faite par Schickard, du bâton au-devant d'une chandelle, quoique ſimple & groſſière, m'ayant paru mériter quelqu'attention, j'ai imaginé un moyen de la répéter beaucoup plus exactement.

J'ai pris une lame de cuivre d'un pouce de largeur & de cinq à ſix de longueur, médiocrement polie. Je l'ai élevée au deſſus d'une table, de façon que ſes deux ſurfaces fuſſent perpendiculaires, & ſes deux grands côtés parallèles à l'horizon; je l'ai arrêtée dans cette poſition, par ſes deux extrémités. J'ai mis, à la diſtance d'environ ſix pieds de cette règle, un large oculaire de ſept pouces & quelques lignes de foyer. Cet oculaire étoit fermement arrêté ſur une règle de bois placée horizontalement. Cette règle portoit un chaſſis peint avec du blanc de céruſe, & bien uni, de manière que l'oculaire étoit entre le chaſſis & la lame de cuivre. Le chaſſis étoit deſtiné à recevoir l'image de la lame de cuivre; il pouvoit s'approcher ou s'écarter de l'oculaire à volonté, étant conſtruit de façon que la règle de bois entroit dedans fort exactement, & il étoit facile de l'arrêter à un point fixe quelconque, par une vis qu'on avoit fait pratiquer en deſſous. Le tout étoit fixé très-ſolidement, & de niveau avec la lame de cuivre. Je plaçai, pendant la nuit, une très-forte bougie au-devant de la lame, & une autre auſſi forte par-derrière. J'avois partagé verticalement la lame de cuivre par un grand carton, afin que la bougie la plus proche de l'oculaire n'éclairât que la moitié de la lame; & d'ailleurs la flamme de la bougie plus éloignée étoit aſſez longue pour être aperçue au-deſſus & au-deſſous de la partie obſcure de la lame. Les choſes étant ainſi diſpoſées, j'approchai mon chaſſis juſqu'à ce que je viſſe diſtinctement la peinture de mon objet, & ayant ſerré la vis, je l'arrêtai à ce point. Les principaux phénomènes que je me contenterai de rapporter, ſont au nombre de

Digitized by Google

deux. Il partoit des deux bords de l'image de la partie éclairée de la lame, une lumière blanchâtre qui, ſemblable à la queue d'une comète, alloit toujours en s'affoibliſſant, à proportion qu'elle s'éloignoit des bords de l'image de la lame, & qui finiſſoit à peu de diſtance. Une ſemblable lumière paroiſſoit auſſi ſur les bords de la repréſentation de la partie obſcure de la lame, mais avec cette différence qu'elle s'étendoit, dans celle-ci, ſur une partie de la largeur de cette repréſentation. Pour meſurer actuellement la partie éclairée & celle qui étoit opaque, j'avois fait diviſer une échelle en 100.es de lignes, & l'ayant fait évider en dedans, je mis à la place des lignes, des ſoies de cocon très-déliées. Ces ſoies formoient une eſpèce de réticule, dont je me ſervis au lieu de micromètre, & que j'avois jugé très-propre pour en faire les fonctions. Il m'apprit, par un grand nombre d'obſervations réitérées & faites avec grand ſoin, que la partie opaque de la lame paroiſſoit $\frac{1}{10}$ de ligne plus petite que la partie éclairée; mais, pour en rendre l'effet encore plus ſenſible, j'ai imaginé l'expérience ſuivante.

J'ai fait tourner & arrondir, le plus exactement qu'il m'a été poſſible, deux plaques de cuivre dont la plus grande avoit onze lignes, & la plus petite neuf lignes & demie de diamètre; je les ai ſubſtituées à la lame de cuivre, & je les ai placées à deux pouces ou environ de diſtance l'une de l'autre; leur direction répondoit à celle de l'oculaire & du chaſſis, afin qu'abaiſſant ou élevant l'une des pièces, je puſſe faire concourir leurs images l'une ſur l'autre. Je plaçai une ſeule bougie en devant, mais un peu à côté; & le tout s'étant peint ſur le chaſſis, je fis mouvoir une des pièces, juſqu'à ce que le bord inférieur d'une des images raſât le bord ſupérieur de l'autre; je fis même en ſorte qu'elles avançaſſent un peu l'une ſur l'autre, ſans cependant que la choſe pût être trop ſenſible. Je changeai la bougie de poſition en la plaçant par-derrière, & faiſant en ſorte que les deux cercles fuſſent vus tout entiers ſur

la flamme de la bougie; j'aperçus alors très-distinctement & sans peine une interruption entre les deux ombres, qui me laissoit entrevoir la lumière. Je vis aussi, comme dans la première expérience, une lumière blanchâtre qui passoit par l'intervalle que formoit l'interruption des deux ombres, & qui s'étendoit sur une partie de ces ombres. Que peut-on conclure de cette expérience, sinon que les rayons de la lumière, pour former cette interruption & se faire apercevoir, s'étoient fléchis deux fois & en différens sens avant que de continuer leur route jusqu'à l'oculaire; qu'outre ces modifications quils avoient souffertes, ils avoient aussi un peu avancé sur la surface du premier cercle avant que d'aller joindre l'autre cercle, ce qui se prouve par cette lumière pâle & blanchâtre que j'ai aperçue de part & d'autre sur les deux cercles; & que par conséquent les corps opaques perdent de leur grandeur apparente quand ils sont vus tout entiers sur un corps lumineux.

On ne peut pas opposer à mes expériences ce que nous avons vu qu'Horoccius avoit objecté à Schickard. Mon oculaire me peignoit la représentation de mes cercles, précisément de la même façon que les objectifs ou les lunettes nous représenteroient, soit une éclipse de Soleil, soit un passage de Vénus ou de Mercure sur le disque apparent de cet astre; mais, pour avoir une démonstration complète de cette diminution, & pour savoir en même temps, d'une façon encore plus exacte, quelle en doit être la quantité relativement aux lunettes de différentes longueurs, & aux objets plus ou moins éclairés, j'avois commencé plusieurs expériences de différentes espèces, que le temps ne m'a pas permis d'achever: j'en rapporterai cependant une que j'ai faite il y a plusieurs mois avec une lunette de sept pieds & demi, dans une maison, rue des Postes. L'on peut voir d'un donjon appartenant à cette maison, un globe qui est placé à l'extrémité du dome des Invalides: le diamètre apparent de ce globe vu à cette distance, est environ quinze fois plus petit que le diamètre

Digitized by Google

apparent du Soleil, & par conséquent je pouvois espérer de voir ce globe tout entier sur le Soleil, quand cet astre viendroit à passer par-derrière. Ayant saisi ce moment, je mesurai le diamètre horizontal du globe, que je trouvai égal à 165 parties de mon micromètre. Il est bon de faire remarquer que les bords de ce globe m'ont paru tranchés avec une si grande netteté, que j'ai pu m'assurer, à une partie de micromètre près, de la quantité que je rapporte, & s'il y a eu quelqu'erreur dans l'observation, j'ose dire qu'elle a toute été en excès. Dans le cas présent, le globe étoit vu tout entier sur un corps très-lumineux; il falloit ensuite que je me trouvasse entre le Soleil & le globe, à peu-près sur la même ligne, afin qu'il l'éclairât de mon côté, pour mesurer une seconde fois le même diamètre, sans être obligé de changer ma distance de ce globe. Dans ce second cas, le diamètre du globe ne m'a paru guère plus grand que 175 parties du même micromètre, ni plus petit que 173; d'où je conclus qu'il m'avoit paru de 9 à 10 parties plus petit lorsque je l'observai au-devant du Soleil, qu'à son opposite. Ces 9 à 10 parties répondent, dans mon micromètre, à près de 6 secondes de degré.

Ce seroit donc de cette quantité, ou à peu-près, dont seroient diminués les diamètres des corps opaques vus sur un fond lumineux; mes premières expériences feroient cette quantité un peu plus grande. Il résulte toujours de toutes ces expériences, que les corps opaques, vus sur un fond lumineux, éprouvent à nos yeux une diminution réelle, lorsque nous mesurons leurs diamètres apparens avec quelqu'instrument, dans cette position, & que cette diminution est d'environ 5 à 6 secondes; ce que j'ai cru pouvoir être fort utile dans l'astronomie; j'invite, au surplus, les Astronomes à tenter de nouvelles expériences & observations sur une matière aussi intéressante.

Digitized by Google

MÉMOIRE

SUR LE FROID observé à l'Observatoire royal & aux Chartreux, à la fin de 1783.

Par M. LE GENTIL.

Lû le 20 Janvier 1784.

J'AVOIS deux thermomètres placés à côté l'un de l'autre, un à eſprit-de-vin, que j'ai conſtruit; & un à mercure, de M. Lavoiſier, pareil à celui de M. Caſſini, & qui ont été préſentés à l'Académie par cet Académicien. Il eſt diviſé en huitièmes, comme celui de M. de Caſſini; & ayant été éprouvés dans les caves, ils ont marqué le même point.

Le 29, à 7 heures $\frac{1}{2}$ du matin, thermomètre à eſprit de-vin ..... — 9^d.
A 6 heures du ſoir ..... — 10^d & $10\ \frac{5}{8}$.
Thermomètre de M. Lavoiſier ..... — $9\ \frac{1}{8}$.
A 3 heures après midi ..... — $7^d\ \frac{1}{2}$ & 8.
Le 30, à 7 heures $\frac{1}{2}$ & à 8 heures, thermomètre à eſprit-de-vin ..... — $12\ \frac{5}{8}$.
Thermomètre de M. Lavoiſier ..... — $12\ \frac{6}{8}$.
A 2 heures après midi, thermomètre à eſprit-de-vin.. — $9\ \frac{7}{8}$.
Termomètre de M. Lavoiſier ..... — $10\ \frac{1}{8}$.
A 5 heures après midi, thermomètre à eſprit-de-vin... — 11.
Thermomètre de M. Lavoiſier ..... — $11\ \frac{1}{8}$.
A 9 heures du ſoir, thermomètre de M. Lavoiſier... — 12.
Thermomètre de M. Lavoiſier ..... — $12\ \frac{1}{8}$.
Le 31, à 7 h $\frac{1}{2}$ du matin, thermomètre à eſprit-de-vin.. — 11.
Thermomètre de M. Lavoiſier ..... — $11\ \frac{3}{8}$.

Mais il paroît que le plus grand froid eſt arrivé entre minuit & 5 heures du matin: en effet voici les obſervations de M. Caſſini qui le confirment.

Son thermomètre étoit plus élevé que le mien de 7 à

Digitized by Google

8 pieds, étant placé extérieurement à l'embrasure de la fenêtre du cabinet, du quart-de-cercle mobile, plein nord.

Le 28 Décembre, à 8 heures du matin..... — 3^{d}.
Le 29, à 8 heures du matin..... — 7.
Le 30, à 7 heures $\frac{1}{2}$ du matin..... — 12 $\frac{7}{8}$.
A 9 heures du soir..... — 14 $\frac{1}{8}$.
A minuit $\frac{1}{2}$..... — 15 $\frac{3}{8}$.

Pendant la nuit du 30 au 31, le ciel se couvre, le froid diminue, & le dégel se prépare.

Le 31, à 8 heures du matin..... — 10^{d}
A midi..... — 7 $\frac{1}{2}$.

Ces observations, du temps du plus grand froid, s'accordent avec ce que le P. Dom Germain a observé aux Chartreux de Paris, & qu'il a bien voulu me communiquer.

Le 20 Décembre, le thermomètre bien placé, vu à 7 heures & demie, 7^{d} au-dessous de zéro. Baromètre 28 pouces 3 lignes. Vent N. N. O.

Le 28 il a neigé toute la journée; il est tombé 7 ou 8 pouces de neige. Le Thermomètre est resté à 2 degrés au-dessous de zéro. Le Baromètre 27 pouces 4 lignes. Vent N. E.

Le temps s'est découvert pendant la nuit.

Le 29 le thermomètre, à 8 heures, étoit à 10^{d} au-dessous de zéro. Le baromètre 27 pouces 10 lignes. Vent N. O. A 2 heures après midi, 7^{d} sous zéro.

Le 30, à 8 heures, 13^{d} $\frac{1}{2}$ au-dessous de zéro. Le baromètre 27 pouces 9 lignes. Vent N. E. A 2 heures après midi, 11^{d} au-dessous de zéro.

Le 31, à 5 heures du matin, 15^{d} au-dessous de zéro. Le Baromètre 27 pouces 7 lignes. Le vent E. Sur les 6 heures du matin, le temps s'est couvert. A 2 heures après midi, 5^{d} sous zéro. Le temps s'est adouci, & le 1.er Janvier il a commencé à dégeler. A 2 heures après midi, 4. degrés $\frac{1}{2}$ au-dessous de zéro. Vent de S. E.

Digitized by Google

REMARQUE
SUR
LES VENTS QUI RÈGNENT À PARIS ET DANS LES ENVIRONS.

Par M. LE GENTIL.

Lû le 3 Mars 1784.

J'Ai l'honneur d'annoncer à l'Académie que je lui demande à prendre date parmi les Mémoires qu'elle a deſtinés à l'impreſſion, dans le volume de 1781, pour une concluſion que j'ai tirée d'après un très-grand nombre d'obſervations que j'ai faites, tant pendant mes voyages, que depuis mon retour; concluſion qu'on peut auſſi entrevoir dans la diſſertation du Docteur Halley, ſur les vents généraux & alizés.

Cette concluſion, dis-je, eſt que, dans notre climat, à Paris & dans les environs, les vents généraux ſont de la partie de l'Oueſt, c'eſt-à-dire, qu'ils ſont variables du Nord-oueſt au Sud-oueſt, ſelon les ſaiſons; que ces vents ſoufflent ici perpétuellement, comme les vents généraux & alizés ſont perpétuellement de la partie de l'Eſt entre les tropiques. Les autres vents variables que nous reſſentons, étant, ſelon moi, des eſpèces de vents rampans ſur la ſurface de la terre, n'empêchent point que les vents de Nord-oueſt au Sud-oueſt ne ſoient conſtans au-deſſus d'eux, c'eſt-à-dire, à 1200 ou 1500 toiſes & même plus au-deſſus de la ſurface de la terre.

C'eſt

C'eſt de cette concluſion, comme d'un fait, que je demande à prendre date, à l'Académie, parmi ſes Mémoires pour l'année 1781.

J'ai l'honneur de prévenir encore l'Académie que je travaille actuellement à un Mémoire ſur le froid que nous avons reſſenti cet hiver à Paris, comparé avec les hivers de 1684, 1709, 1740 & 1776; que ce Mémoire eſt déjà fort avancé ; & que j'y fais entrer l'influence de ces vents généraux dont je parle.

Digitized by Google

REMARQUES ET OBSERVATIONS SUR L'ASTRONOMIE DES INDIENS, & sur l'ancienneté de cette Astronomie.

Par M. LE GENTIL.

Lû le 13 Mars 1784.

J'Ai déjà fait part à l'Académie, dans deux différens Mémoires, de ce que j'avois pu recueillir dans mon voyage à Pondichery, sur l'astronomie des Brames, & sur la conformité de cette astronomie avec celle des anciens Chaldéens: je vais l'entretenir aujourd'hui sur quelques nouvelles connoissances que j'ai acquises au sujet de cette astronomie.

La religion & l'astronomie sont tellement liées ensemble chez les Indiens, qu'il est évident qu'elles sont à peu-près de même date chez ces peuples: il y a même lieu de croire que l'astronomie a précédé la religion, telle qu'elle existe aujourd'hui; en sorte que la religion, dans l'Inde, se peut dire en quelque sorte la fille de l'astronomie.

C'est sans doute une raison, indépendamment de celle du climat, c'est sans doute, dis-je, une raison pourquoi l'astronomie n'a fait aucuns progrès dans l'Inde, depuis son origine, ou depuis ses premiers inventeurs, que je suppose être des Indiens; pourquoi les Indiens, de nos jours, n'observent point le ciel; pourquoi enfin ils restent, à cet égard, dans une inaction si singulière à nos yeux. S'ils cultivent l'astronomie, ils n'y sont pas portés par les mêmes vues que nous, mais uniquement par des motifs de religion: ils montroient, à Pondichery, la plus grande indifférence pour mes instrumens d'astronomie, & pour les observations célestes que je faisois avec leur secours. Cette indifférence vient évidemment de ce qu'ils ne veulent pas emprunter la moindre chose des étrangers, & de ce

Digitized by Google

qu'ils ſe perſuadent en ſavoir aſſez pour remplir le but unique qu'ils ſe ſont de tout temps propoſé en cultivant l'aſtronomie. En effet, cette ſcience, toute imparfaite qu'elle peut être encore chez eux, leur a ſuffi, dans cet état d'imperfection, depuis plus de quatre mille ans, pour maintenir leur religion. Leurs tables du Soleil & de la Lune, qui ne paroiſſent pas avoir une date moins ancienne, ſont encore paſſablement d'accord avec le ciel dans les conjonctions & les oppoſitions de la Lune, & en cela leur objet eſt rempli. Il eſt vrai que ces tables auroient certainement beſoin de très-grandes corrections dans tout autre point de l'orbite lunaire, dans les quadratures, par exemple; mais que leur importent ces corrections? Il n'arrive point d'éclipſes dans ces circonſtances. Les quadratures ne ſont donc nullement intéreſſantes pour eux. Le premier & le ſecond quartier de la Lune n'ont de rapport à aucun article de leur religion. Or, il n'en eſt pas de même des éclipſes qui ont, dans tous les temps, épouvanté les peuples foibles & ignorans. On ſait que le peuple ſaiſira toujours avec avidité les contes qu'on pourra lui faire ſur ce phénomène; c'eſt ainſi que les Indiens ont de tout temps été bercés par les Brames, & endormis avec la fable, que les ſignes que l'on remarque quelquefois dans le Soleil & dans la Lune (car ils ne connoiſſent point les termes d'éclipſes), proviennent d'un grand dragon ou ſerpent qui, dans ce moment, cherche à avaler le Soleil ou la Lune; & que ce n'eſt qu'avec les prières les plus ardentes & les plus ferventes, qu'ils parviendront à obtenir la délivrance de l'un ou de l'autre aſtre que le dragon cherche à dévorer: malheur qui, s'il arrivoit, leur ajoutent les Brames, entraîneroit pour jamais la privation de la lumière dans le monde entier.

Preſque tous les termes aſtronomiques des éclipſes ſont tirés de cette fable, chez les Indiens: de-là les Brames ont imaginé le terme de *pat-ona-chaudren*, qui veut dire *la Lune offenſée par le dragon*, pour exprimer la diſtance

de la Lune à ſon nœud; c'eſt ce que nous appelons *l'argument de la latitude.*

Les Brames devoient donc annoncer aux peuples des phénomènes effrayans; ils devoient leur en marquer le jour & l'heure; leur prédire, pour ainſi dire, à point nommé, un évènement capable, par ſes ſuites, de les obliger d'avoir recours à la divinité, & ſur-tout aux Brames eux-mêmes, comme ſe diſant les interprètes de la divinité, & les médiateurs des peuples auprès d'elle. En conſéquence les Brames, pour s'attirer la vénération & le reſpect de ces peuples, & les tenir continuellement dans la crainte & dans la dépendance, ont eu un beſoin eſſentiel du calcul des éclipſes. Pour le faire, il leur a fallu étudier les mouvemens du Soleil & de la Lune. Nous ſommes donc redevables à la religion des Brames, de tous les fragmens d'aſtronomie que nous retrouvons épars chez les Indiens, fragmens qui ne ſont viſiblement que des reſtes ou des débris d'un dépôt conſidérable d'obſervations aſtronomiques, & de recherches qui ont péri, & qui avoient ſervi de baſe aux Indiens pour établir leurs élémens, & leur théorie des éclipſes.

Ils ont dans l'Inde, à ce qu'il m'a paru, deux différentes méthodes de calculer les éclipſes: tous les Indiens ſavans que j'ai vus & interrogés là-deſſus, à Pondichery, ſe ſont accordés en cela. L'une de ces méthodes ſe nomme, ſelon eux, *vaquiam*, qui veut dire *nouveau*; & l'autre *ſittandum*, c'eſt-à-dire, *ancien.*

La méthode que j'ai apportée avec moi, & que j'ai fait imprimer, eſt ſelon le *vaquiam:* je n'ai pu me procurer l'ancienne.

Huit à dix ans avant mon voyage, M. de l'Iſle, de cette Académie, avoit déjà eu connoiſſance de deux méthodes de calculer les éclipſes, ſelon les Indiens; l'une lui fut communiquée en 1750 par le P. Patoüillet; l'autre en

Digitized by Google

1754 par le P. Duchamp, Miſſionnaire. Ces deux méthodes, qui reviennent à peu-près au même, ſe trouvent au dépôt de la Marine; mais qu'elles ſont loin de réunir l'ordre, la méthode, & la clarté néceſſaires pour être facilement entendues! & j'ai eu ſouvent occaſion, en liſant & étudiant ces méthodes, de n'avoir pu les connoître avant mon départ. Cependant, à l'aide des connoiſſances que j'ai pu acquérir à Pondichery, ſur l'aſtronomie du pays, de la façon de procéder des Brames, d'envelopper & de cacher leurs opérations aſtronomiques, je ſuis parvenu a débrouiller pluſieurs élémens très-importans de la théorie du Soleil, de la Lune, & des éclipſes, & de les comparer à ceux qui me furent communiqués à Pondichery en 1768 & 1769.

J'ai fait voir, dans mon Aſtronomie Indienne, que les Brames de la côte de Coromandel avoient une époque qu'ils nommoient *caly-ougam*, & que cette époque remontoit trois mille cent deux ans avant Jéſus-Chriſt.

Dans la méthode communiquée par le Père Patouillet, à M. de l'Iſle, l'auteur ſemble, à la vérité, dater d'une autre époque que de *caly-ougam;* mais il déguiſe ſa marche, & s'il ne paroît partir que de la mort de Salivaganam, arrivée la onzième année de la période de ſoixante ans des Brames, l'an 78 de Jéſus-Chriſt, c'eſt un moyen de plus qu'il a employé de marcher à l'ombre de grands nombres qui maſquent & voilent ſon principal point de départ. En effet, malgré les détours qu'il emploie, ſans doute pour n'être point découvert, j'ai retrouvé l'époque *caly-ougam*, & la préceſſion des équinoxes qu'il fait de 54″, comme la ſuppoſent généralement tous les Brames.

Une choſe eſt très-curieuſe, ce ſont des tables du Soleil & de la Lune, que l'on trouve à la ſuite de cette méthode, mais elles n'appartiennent point à la méthode; elles en ſuppoſent encore une autre tout-à-fait différente, que nous n'avons point, & qui vraiſemblablement eſt perdue; car

Digitized by Google

il y a tout lieu de croire que le P. Patouillet en auroit eu communication ainſi que des tables. Au ſurplus, j'ai trouvé la clef de ces tables ; je peux parler ainſi, car ces tables n'ont aucun titre ; les chiffres n'y ont nulle valeur apparente : on ne diſtingue, au premier coup d'œil, qu'une multitude de nombres aſſez ſimples en apparence, rangés cependant avec une eſpèce d'ordre, mais que le Miſſionnaire, qui n'entendoit point la matière, n'a pu débrouiller ſans doute. Il a pris ces nombres tels qu'on les lui a donnés, avec les fautes (car il y en a), & nous les a tranſmis de même.

Ces tables ont une forme lapidaire, c'eſt-à-dire, que je conjecture que, dans le principe, elles furent gravées ſur des pierres d'où on les aura extraites. Je crois avoir quelques raiſons de le ſoupçonner, & même d'aſſez vraiſemblables ; d'après les calculs que j'ai faits, leur époque paroîtroit environ mille ans plus ancienne encore que l'Ère *caly-ougam*, qui remonte déjà trois mille cent deux ans avant Jéſus-Chriſt. Ces tables auroient par cette raiſon précédé le déluge ; mais ſi en effet elles avoient été gravées ſur des pierres, il n'y auroit rien d'étonnant qu'elles euſſent reſiſté, & échappé à l'inondation générale ; & Joſèphe ne ſemble-t-il pas favorable à cette opinion?

Ces tables, pour le Soleil, ſont compriſes ſous neuf carrés-longs, ou parallèlogrammes, renfermant chacune ſoixante-dix petites caſes. Dix de ces caſes ſont horizontales, ou de ſuite ; & ſept ſont verticales.

Afin de conſerver l'authenticité de ces tables, je les préſente à l'Académie dans la forme qu'elles ont dans le manuſcrit : j'ai cru qu'il ſuffiſoit d'en expoſer ici le premier & le neuvième carré, qui donneront ſuffiſamment l'idée des ſept autres.

La première ſuite de chiffres du premier carré, celle qui eſt en tête, renferme les nombres naturels depuis 1 juſqu'à 10.

Digitized by Google

Pareillement la première ſuite du carré ſuivant renferme la ſuite des nombres naturels depuis 10 juſqu'à 20, & ainſi de ſuite dans les ſept autres carrés qui ſuivent; en ſorte que le neuvième carré renferme à ſa première ſuite les chiffres de la neuvième dixaine, ou depuis 80 juſqu'à 90 degrés.

Or, ayant ſuppoſé que ces nombres étoient une eſpèce de titre renfermant des degrés, j'en ai dès-lors conclu, avec la plus grande facilité, les autres nombres de chaque carré.

Cette première ſuite de chiffres n'étant donc évidemment autre choſe, ſelon moi, que des degrés qui repréſentent la diſtance du Soleil à ſon apogée & à ſon périgée en même temps; la ſeconde ſuite ſera l'équation du centre du Soleil, exprimée en minutes de degré, & la troiſième ſera les ſecondes de ces minutes.

La quatrième renfermera le mouvement journalier du Soleil, exprimé en minutes de degré, en partant de ſon périgée; & la cinquième marquera les ſecondes de ces minutes.

Ce mouvement, par cette raiſon, va en diminuant dans la table.

La ſixième ſuite de caſes renferme pareillement le mouvement journalier du Soleil, mais en partant de ſon apogée, en ſorte que ce mouvement-ci fait tout le contraire du premier, puiſqu'il va inſenſiblement en augmentant; enfin la ſeptième ſuite donne les ſecondes.

Ces deux mouvemens s'avancent donc, pour ainſi dire, en ſens contraire l'un de l'autre, pour ſe rencontrer & s'accorder enſemble à 90 degrés, où doit être la moyenne diſtance du Soleil à la Terre. Là, ils ſont de la même quantité; ils forment ce que nous appelons le moyen mouvement journalier, qui eſt, dans le Soleil, de 59′ 8″, ſelon ces tables.

Digitized by Google

On voit encore que l'auteur suppose l'équation du centre du Soleil, de 130′ 34″ (2^d 10′ 34″) à 90 degrés juste de son périgée: c'est ce que nous appelons la plus grande équation du centre du Soleil, que Ptolémée faisoit de 2^d 23′ 10″; mais les tables Indiennes ne la supposent, comme l'on voit, que de 2^d 10′ $\frac{1}{2}$: les Astronomes modernes ne trouvent que 1^d 56′. L'on en doit conclure que la détermination des Indiens approche beaucoup davantage de la nôtre, que ne fait celle de Ptolémée.

Les tables de la Lune ont la même forme que celles du Soleil: on y trouve le moyen mouvement journalier de la Lune, de 790′ 35″ (13^d 10′ 35″), & la plus grande équation de son centre, de 302′ 26″ (5^d 2′ 26″). M. Cassini la suppose de 4^d 58′ 44″, & M. Halley de 4^d 57′.46″.

Cette équation est la seule qui ait lieu dans les syzygies. C'est aussi la seule qu'il importoit aux Brames de connoître dans leur système d'appliquer l'astronomie au maintien de la religion.

On remarque dans la Lune une autre inégalité, dont on attribue la découverte à Ptolémée; celle-ci peut encore aller jusqu'à 2^d $\frac{1}{2}$. Elle est très-considérable, comme l'on voit; mais comme elle ne se fait remarquer que dans les quadratures, les Brames qui ne font nulle attention à ces points de l'orbite lunaire, l'ont de tout temps ignorée, ils s'inquiètent même fort peu de son existence; si on leur en parle, ils ont l'air de ne pas seulement vous écouter.

A la suite de ces tables du Soleil & de la Lune, on en trouve une autre intitulée *(pour les Planètes)*, & qui ne renferme cependant que les diamètres du Soleil & de la Lune. Cette table est construite avec un art tout-à-fait ingénieux, que ni les Hypparque, ni les Ptolémée, ni aucun astronome Grec de l'école d'Alexandrie, n'ont jamais connu; mais il a fallu encore deviner cette table, car le titre que l'on voit qu'elle porte, n'en peut guère indiquer l'usage. Elle m'a paru fondée sur trois suppositions,

dont

dont l'une eſt conforme aux obſervations modernes les plus préciſes.

La première de ces trois ſuppoſitions eſt que, dans tous les cas poſſibles, depuis 0^d juſqu'à 90^d, le demi-diamètre apparent de la Lune & celui du Soleil ajoutés enſemble, ſont égaux à un demi-degré, ou à $30'$. Cette ſuppoſition eſt à la vérité en défaut d'un peu plus d'une minute; mais il n'y a guère plus d'un ſiècle que nous ne connoiſſions pas en Europe la ſomme des demi-diamètres du Soleil & de la Lune, à une minute près.

La ſeconde ſuppoſition, qui ſuit de la nature de ces tables, eſt que le demi-diamètre du Soleil apogée eſt égal au demi-diamètre de la Lune dans ſes moyennes diſtances; cette ſuppoſition eſt confirmée par les obſervations de nos jours: en effet, ſelon M. Caſſini, ces diamètres ne diffèrent entr'eux, dans ces circonſtances, que de $4''$, & ſelon M. Halley, ils ne diffèrent point du tout.

Enfin la troiſième ſuppoſition eſt que le demi-diamètre apparent du Soleil, dans ſes moyennes diſtances, excède de $2'\ 30''$ celui de la Lune apogée, ſuppoſition qui n'eſt en excès que de $1'\ 5$ à $6''$.

D'après ces trois ſuppoſitions, l'auteur Indien a conſtruit ſa table dans la même forme que les précédentes. Les nombres naturels qui ſont en tête de chaque carré, depuis 1 juſqu'à 90^d, repréſentent donc, pour le Soleil, les degrés de ſon éloignement à ſon apogée; & pour la Lune, ce ſont les degrés de ſon éloignement à ſa moyenne diſtance à la Terre, en allant à ſon apogée: en conſéquence, la ſeconde ſuite de caſes renferme les demi-diamètres apparens du Soleil, depuis ſon apogée juſqu'à 90^d de diſtance; la troiſième ſuite donne les ſecondes.

La quatrième ſuite donne les demi-diamètres apparens de la Lune, depuis ſa moyenne diſtance juſqu'à ſon apogée; la cinquième renferme les ſecondes.

Il ſuit de-là, que les demi-diamètres du Soleil vont en croiſſant, dans cette table, & ceux de la Lune en diminuant,

& cela ſelon une proportion qui eſt telle qu'un demi-diamètre quelconque, pris à volonté dans cette table, celui du Soleil, par exemple, à quelque degré qu'il réponde, eſt toujours complétement à un demi-degré de celui de la Lune, & réciproquement.

Je n'ai plus qu'un mot à dire concernant la latitude de la Lune, dont la table termine tout ce qui appartient au Soleil & à la Lune. L'inclinaiſon de l'orbite de la Lune n'eſt, dans cette table, que de $4^d\,30'$; c'eſt le ſeul élément de la théorie de la Lune, qui diffère de nos tables, d'une quantité même aſſez conſidérable, car cette inclinaiſon s'obſerve de 5 degrés au moins.

Cette différence d'un demi-degré ou 30 minutes, ſuffit pour faire trouver écliptique une pleine Lune qui pourroit cependant n'être pas éclipſée; mais dans ce cas même, la Lune n'éviteroit l'ombre de la Terre que d'une très-petite quantité; elle en effleureroit au moins la pénombre, & vraiſemblablement en apercevroit-on quelques veſtiges.

Nous ne ſavons pas comment les Brames ont déterminé l'inclinaiſon de l'orbite de la Lune: s'ils l'ont déduite des éclipſes, on ſait qu'à une ſi petite diſtance du nœud, une erreur de 4 à 5 ſecondes dans la latitude, en occaſionne une de 4 à 5 minutes, à 90 degrés du nœud, dans l'arc qui meſure l'inclinaiſon de l'orbite.

Il eſt beaucoup plus vraiſemblable de penſer qu'ils ont déterminé cette inclinaiſon, en comparant la Lune à des étoiles remarquables. Cette méthode qu'ils paroiſſent avoir ſuivie dans toutes les obſervations qu'ils ont faites originairement ſur la Lune, étoit infiniment plus ſûre que la première; pour qu'ils ſe trompaſſent en effet d'un demi-degré ſur l'inclinaiſon, il eût fallu qu'ils ſe fuſſent trompés dans leurs obſervations, d'une quantité égale au diamètre entier de la Lune, ce qui eſt impoſſible.

Enfin des Aſtronomes qui ont déterminé la plus grande équation du centre de la Lune, à deux ou trois minutes près de ce que nous trouvons aujourd'hui pour cette

Digitized by Google

équation, ne peuvent pas avoir commis une erreur de 30 minutes & même plus sur l'inclinaison de l'orbite lunaire. Il se peut très-bien, & je serois assez porté à le penser, que les Brames, en construisant leurs tables, aient diminué à dessein l'inclinaison de l'orbite lunaire; à moins que l'on n'aime mieux supposer encore que cette inclinaison a augmenté depuis la construction de ces tables, comme on admet une diminution dans l'obliquité de l'écliptique depuis deux à trois mille ans.

Un fait est certain, c'est que la même table qui donne ici la latitude de la Lune de degré en degré, l'inclinaison de son orbite de $4^d\ 30'$ seulement, donne également la déclinaison du Soleil pour les mêmes degrés, & l'obliquité de l'écliptique de 24 degrés juste, mais que nous n'observons cependant aujourd'hui que de $23^d\ 28'\ \frac{1}{4}$; en sorte que la somme de l'obliquité de l'écliptique & de l'inclinaison de l'orbite de la Lune, est de $28^d\ 30'$ dans ces tables, & de $28^d\ 29$ à $30'$ dans les nôtres; ce qui sembleroit indiquer que les Brames auroient bien observé; & que l'inclinaison de l'orbite de la Lune auroit augmenté d'un degré ou environ, depuis leurs premières observations & la construction de leurs tables.

Dans la supposition que les Brames auroient diminué à dessein l'inclinaison observée de l'orbite de la Lune, on en pourroit peut-être trouver la raison dans les motifs qui les engagent à prédire les éclipses, mais je réserve ces détails pour nos assemblées particulières.

Digitized by Google

TABLES INDIENNES des mouvemens du Soleil, de la Lune, & de leurs diamètres apparens ; de la latitude de la Lune, & de l'obliquité de l'Écliptique, dont il eſt queſtion dans le Mémoire précédent.

Pour le Soleil.

Ravimanda.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Padacani.	2.	4.	7.	9.	11.	13.	16.	18.	20.	23.
Danagatti.	20.	20.	0.	19.	38.	57.	15.	33.	51.	8.
Bougogatti.	61.	61.	61.	61.	61.	61.	61.	61.	61.	61.
	26.	26.	26.	26.	25.	25.	24.	24.	24.	23.
	56.	56.	56.	56.	56.	56.	56.	56.	56.	56.
	50.	50.	50.	50.	51.	51.	51.	52.	52.	53.

11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
25.	27.	29.	32.	34.	36.	38.	41.	43.	45.
24.	40.	55.	10.	24.	37.	49.	0.	11.	21.
61.	61.	61.	61.	61.	61.	61.	61.	61.	61.
22.	22.	21.	21.	20.	29.	16.	17.	17.	16.
56.	56.	56.	56.	56.	56.	56.	56.	56.	57.
54.	54.	55.	55.	56.	57.	58.	59.	59.	0.

21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.	30.
47.	49.	51.	53.	55.	57.	60.	62.	63.	65.
30.	38.	45.	51.	56.	59.	0.	0.	59.	57.
61.	61.	61.	61.	61.	61.	61.	61.	61.	61.
15.	14.	13.	12.	10.	9.	7.	6.	5.	4.
57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.
1.	2.	3.	4.	6.	7.	9.	10.	11.	12.

Digitized by Google

31.	32.	33.	34.	35.	36.	37.	38.	39.	40.
67.	69.	71.	73.	75.	77.	79.	70.	72.	84.
53.	49.	43.	36.	27.	17.	6.	54.	40.	25.
61.	61.	61.	60.	60.	60.	60.	60.	60.	60.
3.	2.	0.	59.	57.	56.	55.	54.	52.	51.
57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.
13.	14.	16.	17.	19.	20.	21.	22.	24.	25.

41.	42.	43.	44.	45.	46.	47.	48.	49.	50.
86.	87.	89.	91.	92.	94.	95.	97.	98.	100.
8.	49.	28.	5.	40.	15.	50.	23.	53.	20.
60.	60.	60.	60.	60.	60.	60.	60.	60.	60.
49.	45.	45.	44.	42.	41.	40.	38.	37.	35.
57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.
27.	29.	31.	32.	34.	35.	36.	38.	39.	41.

51.	52.	53.	54.	55.	56.	57.	58.	59.	60.
101.	103.	104.	105.	107.	108.	109.	110.	112.	113.
45.	9.	32.	53.	11.	28.	43.	13.	7.	15.
60.	60.	60.	60.	60.	60.	60.	60.	60.	60.
34.	31.	30.	28.	26.	24.	22.	20.	18.	16.
57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.	58.
43.	45.	46.	48.	50.	52.	56.	57.	58.	0.

61.	62.	63.	64.	65.	66.	67.	68.	69.	70.
114.	115.	116.	117.	118.	119.	120.	121.	121.	122.
21.	25.	28.	27.	27.	23.	17.	9.	59.	47.
60.	60.	60.	60.	60.	60.	60.	59.	59.	59.
13.	11.	9.	6.	6.	4.	1.	59.	57.	55.
58.	58.	58.	58.	58.	58.	58.	58.	58.	58.
3.	4.	7.	8.	10.	12.	15.	17.	21.	21.

Digitized by Google

71.	72.	73.	74.	75.	76.	77.	78.	79.	80.
123.	124.	124.	125.	126.	126.	127.	127.	128.	128.
33.	14.	58.	36.	11.	44.	15.	44.	11.	36.
59.	59.	59.	59.	59.	59.	59.	59.	59.	59.
53.	51.	48.	45.	42.	40.	38.	36.	34.	32.
58.	58.	58.	58.	58.	58.	58.	58.	58.	58.
23.	25.	28.	31.	34.	36.	38.	40.	42.	44.

81.	82.	83.	84.	85.	86.	87.	88.	89.	90.
128.	129.	129.	129.	130.	130.	130.	130.	130.	130.
59.	19.	36.	51.	5.	15.	22.	21.	31.	34.
59.	59.	59.	59.	59.	59.	59.	59.	59.	59.
30.	27.	24.	22.	20.	17.	15.	12.	11.	8.
58.	58.	58.	58.	58.	58.	59.	59.	59.	59.
46.	49.	52.	54.	56.	59.	1.	4.	5.	8.

Pour la Lune.

Chandia.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Padacani.	5.	10.	16.	21.	26.	31.	37.	42.	47.	52.
	20.	40.	0.	19.	38.	35.	12.	28.	44.	59.
	860.	860.	860.	860.	859.	859.	859.	859.	859.	858.
	15.	15.	15.	11.	52.	43.	32.	21.	3.	51.
	720.	720.	720.	720.	721.	721.	721.	721.	722.	722.
	55.	55.	55.	59.	8.	27.	38.	49.	4.	19.

11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
58.	63.	68.	73.	79.	84.	89.	94.	99.	104.
13.	26.	38.	50.	9.	13.	23.	31.	37.	40.
858.	858.	857.	857.	857.	856.	856.	856.	855.	855.
36.	16.	58.	38.	22.	51.	30.	2.	48.	0.
722.	722.	722.	723.	723.	724.	724.	725.	725.	726.
35.	54.	5.	37.	48.	19.	40.	8.	21.	10.

Digitized by Google

21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.	30.
109.	114.	119.	124.	128.	133.	137.	142.	146.	151.
39.	35.	26.	12.	51.	26.	37.	28.	37.	37.
854.	854.	853.	853.	852.	851.	851.	850.	850.	849.
43.	7.	42.	9.	48.	50.	50.	58.	16.	58.
726.	727.	727.	728.	728.	729.	729.	730.	730.	730.
37.	8.	28.	1.	22.	20.	40.	10.	14.	12.

31.	32.	33.	34.	35.	36.	37.	38.	39.	40.
156.	160.	165.	169.	173.	178.	182.	186.	190.	194.
5.	25.	0.	23.	45.	3.	15.	24.	30.	34.
849.	848.	847.	847.	846.	845.	845.	844.	844.	843.
10.	34.	58.	23.	39.	58.	23.	38.	3.	31.
732.	732.	733.	733.	734.	735.	735.	736.	737.	737.
0.	24.	12.	47.	31.	12.	47.	32.	7.	36.

41.	42.	43.	44.	45.	46.	47.	48.	49.	50.
198.	202.	206.	210.	213.	227.	221.	224.	228.	231.
34.	30.	24.	16.	58.	36.	11.	45.	15.	44.
842.	842.	841.	840.	839.	839.	837.	836.	835.	834.
51.	58.	21.	35.	42.	0.	45.	40.	35.	31.
738.	739.	739.	740.	741.	742.	743.	748.	745.	746.
19.	12.	49.	35.	28.	10.	25.	30.	38.	39.

51.	52.	53.	54.	55.	56.	57.	58.	59.	60.
235.	238.	241.	244.	247.	250.	253.	256.	259.	261.
6.	24.	37.	45.	45.	46.	41.	32.	27.	55.
833.	832.	831.	830.	829.	828.	821.	826.	824.	823.
35.	34.	31.	12.	33.	47.	1.	30.	48.	20.
747.	748.	749.	750.	751.	752.	753.	754.	756.	757.
35.	36.	39.	58.	31.	29.	3.	40.	21.	61.

Digitized by Google

61.	62.	63.	64.	65.	66.	67.	68.	69.	70.
264.	267.	269.	271.	274.	276.	278.	280.	282.	284.
30.	3.	28.	49.	6.	18.	28.	34.	28.	20.
822.	822.	821.	890.	819.	818.	816.	815.	814.	813.
53.	53.	13.	13.	2.	13.	58.	45.	54.	41.
758.	758.	759.	759.	762.	762.	764.	765.	766.	767.
13.	50.	57.	57.	8.	57.	12.	15.	16.	39.

Azamayanamou.

71.	72.	73.	74.	75.	76.	77.	78.	79.	80.
285.	287.	289.	290.	292.	293.	294.	295.	297.	298.
54.	35.	5.	39.	6.	28.	45.	57.	4.	6.
812.	811.	810.	809.	808.	806.	805.	804.	803.	802.
34.	25.	20.	5.	7.	43.	42.	31.	16.	9.
768.	769.	770.	772.	773.	774.	775.	776.	777.	779.
36.	45.	50.	5.	3.	37.	39.	39.	54.	1.

81.	82.	83.	84.	85.	86.	87.	88.	89.	90.
299.	299.	300.	301.	301.	301.	301.	309.	309.	302.
0.	50.	37.	10.	25.	59.	52.	4.	15.	26.
800.	799.	798.	797.	796.	794.	793.	792.	791.	790.
56.	30.	21.	20.	11.	51.	38.	23.	13.	35.
780.	781.	782.	783.	784.	786.	787.	788.	789.	790.
14.	31.	49.	50.	59.	19.	33.	47.	57.	35.

Pour les Planètes.

Abazarda.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Padacani.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.
Danam.	1.	2.	3.	4.	6.	7.	8.	9.	10.	11.
Bouſſam.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.
	59.	58.	57.	56.	54.	53.	52.	51.	50.	49.

Digitized by Google

11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.
13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	21.	22.	23.
14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.
47.	46.	45.	43.	43.	42.	41.	39.	38.	37.

21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.	30.
15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.
24.	25.	26.	27.	29.	30.	31.	32.	33.	34.
14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.
36.	35.	34.	33.	31.	30.	28.	27.	27.	26.

31.	32,	33.	34.	35.	36.	37.	38.	39.	40.
15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.
36.	37.	38.	39.	40.	41.	42.	43.	44.	45.
14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.
24.	23.	22.	21.	20.	19.	18.	17.	16.	15.

41.	42.	43.	44.	45.	46.	47.	48.	49.	50.
15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.
46.	47.	48.	49.	50.	51.	52.	53.	54.	55.
14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.
14.	13.	12.	11.	10.	9.	8.	8.	6.	5.

Digitized by Google

51.	52.	53.	54.	55.	56.	57.	58.	59.	60.
15.	15.	15.	15.	15.	15.	16.	16.	16.	16.
56.	57.	58.	58.	59.	0.	1.	2.	2.	3.
14.	14.	14.	14.	14.	14.	13.	13.	13.	13.
4.	3.	2.	2.	1.	0.	59.	58.	57.	57.

61.	62.	63.	64.	65.	66.	67.	68.	69.	70.
16.	16.	16.	16.	16.	16.	16.	16.	16.	16.
4.	4.	5.	6.	7.	7.	8.	8.	9.	9.
13.	13.	13.	13.	13.	13.	13.	13.	13.	13.
56.	56.	53.	54.	53.	53.	52.	52.	51.	51.

71.	72.	73.	74.	75.	76.	77.	78.	79.	80.
16.	16.	16.	16.	16.	16.	16.	16.	16.	16.
10.	10.	11.	12.	12.	12.	12.	13.	13.	13.
13.	13.	13.	13.	13.	13.	13.	13.	13.	13.
50.	50.	49.	48.	48.	48.	48.	47.	47.	47.

81.	82.	83.	84.	85.	86.	87.	88.	89.	90.
16.	16.	16.	16.	16.	16.	16.	16.	16.	16.
13.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	15.	15.
13.	13.	13.	13.	13.	13.	13.	13.	13.	13.
47.	46.	46.	46.	46.	46.	46.	46.	45.	45.

Les Tables ſuivantes repréſentent la latitude de la Lune & l'obliquité de l'écliptique: la clé que j'ai trouvée pour ouvrir l'entrée aux Tables précédentes ſervira pour les ſuivantes.

Digitized by Google

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	Cranticalam.
24.	48.	73.	197.	121.	145.	170.	194.	218.	242.	Chachivik.
23.	46.	8.	28.	44.	57.	10.	20.	23.	30.	Chebacalam.
4.	9.	14.	18.	23.	28.	37.	37.	42.	46.	
44.	28.	11.	53.	34.	13.	52.	30.	8.	46.	

11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
266.	290.	314.	338.	361.	385.	408.	432.	455.	478.
28.	25.	15.	1.	41.	17.	47.	10.	28.	38.
51.	55.	60.	65.	69.	74.	78.	83.	87.	62.
23.	59.	35.	10.	44.	15.	45.	17.	42.	8.

21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.	30.
501.	524.	547.	570.	592.	614.	636.	659.	680.	702.
41.	35.	22.	5.	27.	46.	58.	2.	50.	39.
96.	100.	105.	109.	113.	118.	122.	126.	130.	135.
30.	55.	18.	57.	52.	22.	26.	38.	53.	0.

31.	32.	33.	34.	35.	36.	37.	38.	39.	40.
723.	745.	766.	787.	808.	828.	848.	868.	887.	908.
56.	33.	40.	31.	9.	33.	47.	45.	37.	7.
139.	143.	147.	150.	154.	158.	162.	166.	169.	173.
3.	5.	3.	58.	50.	40.	26.	9.	49.	25.

Digitized by Google

41.	42.	43.	44.	45.	46.	47.	48.	49.	50.
927.	946.	965.	983.	1001.	1019.	1037.	1054.	1071.	1088.
21.	27.	13.	41.	52.	50.	29.	48.	47.	26.
176.	180.	183.	187.	190.	194.	197.	200.	203.	206.
58.	30.	53.	23.	44.	2.	17.	29.	36.	40.

51.	52.	53.	54.	55.	56.	57.	58.	59.	60.
1104.	1120.	1136.	1152.	1167.	1181.	1196.	1220.	1223.	1237.
50.	54.	40.	5.	10.	54.	16.	14.	44.	15.
209.	212.	215.	218.	221.	223.	226.	228.	231.	233.
39.	35.	29.	17.	0.	41.	18.	49.	18.	43.

61.	62.	63.	64.	65.	66.	67.	68.	69.	70.
1250.	1262.	1274.	1286.	1297.	1308.	1319.	1329.	1338.	1348.
3.	31.	36.	20.	27.	30.	3.	9.	48.	7.
236.	238.	240.	242.	244.	246.	248.	250.	251.	253.
2.	18.	29.	35.	45.	27.	20.	7.	50.	29.

71.	72.	73.	74.	75.	76.	77.	78.	79.	80.
1356.	1365.	1373.	1380.	1387.	1394.	1400.	1406.	1411.	1416.
55.	20.	20.	53.	55.	29.	49.	33.	52.	46.
255.	256.	257.	259.	260.	261.	262.	263.	264.	265.
5.	34.	58.	19.	36.	47.	54.	57.	51.	40.

Digitized by Google

81.	82.	83.	84.	85.	86.	87.	88.	89.	90.
1421.	1425.	1428.	1431.	1435.	1436.	1437.	1439.	1439.	1440.
8.	6.	36.	29.	5.	14.	55.	0.	41.	0.
266.	267.	267.	267.	268.	268.	269.	269.	269.	270.
22.	0.	23.	59.	47.	47.	8.	28.	46.	0.

SUPPLÉMENT

Où l'on fait voir que les Équations aux différences ordinaires, pour lesquelles les conditions d'intégrabilité ne sont pas satisfaites, sont susceptibles d'une véritable intégration, & que c'est de cette intégration que dépend celle des équations aux différences partielles élevées.

Par M. MONGE.

I.

ON sait que toutes les équations aux différences ordinaires à deux variables, appartiennent à des courbes réelles. En effet, pour le premier ordre, elles peuvent toutes, excepté une seule, être mises sous la forme $Mdx + Ndy = 0$; & par conséquent, étant pris un point à volonté, c'est-à-dire, étant données les valeurs de x & de y, on peut toujours trouver par cette équation l'inclinaison de la tangente à la courbe en ce point, ou, ce qui revient au même, trouver la direction du point décrivant, parce que cette direction est déterminée par le rapport de dy à dx, que donne cette équation. Pour le second ordre, toutes les équations à deux variables, excepté une seule, peuvent être mises sous la forme $Lddy + Mddx + N = 0$, L, M, N, renfermant les variables avec leurs différences premières. Ainsi, étant donné un point à volonté, & la direction de la tangente en ce point, ce qui détermine x, y, $\frac{dy}{dx}$, & faisant la valeur de ddx, une hypothèse arbitraire, ce dont on est le maître; il est toujours possible, au moyen de

l'équation différentielle, de trouver la valeur de ddy, & par conſéquent, le changement de direction que le point décrivant éprouve dans cet endroit de la courbe, ou, ce qui revient au même, de trouver le rayon de courbure de la courbe. Il en eſt de même des ordres ſupérieurs.

Lorſque les équations différentielles du premier ordre renferment plus de deux variables, on peut les diviſer en deux claſſes; les unes, comme les ſuivantes,

$$dz^2 = a^2(dx^2 + dy^2),$$
$$z^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) = a^2(dx^2 + dy^2),$$

ſont élevées par rapport aux différences, & elles ſont toutes regardées comme abſurdes; les autres peuvent être ramenées à la forme linéaire

$$Ldx + Mdy + Ndz\ldots = 0,$$

dans laquelle les coéfficiens $L, M, N\ldots$ peuvent renfermer les variables ſous des radicaux; & parmi ces dernières, celles qui ne ſatisfont pas à certaines conditions, ſont encore regardées comme abſurdes. Le nombre des conditions dont il s'agit ici, eſt toujours égal au nombre des variables, moins deux; par exemple, pour le cas de trois variables, ſi l'équation différentielle eſt miſe ſous la forme $dz = p\,dx + q\,dy$, l'équation de condition eſt $(\frac{dp}{dy}) = (\frac{dq}{dx})$, que l'on peut développer de la manière ſuivante :

$$L[(\tfrac{dM}{dz}) - (\tfrac{dN}{dy})] + M[(\tfrac{dN}{dx}) - (\tfrac{dL}{dz})] + N[(\tfrac{dL}{dy}) - (\tfrac{dM}{dx})] = 0.$$

Pour le cas de quatre variables, ſi l'équation différentielle eſt miſe ſous la forme $dz = p\,du + q\,dx + r\,dy$, les conditions ſont

$$(\tfrac{d\,dp}{dx\,dy}) = (\tfrac{d\,dq}{du\,dy}),$$

$$\left(\frac{d\,d\,p}{d\,x\,d\,y}\right) = \left(\frac{d\,d\,r}{d\,u\,d\,x}\right),$$

& on peut les développer comme dans le cas précédent.

S'il y a cinq variables, & que l'équation différentielle soit sous la forme $dz = p\,dv + q\,du + r\,dx + s\,dy$, les trois conditions sont

$$\left(\frac{d^3\,p}{du\,dx\,dy}\right) = \left(\frac{d^3\,q}{dv\,dx\,dy}\right),$$

$$\left(\frac{d^3\,p}{du\,dx\,dy}\right) = \left(\frac{d^3\,r}{dv\,du\,dy}\right),$$

$$\left(\frac{d^3\,p}{du\,dx\,dy}\right) = \left(\frac{d^3\,s}{dv\,du\,dx}\right);$$

& ainsi de suite, pour un plus grand nombre de variables.

Je me propose de faire voir qu'il n'y a aucune équation différentielle qui soit absurde, si toutefois l'on entend par le mot qu'elle exprime, une propriété impossible, imaginaire,..... &c. Je ferai voir que toutes les équations différentielles expriment des propriétés réelles, soit qu'elles satisfassent ou non aux conditions que je viens de rapporter; je montrerai qu'elles sont toutes susceptibles d'une véritable intégration, & pour jeter sur cette matière un plus grand jour, j'exposerai ce que signifient, dans l'espace, celles qui sont à trois variables.

II.

De toutes les équations aux différences ordinaires du premier ordre, & à deux variables, il n'y en a qu'une seule qui ne soit pas linéaire, & cette équation est

$$M^2\,dx^{2m} + N^2\,dy^{2m} = 0,$$

M, N étant fonctions de x, y; or, cette équation ne peut rien exprimer de réel, à moins que l'on n'ait en même temps $M = 0$, $N = 0$, ou que l'on n'ait en même temps $dx = 0$, $dy = 0$. Le premier de ces deux résultats ne peut pas être regardé comme une intégrale, parce

parce qu'il ne renferme pas de conſtante arbitraire; donc, la véritable intégrale de cette équation eſt le ſyſtème des deux équations ſimultanées $x = a, y = b$; c'eſt-à-dire, que l'équation dont il s'agit n'appartient pas à une ligne courbe, mais à un point unique quelconque, pris ſur le plan des x, y. Il y a donc cette différence entre les équations linéaires du premier ordre à deux variables, & la ſeule équation de cet ordre qui ſoit élevée, que les premières appartiennent toutes à des courbes, & que l'intégrale de chacune d'elles eſt une équation unique, complétée par une ſeule conſtante arbitraire; tandis que la dernière appartient à un point, & que ſon intégrale eſt le ſyſtème de deux équations finies ſimultanées, & complétées par deux arbitraires.

La propriété de l'équation aux différences ordinaires élevées, du premier ordre & à deux variables, avoit déjà été obſervée; mais comme cette équation eſt unique, on l'avoit regardée comme une exception à la règle générale, & l'on n'avoit pas remarqué que c'étoit le commencement d'une chaîne immenſe, à laquelle tenoient les plus grandes difficultés du calcul intégral. En effet, parmi les équations aux différences ordinaires à trois variables, celles qui ſatisfont à la condition que j'ai rapportée dans l'*article précédent*, & qui eſt connue ſous le nom de *condition d'intégrabilité*, appartiennent toutes à des ſurfaces courbes, & l'intégrale de chacune d'elles eſt une équation unique, complétée par une ſeule conſtante arbitraire; mais toutes les équations qui ne ſatisfont pas à cette condition, ſont en nombre infini, & elles n'appartiennent pas à des ſurfaces; leurs lieux ſont des courbes à double courbure, tracées dans l'eſpace, & l'intégrale de chacune d'elles eſt le ſyſtème de deux équations ſimultanées. Enfin, parmi ces équations, il n'y en a qu'une ſeule,

$$M^{\lambda} dx^{\lambda m} + N^{\lambda} dy^{\lambda m} + P^{\lambda} dz^{\lambda m} = 0,$$

dont l'intégrale ſoit le ſyſtème de trois équations finies ſimultanées, $x = a$, $y = b$, $z = c$; elle n'appartient ni à une ſurface courbe, ni à une courbe à double courbure; ſon lieu eſt un point unique pris arbitrairement dans l'eſpace.

Pour les équations aux différences ordinaires du premier ordre, à quatre variables, l'intégrale de celles qui ſatisfont en même temps aux deux conditions que j'ai rapportées, eſt une ſeule équation complétée par une ſeule conſtante arbitraire; l'intégrale de celles qui ne ſatisfont qu'à une ſeule de ces deux conditions, eſt le ſyſtème de deux équations ſimultanées; l'intégrale de celles qui ne ſatisfont à aucune des deux conditions, eſt le ſyſtème de trois équations finies ſimultanées; enfin il n'y en a qu'une ſeule,

$$M^2 du^{2m} + N^2 dx^{2m} + P^2 dy^{2m} + Q^2 dz^{2m} = 0,$$

dont l'intégrale ſoit le ſyſtème de quatre équations ſimultanées, $u = a$, $x = b$, $y = c$, $z = e$. Il en eſt de même pour un plus grand nombre de variables.

Ainſi l'objet des équations connues ſous le nom de *conditions d'intégrabilité*, n'eſt pas, comme on l'a cru juſqu'ici, d'indiquer celles des équations différentielles dont les intégrales ſont poſſibles, mais de faire connoître le nombre des équations finies ſimultanées dont doivent être compoſées les intégrales qui ſont toujours poſſibles. Avant que d'aller plus loin, éclairciſſons ce qu'on vient de voir, par des exemples ſimples.

III.

EXEMPLE I. Soit propoſée l'équation

$$(A) \qquad dz^2 = a^2 (dx^2 + dy^2),$$

dans laquelle a eſt une conſtante donnée. Il eſt bien évident que cette équation appartient à la courbe à double courbure, dont les élémens font un angle conſtant avec le plan des x, y; ainſi les équations de toutes les droites

Digitized by Google

qui ſont le même angle avec le plan des x, y, doivent ſatisfaire à la propoſée, quelles que ſoient d'ailleurs les directions de ces droites; or ces équations ſont

$$(B) \qquad x = \alpha z + \mathfrak{C},$$

$$(C) \qquad y = z\sqrt{\left(\frac{1}{a^2} - \alpha^2\right)} + \gamma,$$

α, $\mathfrak{C}$, γ étant trois conſtantes arbitraires; donc le ſyſtème de ces deux équations priſes ſimultanément eſt une ſolution de la propoſée. En effet, ſi l'on différencie ces deux équations, les deux conſtantes arbitraires $\mathfrak{C}$, γ, s'évanouiront, & l'on aura

$$dx = \alpha dz,$$

$$dy = dz\sqrt{\left(\frac{1}{a^2} - \alpha^2\right)};$$

& éliminant α entre ces deux dernières équations, on aura

$$dz^2 = a^2 (dx^2 + dy^2).$$

Quoique le ſyſtème des deux équations *(A)*, *(B)*, ſoit complété par trois conſtantes arbitraires, α, $\mathfrak{C}$, γ, on va voir qu'il n'eſt pas l'intégrale complète de l'équation *(A)*, & que cette intégrale complète eſt encore plus générale.

Si l'on élimine entre *(A)* & *(B)* la conſtante α, l'équation réſultante

$$(x - \mathfrak{C})^2 + (y - \gamma)^2 = \frac{z^2}{a^2}$$

ſera celle de toutes les ſurfaces coniques dont les ſommets ſeront dans le plan des x, y, & dont les côtés ſeront avec ce plan l'angle conſtant; ſi l'on fait $\gamma = \phi\mathfrak{C}$, ϕ étant une fonction arbitraire, l'équation

$$(x - \mathfrak{C})^2 + (y - \phi\mathfrak{C})^2 = \frac{z^2}{a^2}$$

appartiendra ſeulement à celles de ces ſurfaces coniques dont le ſommet ſera placé ſur une certaine courbe tracée dans le plan des x, y, l'équation de cette courbe étant

$y = \varphi x$; & si l'on considère deux de ces surfaces courbes consécutives, elles se couperont en une droite dont on aura la seconde équation, en différenciant l'équation des cônes par rapport au paramètre variable ζ; ainsi les équations de cette droite seront

$$(D) \qquad (x - \zeta)^2 + (y - \varphi\zeta)^2 = \frac{z^2}{a^2},$$

$$(E) \qquad x - \zeta + (y - \varphi\zeta)\varphi'\zeta = 0.$$

Cette droite formera encore avec le plan des x, y, l'angle constant, & elle sera une de celles qui satisfont à l'équation *(A)*. Mais si l'on considère la suite des surfaces coniques, on aura une suite de droites comme la précédente, qui ne différeront de position qu'en vertu du paramètre variable ζ; & toutes ces droites se trouvant deux à deux consécutivement sur une même surface conique, elles se couperont nécessairement deux à deux consécutivement, & elles seront par conséquent les tangentes d'une même courbe à double courbure: donc les tangentes de cette courbe à double courbure étant également inclinées au plan des x, y, les élémens de cette courbe feront, avec ce plan, des angles constans; donc enfin les équations de cette courbe seront l'intégrale complète de la proposée.

Or il est évident que l'on aura les équations de la courbe à double courbure, en différenciant les deux équations *(D)*, *(E)*, par rapport au paramètre variable ζ; de plus, l'équation *(E)* est déjà la différentielle de *(D)* prise de cette manière: donc l'intégrale complète de l'équation *(A)* est le système des trois équations simultanées,

$$(D) \qquad (x - \zeta)^2 + (y - \varphi\zeta)^2 = \frac{z^2}{a^2},$$

$$(E) \qquad x - \zeta + (y - \varphi\zeta)\varphi'\zeta = 0,$$

$$(F) \qquad -1 - (\varphi'\zeta)^2 + (y - \varphi\zeta)\varphi''\zeta = 0,$$

dont les deux dernières sont les différentielles première

& seconde de *(D)*, prises en ne faisant varier que l'indéterminée ζ, & dans lesquelles φ est une fonction arbitraire; c'est-à-dire, que cette intégrale est le résultat de l'élimination de l'indéterminée ζ entre les trois équations *(D)*, *(E)*, *(F)*.

Il est facile de vérifier cette intégrale par la différenciation : en effet, les différentielles des deux équations *(D)*, *(E)*, prises par rapport à ζ, ayant lieu, il s'ensuit que l'on peut différencier ces deux équations, en regardant ζ comme constante, ce qui donnera

$$(d)\quad (x - \zeta)\,dx + (y - \varphi\zeta)\,dy = \frac{z\,dz}{a^2},$$

$$(e)\quad dx + dy\,\varphi'\zeta = 0;$$

& éliminant entre les quatre équations *(D)*, *(E)*, *(d)*, *(e)*, les trois indéterminées ζ, $\varphi\zeta$, $\varphi'\zeta$, on aura

$$(A)\quad dz^2 = a^2(dx^2 + dy^2).$$

Le filet d'une vis dont l'axe est perpendiculaire au plan des x, y, est un cas particulier de cet exemple; & le filet d'une vis tracée sur une surface cylindrique à base quelconque, & perpendiculaire au plan des x, y, en est le cas général.

IV.

EXEMPLE II. Soit proposée l'équation

$$(A)\quad z^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) = a^2(dx^2 + dy^2),$$

dans laquelle a est une constante donnée. Il est évident, à cause de la proportion

$$a : z :: \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} : \sqrt{(dx^2 + dy^2)},$$

que si l'on conçoit un cercle dont le rayon soit a, dont le centre soit dans le plan des x, y, & dont le plan soit perpendiculaire à ce dernier, la proposée appartient à toutes les courbes dont l'élément fait avec le plan des x, y, le même angle que l'élément du cercle pris à même hauteur, ou, ce qui revient au même, pris pour un z égal à celui

de la courbe; donc tous les cercles, dont le rayon eſt a, dont les plans ſont parallèles aux z, & dont les centres ſont placés dans le plan des x, y, doivent ſatisfaire à la propoſée: or les équations de ces cercles ſont

$$(B)\ (x - \alpha)^2 + (y - \zeta)^2 + z^2 = a^2,$$
$$(C)\ x - \alpha = \gamma (y - \zeta),$$

α, ζ, γ étant trois conſtantes arbitraires; donc le ſyſtème de ces deux équations priſes ſimultanément, eſt une ſolution particulière de l'équation (A). En effet, ſi l'on différencie les deux (A), (B), on aura

$$(x - \alpha)\,dx + (y - \zeta)\,dy + z\,dz = 0,$$
$$dx = \gamma\,dy,$$

& ſi l'on élimine entre ces quatre équations les trois arbitraires α, ζ, γ, l'équation réſultante ſera la propoſée. Quoique le ſyſtème des deux équations (A), (B), ſoit complété par trois arbitraires, on verra cependant que l'intégrale complète de la propoſée eſt encore plus générale.

L'équation (B) appartient à une ſphère dont le rayon eſt a, & dont le centre eſt placé ſur le plan des x, y, en un point dont les coordonnées ſont α, ζ; ſi l'on fait $\zeta = \varphi\alpha$, l'équation

$$(D)\ (x - \alpha)^2 + (y - \varphi\alpha)^2 + z^2 = a^2$$

appartiendra à toutes les ſphères de même rayon, dont les centres ſeront placés dans le plan des x, y, ſur une certaine courbe, l'équation de cette courbe étant $y = \varphi x$; ſi parmi ces ſphères on en conſidère deux conſécutives, elles ſe couperont ſuivant un cercle, dont on aura la ſeconde équation en différenciant l'équation de la ſphère par rapport au paramètre variable ζ; ainſi les équations de ce cercle ſeront

$$(D)\ (x - \alpha)^2 + (y - \varphi\alpha)^2 + z^2 = a^2$$
$$(E)\ x - \alpha + (y - \varphi\alpha)\,\varphi'\alpha = 0,$$

Digitized by Google

& ces équations ſatisferont encore à la propoſée. Mais ſi l'on conſidère la ſuite des ſphères, dont les centres ſont placés ſur la même courbe, on aura une ſuite de cercles comme le précédent, qui ne différeront qu'en vertu du paramètre variable ζ; tous ces cercles ſe trouvant deux à deux conſécutivement ſur une même ſphère, ils pourront ſe couper deux à deux conſécutivement, & la ſuite de leurs points d'interſection formera une courbe à double courbure touchée par tous les cercles: donc chaque élément de cette courbe à double courbure étant commun à un des cercles, cet élément fera, avec le plan des x, y, l'angle comporté par la propoſée; donc les équations de cette courbe à double courbure ſeront l'intégrale complète de l'équation *(A)*.

Or il eſt évident que, pour avoir les équations de cette courbe à double courbure, il faut différencier les équations *(D)*, *(E)*, par rapport au paramètre variable α; de plus l'équation *(E)* eſt déjà la différentielle de *(D)* priſe de cette manière: donc il ſuffira de différencier *(E)*; donc l'intégrale complète de la propoſée ſera le ſyſtème des trois équations ſimultanées

$$(D)\ (x - \alpha)^2 + (y - \varphi\alpha)^2 + \zeta^2 = a^2,$$
$$(E)\ x - \alpha + (y - \varphi\alpha)\varphi'\alpha = 0,$$
$$(F) - 1 - (\varphi'\alpha)^2 + (y - \varphi\alpha)\varphi''\alpha = 0;$$

dont les deux dernières ſont les différentielles première & ſeconde de *(D)*, priſe en regardant α comme ſeule variable, & dans leſquelles φ eſt une fonction arbitraire; c'eſt-à-dire que l'intégrale complète eſt le réſultat de l'élimination de l'indéterminée α entre les trois équations *(D)*, *(E)*, *(F)*; & que, dans chaque cas particulier, cette intégrale ne peut être exprimée que par le ſyſtème de deux équations ſimultanées.

Pour vérifier ce réſultat par la différenciation, il faut remarquer que les différentielles des deux équations *(D)*, *(E)*, priſes par rapport à α, ont lieu, & qu'ainſi on peut

Digitized by Google

différencier les deux équations *(D)*, *(E)*, en regardant α comme conſtante : or ſi l'on exécute cette différenciation, on a les deux équations

$$(d)\quad (x - \alpha)dx + (y - \varphi\alpha)dy + zdz = 0,$$
$$(e)\quad dx + dy\varphi'\alpha = 0,$$

& ſi, entre les quatre équations *(D)*, *(E)*, *(d)*, *(e)*, on élimine les trois indéterminées α, $\varphi\alpha$, $\varphi'\alpha$, on trouve

$$(A)\quad z^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) = a^2(dx^2 + dy^2),$$

donc l'intégrale que l'on vient de trouver eſt exacte.

V.

EXEMPLE III. Soit propoſée l'équation

$$(A)\quad \left.\begin{matrix}(x\,dy - y\,dx)^2\\ (y\,dz - z\,dy)^2\\ (z\,dx - x\,dz)^2\end{matrix}\right\} = a^2(dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

dans laquelle a eſt une conſtante donnée. Si l'on met cette équation ſous la forme

$$d.V(x^2 + y^2 + z^2 - a^2) = V(dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

il ſera facile de reconnoître qu'elle appartient à toutes les courbes à double courbure dont les tangentes ſont en même-temps tangentes à une ſphère dont le rayon eſt a, & dont le centre eſt à l'origine ; donc les équations de toutes les tangentes à la ſphère ſeront une ſolution particulière de la propoſée : or les équations de ces tangentes ſont

$$(B)\quad \alpha x + \zeta y + zV(a^2 - \alpha^2 - \zeta^2) = a^2,$$
$$(C)\quad x - \alpha = \gamma(y - \zeta),$$

α, ζ étant les coordonnées du point de contact, & γ déterminant la direction de la tangente ; donc ſi, dans ces équations

équations, on regarde comme arbitraires les trois quantités α, ζ, γ, on aura une ſolution particulière de la propoſée, ce dont il eſt facile de s'aſſurer par la différenciation.

Quoique les deux équations *(B)*, *(C)*, ſoient complétées par trois arbitraires, on va voir cependant qu'elles ne ſont pas encore l'intégrale complète de l'équation *(A)*.

L'équation *(B)* eſt celle du plan tangent à la ſphère pour un point de contact, dont les coordonnées, dans les ſens des x & y, ſont reſpectivement α, ζ: ſi l'on fait $\zeta = \varphi\alpha$, on détermine le point de contact à être placé ſur une certaine courbe, dont la projection ſur le plan des x, y, a pour équation $y = \varphi x$; & l'équation du plan tangent devient

$$(D)\quad \alpha x + y\varphi\alpha + z\sqrt{[a^2 - \alpha^2 - (\varphi\alpha)^2]} = a^2.$$

Si l'on conſidère deux plans tangens conſécutifs, ces plans ſe couperont ſuivant une droite tangente à la ſphère, & on aura la ſeconde équation de cette droite, en différenciant celle du plan par rapport au paramètre variable α; ainſi les deux équations de cette droite ſeront

$$(D)\quad \alpha x + y\varphi\alpha + z\sqrt{[a^2 - \alpha^2 - (\varphi\alpha)^2]} = a^2,$$

$$(E)\quad x + y\varphi'\alpha - z\,\frac{\alpha + \varphi\alpha\varphi'\alpha}{\sqrt{[a^2 - \alpha^2 - (\varphi\alpha)^2]}} = 0;$$

& parce que la droite, à laquelle appartiennent ces deux équations, eſt tangente à la ſphère, il s'enſuit qu'elles ſatisfont à la propoſée. Mais ſi l'on conſidère la ſuite de tous les plans qui touchent la ſphère dans les points pris ſur la courbe, on aura une ſuite de droites comme la précédente, & ces droites priſes deux à deux conſécutivement ſe couperont, puiſqu'elles ſeront deux à deux dans un même plan tangent; donc elles ſeront les tangentes d'une même courbe à double courbure; & les équations de cette courbe à double courbure ſeront l'intégrale complète de la propoſée. Or il eſt évident que, pour

avoir les équations de cette courbe à double courbure, il faut différencier les équations *(D)*, *(E)*, de la droite, par rapport au paramètre variable α; de plus l'équation *(E)* étant déjà la différentielle de *(D)* prise de cette manière, il suffira de différencier *(E)*: donc en faisant, pour abréger,

$$a^2 - \alpha^2 - (\varphi\alpha)^2 = (\downarrow\alpha)^2,$$

l'intégrale complète de la proposée sera le système des quatre équations simultanées

$$\begin{aligned}
(D)\quad & \alpha x + y\varphi\alpha + z\downarrow\alpha = a^2,\\
(E)\quad & x + y\varphi'\alpha + z\downarrow'\alpha = 0,\\
(F)\quad & y\varphi''\alpha + z\downarrow''\alpha = 0,\\
& a^2 + (\varphi\alpha)^2 + (\downarrow\alpha)^2 = a^2,
\end{aligned}$$

dans lesquelles φ & $\downarrow$ sont des fonctions arbitraires; de ces quatre équations la dernière est destinée à l'élimination actuelle de la fonction surabondante; & *(E)*, *(F)*, sont les différences première & seconde de *(D)*, prises en regardant α comme seule variable. L'élimination d'une des fonctions étant faite, l'intégrale sera le résultat de l'élimination de α entre les trois équations *(D)*, *(E)*, *(F)*.

Il est facile de vérifier ce résultat par la différenciation, comme ceux des deux exemples précédens.

Dans mon Mémoire sur les développées des courbes à double courbure *(Tome X des Savans étrangers)*, j'ai donné le nom d'*Arrête de rebroussement* à la courbe touchée par toutes les droites qui constituent une surface développable; d'après cela, l'équation dont il s'agit ici appartient à l'arrête de rebroussement d'une surface quelconque développable circonscrite à la sphère.

VI.

Les trois exemples que je viens de rapporter suffisent pour faire voir, 1.° que les équations aux différences ordi-

Digitized by Google

naires à trois variables élevées, & qui ne satisfont pas aux conditions d'intégrabilité, ne sont pas absurdes, mais qu'elles expriment des propriétés réelles; 2.° que ces équations sont susceptibles d'une véritable intégration, & que leurs lieux sont des courbes à double courbure qui ne peuvent être exprimées que par le système de deux équations simultanées, les autres équations, quand leur nombre est plus grand que deux, étant destinées à éliminer des indéterminées, ou des fonctions surabondantes; 3.° que les intégrales de ces équations différentielles doivent être complétées par une fonction arbitraire, ce que les Géomètres ne s'étoient encore permis que pour les intégrales des équations aux différences partielles.

Ces considérations ouvrent un nouveau champ à l'analyse & à la géométrie, & elles donnent lieu à un calcul intégral qui mérite l'attention des Géomètres, car on verra dans la suite que l'intégration des équations aux différences partielles élevées, ne dépend que de ce genre de calcul.

Je vais exposer quelques résultats d'une assez grande généralité.

VII.

THÉORÈME I. L'intégrale complète de l'équation aux différences ordinaires à trois variables,

$$(A)\quad F\left(\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}\right) = 0,$$

dans laquelle les variables elles-mêmes n'entrent pas, & où F est une fonction quelconque de deux quantités, algébrique ou transcendante, déterminée ou arbitraire, est le résultat de l'élimination de l'indéterminée α entre les trois équations suivantes,

$$(B)\quad F\left(\frac{x-\alpha}{z}, \frac{y-\varphi\alpha}{z}\right) = 0,$$

$$(C)\quad \left(\frac{dF}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$(D)\quad \left(\frac{d\,d\,F}{d\,\alpha^2}\right) = 0,$$

dans lesquelles F est la même fonction de deux quantités que celle de la proposée, & où φ est une fonction arbitraire.

Pour le démontrer, il faut observer que les différentielles des deux équations *(B)*, *(C)*, par rapport à l'indéterminée α ont lieu, & que par conséquent on peut différencier ces équations en regardant α comme constante, ce qui, en faisant pour abréger

$$\frac{x-\alpha}{z} = m,\ \frac{y-\varphi\alpha}{z} = n,$$

donne

$$\left(\frac{dF}{dm}\right)dm + \left(\frac{dF}{dn}\right)dn = 0,$$

$$\left.\begin{aligned}&\left[\left(\frac{d\,dF}{dm^2}\right) + \left(\frac{d\,dF}{dm\,dn}\right)\varphi'\alpha\right]dm\\ +&\left[\left(\frac{d\,dF}{dm\,dn}\right) + \left(\frac{d\,dF}{dn^2}\right)\varphi'\alpha\right]dn\end{aligned}\right\} = 0;$$

or ces deux dernières équations ne peuvent pas subsister indépendamment de la valeur de la fonction F, à moins que l'on n'ait en même-temps les deux équations suivantes $dm = 0$, $dn = 0$, ou

$$\frac{x-\alpha}{z} = \frac{dx}{dz},$$
$$\frac{y-\varphi\alpha}{z} = \frac{dy}{dz};$$

donc éliminant α & $\varphi\alpha$ de l'équation *(B)*, au moyen des deux dernières, on aura la proposée

$$F\left(\frac{dx}{dz},\ \frac{dy}{dz}\right) = 0.$$

VIII.

L'ÉQUATION $dz^2 = a^2\,(dx^2 + dy^2)$ de l'*article III*, est dans le cas du théorème précédent, car elle peut être mise sous la forme

$$a^2\left(\frac{dx^2}{dz^2}+\frac{dy^2}{dz^2}\right)-1=0;$$

auſſi nous avons vu que ſon intégrale complète eſt le réſultat de l'élimination de l'indéterminée α entre l'équation ſuivante,

$$a^2\left[\left(\frac{x-\alpha}{z}\right)^2+\left(\frac{y-\varphi\alpha}{z}\right)^2\right]-1=0,$$

& ſes deux différentielles première & ſeconde, priſes en regardant α comme ſeule variable.

IX.

THÉORÈME II. Les trois quantités X, Y, Z, étant compoſées chacune des trois variables x, y, z, l'intégrale complète de l'équation aux différences ordinaires du premier ordre,

$$F\left(\frac{dX}{dZ},\ \frac{dY}{dZ}\right)=0,$$

eſt le réſultat de l'élimination de l'indéterminée α entre les trois équations ſuivantes,

$$F\left(\frac{X-\alpha}{Z},\ \frac{Y-\varphi\alpha}{Z}\right)=0,$$

$$\left(\frac{dF}{d\alpha}\right)=0,$$

$$\left(\frac{ddF}{d\alpha^2}\right)=0,$$

dans leſquelles la fonction F eſt la même que celle de la propoſée, & où φ eſt une fonction arbitraire.

Ce théorème ſe démontre comme le précédent.

X.

L'ÉQUATION

$$z^2(dx^2+dy^2+dz^2)=a^2(dx^2+dy^2)$$

de l'*article IV*, eſt dans le cas du dernier théorème, car on peut le mettre ſous la forme

$$\frac{\zeta^2 d\zeta^2}{a^2 - \zeta^2} = dx^2 + dy^2,$$

ou ſous la ſuivante,

$$[dV(a^2 - \zeta^2)]^2 = dx^2 + dy^2:$$

auſſi nous avons vu que ſon intégrale complète eſt le réſultat de l'élimination de l'indéterminée α entre l'équation

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2-\zeta^2} + \frac{(y-\varphi\alpha)^2}{a^2-\zeta^2} = 1,$$

& ſes différentielles, première & ſeconde, priſes en regardant α comme ſeule variable.

X I.

Il ſuit de tout ce qu'on vient de voir, que ſi l'on conçoit une ſurface courbe dont l'équation $M = 0$, outre les trois coordonnées x, y, ζ, renferme encore un paramètre variable α, & une fonction arbitraire de ce paramètre, repréſentée par $\varphi\alpha$; & que ſi l'on imagine toutes les ſurfaces courbes différentes que l'on obtiendroit en donnant ſucceſſivement à α toutes les valeurs poſſibles, & en ſuppoſant que la forme de la fonction φ ſoit invariable, deux quelconques de ces ſurfaces, priſes conſécutivement, ſe couperont en une courbe, dont les équations ſeront

$$(A) \qquad M = 0,$$

$$(B) \qquad \left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0;$$

la ſuite de ces courbes d'interſection compoſera une ſurface courbe qui ſera l'enveloppe de toutes les premières, & on aura l'équation finie de cette enveloppe, en x, y, ζ, en éliminant le paramètre variable α entre les deux équations *(A)*, *(B)*; mais cette élimination n'eſt pas poſſible en général, parce que la fonction φ eſt arbitraire.

De plus, ſi l'on conſidère les courbes d'interſection dont la ſuite compoſe l'enveloppe, deux quelconques de ces

Digitized by Google

courbes, prises consécutivement, se couperont en un certain point dont les coordonnées seront déterminées par les trois équations

$$(A) \quad M = 0,$$

$$(B) \quad \left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$(C) \quad \left(\frac{ddM}{d\alpha^2}\right) = 0;$$

& la suite de ces points composera une courbe à double courbure, dont on auroit les deux équations finies, en éliminant le paramètre α entre les trois équations *(A)*, *(B)*, *(C)*. La courbe à double courbure dont il s'agit ici, non-seulement touche toutes les surfaces possibles comprises dans l'équation $M = 0$, mais encore chacun de ses élémens se trouve sur trois de ces surfaces prises consécutivement; enfin cette courbe est la limite de l'enveloppe.

Pour avoir l'équation différentielle de l'enveloppe, délivrée de la fonction arbitraire φ, il faut différencier l'équation *(A)*, & par rapport à x & par rapport à y, en regardant α & $\varphi\alpha$ comme constantes dans ces deux cas, ce qui est permis à cause de l'équation *(B)*; on aura donc alors les trois équations

$$M = 0,$$

$$\left(\frac{dM}{dx}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{dM}{dy}\right) = 0;$$

entre lesquelles, éliminant les deux quantités α & $\varphi\alpha$, on aura une équation aux différences partielles, $V = 0$, qui appartiendra à l'enveloppe, indépendamment de la forme de la fonction φ qui a disparu, c'est-à-dire, qui appartiendra à toutes les enveloppes que l'on auroit en donnant, dans $M = 0$, à la fonction φ, successivement toutes les formes possibles.

Quant à la limite, nous avons déjà vu que pour avoir

Digitized by Google

ſon équation il faut différencier aux différences ordinaires les deux équations *(A)*, *(B)*, en regardant α & $\varphi\alpha$ comme conſtantes, ce qui eſt permis en vertu des équations *(B)* *(C)*, & éliminer entre les quatre équations

$$(A) \qquad M = 0,$$
$$(B) \qquad \left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0,$$
$$d(A) \qquad dM = 0,$$
$$d(B) \quad d.\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0,$$

les trois quantités α, $\varphi\alpha$, $\varphi'\alpha$, ce qui produit une équation $U = 0$ du premier ordre, aux différences ordinaires élevées à trois variables, & pour laquelle la condition d'intégrabilité n'eſt pas ſatisfaite.

XII.

ACTUELLEMENT les deux équations

$$V = 0,$$
$$U = 0$$

dont la première eſt aux différences partielles, & dont la ſeconde eſt aux différences ordinaires, ſont telles, que l'une quelconque étant donnée, il eſt toujours facile d'obtenir l'autre ſans connoître leurs équations intégrales.

1.° Étant donnée l'équation aux différences partielles, $V = 0$, ſi l'on ſubſtitue pour p ou pour q ſa valeur priſe dans $dz = pdx + qdy$ (ſuppoſons que ce ſoit la valeur de p que l'on ſubſtitue), on aura une équation $V' = 0$, compoſée des variables x, y, z, de leurs différences ordinaires dx, dy, dz, & de la quantité q; & le réſultat de l'élimination de la quantité q entre les deux équations

$$V' = 0,$$
$$\left(\frac{dV'}{dq}\right) = 0,$$

donnera l'équation aux différences ordinaires $U = 0$.

2.° Réciproquement, étant donnée $U = 0$, ſi l'on ſubſtitue

pour dz ſa valeur $p\,dx + q\,dy$, on aura une équation $U' = 0$, compoſée des variables x, y, z, des différences partielles p, q, & de la quantité $\frac{dy}{dx}$. Je repréſente cette dernière quantité par ω; cela poſé, le réſultat de l'élimination de ω entre les deux équations

$$U' = 0,$$
$$\left(\frac{dU'}{d\omega}\right) = 0,$$

donnera l'équation aux différences partielles $V = 0$.

Par exemple, dans l'*article III*, l'équation $M = 0$ eſt

$$(x - \alpha)^2 + (y - \varphi\alpha)^2 = \frac{z^2}{a^2},$$

& les deux équations $V = 0$, $U = 0$, ſont

$$p^2 + q^2 = a^2,$$
$$dz^2 = a^2(dx^2 + dy^2).$$

La première de ces deux équations étant poſée, pour avoir la ſeconde, il faut ſubſtituer pour p ſa valeur $\frac{dz - q\,dy}{dx}$, ce qui donne

$$q^2(dx^2 + dy^2) - 2q\,dy\,dz + dz^2 - a^2dx^2 = 0;$$

différencier cette dernière équation en regardant q comme ſeule variable, ce qui donne

$$q(dx^2 + dy^2) = dy\,dz,$$

en vertu de laquelle la précédente devient

$$q\,dy\,dz = dz^2 - a^2dx^2;$$

& éliminant q entre les deux dernières, on trouve l'équation aux différences ordinaires

$$dz^2 = a^2(dx^2 + dy^2).$$

Réciproquement étant donnée l'équation

$$dz^2 = a^2(dx^2 + dy^2),$$

pour trouver l'équation aux différences partielles, il faut

ſubſtituer pour dz ſa valeur $pdx + qdy$, ce qui, en faiſant $\frac{dy}{dx} = \omega$, donne

$$\omega^2(q^2 - a^2) + 2\omega pq + p^2 - a^2 = 0;$$

différencier cette équation en regardant ω comme ſeule variable, ce qui donne

$$\omega(q^2 - a^2) + pq = 0,$$
$$\omega pq + p^2 - a^2 = 0;$$

& éliminant ω, on trouve l'équation aux différences partielles

$$p^2 + q^2 = a^2.$$

XIII.

POUR démontrer en général la propoſition de l'*article précédent*, je ferai d'abord remarquer que le réſultat de l'élimination des deux quantités α, ζ, entre les trois équations

$$\varphi(\alpha, \zeta) = 0,$$
$$\left(\frac{d.\varphi(\alpha,\zeta)}{d\alpha}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{d.\varphi(\alpha,\zeta)}{d\zeta}\right) = 0,$$

eſt le même que celui qu'on obtiendroit en éliminant d'abord α entre les deux équations

$$\varphi(\alpha, \zeta) = 0,$$
$$\left(\frac{d.\varphi(\alpha,\zeta)}{d\alpha}\right) = 0,$$

ce qui donneroit un premier réſultat $\downarrow\zeta = 0$; puis en éliminant ζ entre les deux équations

$$\downarrow\zeta = 0,$$
$$d\left(\frac{\downarrow\zeta}{d\zeta}\right) = 0.$$

Cela poſé, l'équation aux différences ordinaires $U = 0$, eſt le réſultat de l'élimination des quantités α, $\varphi\alpha$, $\varphi'\alpha$ entre les quatre équations

Digitized by Google

$$M = 0,$$
$$dM = 0,$$
$$\frac{dM}{d\alpha} = 0,$$
$$\frac{ddM}{d\alpha^2} = 0;$$

ou bien ſi l'on repréſente par $k = 0$, le réſultat de l'élimination de $\varphi\alpha$, entre les deux premières, l'équation $U = 0$, eſt alors le réſultat de l'élimination de α, entre les deux équations

$$k = 0,$$
$$\left(\frac{dk}{d\alpha}\right) = 0.$$

Pareillement, l'équation aux différences partielles $V = 0$, eſt le réſultat de l'élimination des quantités α, $\varphi\alpha$, dz entre les quatre équations

$$M = 0,$$
$$\left(\frac{dM}{dx}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{dM}{dy}\right) = 0,$$
$$dz = p\,dx + q\,dy;$$

ou bien, en repréſentant $\frac{dy}{dx}$ par ω, on aura l'équation $V = 0$, en éliminant d'abord $\varphi\alpha$ & dz entre les équations

$$M = 0,$$
$$dM = 0,$$
$$dz = p\,dx + q\,dy;$$

puis après avoir repréſenté le réſultat par $k' = 0$, en éliminant α & ω entre les ſuivantes,

$$k' = 0,$$

$$\left(\frac{dk'}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{dk'}{d\omega}\right) = 0;$$

& pour faire cette dernière opération, on peut, en vertu du lemme, éliminer d'abord α entre $k' = 0$, & $\left(\frac{dk'}{d\alpha}\right) = 0$, ce qui donnera un réſultat $k'' = 0$, & éliminer enſuite ω entre $k'' = 0$, & $\left(\frac{dk''}{d\omega}\right) = 0$.

Or l'équation $k' = 0$ étant le réſultat de l'élimination de dz entre $k' = 0$, & $dz = pdx + qdy$, le réſultat de l'élimination de α entre $k' = 0$, & $\left(\frac{dk'}{d\alpha}\right) = 0$, ſera le même que celui de l'élimination de dz entre

$$U = 0,$$

$$\& dz = pdx + qdy;$$

donc on aura l'équation $V = 0$, en éliminant d'abord dz entre ces deux dernières équations, ce qui donnera un réſultat $k'' = 0$, & éliminant enſuite ω entre les deux ſuivantes

$$k'' = 0,$$

$$\left(\frac{dk''}{d\omega}\right) = 0;$$

ce qui eſt la première partie de la propoſition.

Quant à la ſeconde partie, il faut obſerver que puiſque l'équation $V = 0$, réſulte des deux ſuivantes

$$U = 0,$$

$$dz = pdx + qdy,$$

réciproquement l'équation $U = 0$ doit réſulter de ces deux-ci,

Digitized by Google

$$V = 0,$$

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

par l'élimination des deux quantités p, q: or l'élimination actuelle d'une de ces deux quantités étant faite, ce qui donne un réſultat que je repréſente par $h = 0$, il ne reſte aucune équation pour éliminer l'autre de ces quantités; donc, ſi c'eſt q qui reſte, pour le faire diſparoître, il faut l'éliminer entre les deux équations

$$h = 0,$$

$$\left(\frac{dh}{dq}\right) = 0;$$

ce qui eſt la ſeconde partie de la propoſition.

XIV.

Nous avons vu *(XII)* que l'intégrale de l'équation aux différences partielles $V = 0$ eſt le réſultat de l'élimination de l'indéterminée α entre les deux équations

$$(A) \quad M = 0,$$

$$(B) \quad \left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0;$$

& que celle de l'équation aux différences ordinaires élevées $U = 0$, eſt le réſultat de l'élimination de la même indéterminée α entre les trois ſuivantes,

$$(A) \quad M = 0,$$

$$(B) \quad \left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$(C) \quad \left(\frac{ddM}{d\alpha^2}\right) = 0:$$

il ſuit de-là, que des deux équations $V = 0$, $U = 0$, l'une quelconque étant propoſée, ſi l'on connoît l'intégrale de l'autre, ſous la forme que je viens de rapporter, on

Digitized by Google

connoître auſſi celle de la première ; c'eſt-à-dire, que ſi l'on connoît l'intégrale de l'équation $U = 0$, & que cette intégrale ſoit ſous la forme des trois équations *(A)*, *(B)*, *(C)*, on aura celle de l'équation $V = 0$, en ſupprimant l'équation *(C)*. Réciproquement étant connue l'intégrale de l'équation $V = 0$, ſous la forme des deux équations *(A)*, *(B)*, on aura celle de l'équation $U = 0$, en combinant les deux équations *(A)*, *(B)*, avec la différentielle de *(B)* priſe en regardant l'indéterminée α comme ſeule variable.

Ainſi le calcul intégral des équations aux différences ordinaires élevées, & celui des équations aux différences partielles ſont abſolument dépendans l'un de l'autre ; & de la perfection de l'une de ces eſpèces de calcul s'enſuivroit néceſſairement celle de l'autre.

XV.

TOUT ce qui précède ne préſenteroit qu'un cercle inutile, ſi les formes des équations que l'on fait intégrer ſe correſpondoient dans l'un & l'autre calcul ; mais je vais faire voir, par deux exemples, que certaines équations aux différences ordinaires, compriſes dans les formes que j'ai traitées ci-deſſus, correſpondent à des équations aux différences partielles que l'on ne peut encore intégrer par aucune autre méthode, & réciproquement.

Exemple I. L'équation aux différences ordinaires

$$(U)\left\{\begin{array}{c}(x\,dy - y\,dx)^2\\ +\,(y\,dz - z\,dy)^2\\ +\,(z\,dx - x\,dz)^2\end{array}\right\} = a^2\,(dx^2 + dy + dz^2),$$

dont j'ai trouvé l'intégrale par des conſidérations géométriques, & qui appartient aux arrêtes de rebrouſſement de toutes les ſurfaces développables circonſcrites à la même ſphère, n'eſt compriſe dans aucune des formes générales dont j'ai donné les intégrales ; mais ſi l'on ſubſtitue pour

Digitized by Google

dz ſa valeur $p\,dx + q\,dy$, & qu'enſuite on élimine $\frac{dy}{dx}$ au moyen de la différentielle, priſe en regardant $\frac{dy}{dx}$ comme ſeule variable, l'équation aux différences partielles que l'on obtiendra, ſera

$$z - px - qy = a^2\sqrt{(1 + p^2 + q^2)},$$

qui appartient à toutes les ſurfaces développables circonſcrites à la même ſphère. Or cette équation eſt compriſe dans celles que M. de la Grange a intégrées, & en faiſant, pour abréger

$$z - \alpha x - \varphi\alpha . y - a^2\sqrt{[1 + \alpha^2 + (\varphi\alpha)^2]} = M,$$

ſon intégrale eſt le réſultat de l'élimination de α entre les deux équations ſuivantes :

$$M = 0,$$
$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0;$$

donc l'intégrale de l'équation aux différences ordinaires (U), eſt le réſultat de l'élimination de la même indéterminée α entre les trois équations

$$M = 0,$$
$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{ddM}{d\alpha^2}\right) = 0.$$

Exemple II. Réciproquement l'équation aux différences partielles

$$(V) \quad \left\{\begin{array}{r} bx^2(z + px - qy)^2 \\ + aby^2(z - px + qy)^2 \\ + \quad az(z + px + qy)^2 \end{array}\right\} = 0,$$

ne peut s'intégrer par aucune des méthodes connues; mais si l'on substitue pour p sa valeur prise dans $dz = pdx + qdy$, & qu'après avoir différencié en regardant q comme seule variable, on élimine q, on aura

$$(xdz + zdx)^2 + a(zdy + ydz)^2 + b(xdy + ydz)^2 = 0,$$

équation aux différences ordinaires élevées, comprise dans dans le cas du *théorème III*, & dont l'intégrale, en faisant, pour abréger,

$$\left(\frac{xz - \alpha}{xy}\right)^2 + a\left(\frac{yz - \varphi\alpha}{xy}\right)^2 + b = M,$$

est le résultat de l'élimination de α entre les trois équations

$$M = 0,$$
$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{ddM}{d\alpha^2}\right) = 0;$$

donc l'intégrale de l'équation aux différences partielles *(V)*, est le résultat de l'élimination de l'indéterminée α entre les deux premières seulement de ces trois équations, c'est-à-dire, entre

$$M = 0$$
$$\& \left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0.$$

XVI.

JUSQU'ICI il n'a été question, dans ce Mémoire, que des équations aux différences ordinaires élevées; mais les équations aux différences ordinaires linéaires à trois variables, & qui ne satisfont pas aux anciennes conditions d'intégrabilité, ne sont pas absurdes, elles appartiennent de même toutes à des courbes à double courbure, & elles sont toutes susceptibles d'une véritable intégration; enfin la

Digitized by Google

la recherche de leur intégrale ne dépend que de l'intégration d'une équation aux différences ordinaires à deux variables.

En effet, ſoit

$$(A) \qquad L\,dx + M\,dy + N\,dz = 0,$$

une équation aux différences ordinaires, linéaire, & qui ne ſatisfaſſe pas à la condition d'intégrabilité; d'après ce ce qu'on vient de voir ſur les équations élevées, on mettra pour dz ſa valeur $p\,dx + q\,dy$, ce qui donnera

$$(L + Np)\,dx + (M + Nq)\,dy = 0;$$

puis, après avoir différencié cette équation, en ne faiſant varier que $\frac{dy}{dx}$, on éliminera $\frac{dy}{dx}$, ce qui ſe réduit à égaler à zéro les coéfficiens de dx & dy, & l'on aura les deux équations ſimultanées,

$$(B) \qquad L + Np = 0,$$

$$(C) \qquad N + Nq = 0.$$

Cela fait, on intégrera ou l'une ou l'autre de ces deux équations, en regardant comme conſtante la variable qui n'a pas varié dans la différence partielle ; par exemple, on intégrera la première,

$$L\,dx + N\,dz = 0,$$

en regardant y comme conſtante, & on complétera l'intégrale par une fonction arbitraire de y; enfin on ſubſtituera dans (C) pour q ſa valeur tirée de l'intégrale, ce qui produira une ſeconde équation ſans différentielles; & ces deux équations appartiendront à la courbe à double courbure, qui eſt le lieu de la propoſée.

XVII.

EXEMPLE I. Soit proposé d'intégrer l'équation

$$(A) \qquad dz = xy\,(x\,dx + y\,dy).$$

Les deux équations aux différences partielles sont, pour ce cas,

$$(B) \qquad p = x^2y,$$
$$(C) \qquad q = xy^2,$$

l'intégrale de la première est

$$z = \frac{x^3y}{3} + \varphi y;$$

φ étant une fonction arbitraire; je la différencie en regardant y comme seule variable, ce qui donne

$$q = \frac{x^3}{3} + \varphi' y;$$

& substituant pour q cette valeur dans (C), je trouve

$$xy^2 = \frac{x^3}{3} - \varphi' y;$$

donc l'intégrale de la proposée est le système des deux équations simultanées,

$$z = \frac{x^3y}{3} + \varphi y$$
$$xy^2 = \frac{x^3}{3} + \varphi' y.$$

Cette intégrale peut être mise sous une autre forme, car les deux équations (B), (C), peuvent être remplacées par les suivantes,

$$py - qx = 0,$$
$$p = x^2y.$$

Or l'intégrale de la première est $z = \varphi\,(x^3 + y^3)$; &

Digitized by Google

pour que la ſeconde ſoit ſatisfaite, il faut que l'on ait $xy = z\varphi'(x^2 + y^2)$; donc l'intégrale complète de la propoſée eſt encore le ſyſtème des deux équations ſimultanées,

$$z = \varphi(x^2 + y^2),$$
$$xy = z\varphi'(x^2 + y^2),$$

ce qu'il eſt facile de vérifier par la différenciation. Ainſi la propoſée appartient à une courbe à double courbure tracée ſur une ſurface quelconque de révolution, l'axe coïncidant avec la ligne des z; mais la projection de cette courbe ſur le plan perpendiculaire à l'axe, dépend de la courbe génératrice, d'une manière énoncée par la ſeconde des deux équations intégrales.

XVIII.

EXEMPLE II. Soit propoſé d'intégrer

(A) $$dz = xy(dx - dy).$$

Les deux équations aux différences partielles deviennent

(B) $$p = xy,$$

(C) $$q = -xy;$$

l'intégrale de la première eſt $z = \frac{x^2y}{2} + \phi y$, & pour que l'équation (C) ſoit ſatisfaite, il faut que l'on ait

$$xy + \frac{x^2}{2} + \varphi' y = 0;$$

donc l'intégrale de l'équation (A) eſt le ſyſtème des deux équations ſimultanées

$$z = \frac{x^2y}{2} + \varphi y,$$
$$xy + \frac{x^2}{2} + \varphi' y = 0.$$

Digitized by Google

Autrement, les deux équations *(B)*, *(C)*, peuvent être remplacées par les deux ſuivantes,

$$p + q = 0,$$
$$p = xy.$$

L'intégrale de la première eſt

$$z = \varphi(x - y);$$

& pour que la ſeconde ſoit ſatisfaite, il faut que l'on ait

$$xy = \varphi'(x - y);$$

donc l'intégrale complète de la propoſée eſt encore le ſyſtème des deux équations ſimultanées

$$z = \varphi(x - y),$$
$$xy = \varphi'(x - y),$$

c'eſt-à-dire, que la propoſée *(A)* appartient à une courbe à double courbure, tracée ſur une ſurface cylindrique à baſe quelconque, les droites de la ſurface étant parallèles à la droite qui partage en deux parties égales l'angle formé par les axes des x & des y; mais la projection de la courbe ſur le plan des x, y, dépend de la baſe de la ſurface cylindrique, d'une manière exprimée par la ſeconde des deux équations intégrales.

XIX.

Si le nombre des variables étoit plus grand que trois, on ſe comporteroit d'une manière analogue, c'eſt-à-dire, qu'on ſubſtitueroit d'abord pour dz ſa valeur

$$p\,du + q\,dx + r\,dy \ldots\ldots \&c.$$

& qu'enſuite, pour éliminer $\frac{dx}{du}$, $\frac{dy}{du}$ ..... &c. on différencieroit le réſultat, en regardant chacune de ces

quantités comme ſeule variable, ce qui produiroit un nombre d'équations ſuffiſant pour l'élimination ; & alors on auroit des équations aux différences partielles, que l'on traiteroit comme celles des deux cas précédens.

Exemple III. Soit propoſé d'intégrer

$$u\,du + y\,dx + z\,dy + x\,dz = 0.$$

Je ſubſtitue pour dz ſa valeur, & je trouve

$$(u + px)\,du + (y + qx)\,dx + (z + rx)\,dy = 0;$$

je différencie, en regardant $\frac{dx}{du}$, $\frac{dy}{du}$, chacune en particulier, comme ſeule variable, & j'élimine ces deux quantités; ce qui, dans le cas où toutes les différences ſont linéaires, ſe réduit à égaler à zéro les coéfficiens de du, dx, dy, & j'obtiens les trois équations aux différences partielles,

$$u + px = 0,$$
$$y + qx = 0,$$
$$z + rx = 0.$$

L'intégrale de la première eſt

$$xz + u^2 = \varphi(x, y),$$

φ étant une fonction de deux quantités; & pour que les deux autres équations ſoient ſatisfaites, il faut que l'on ait

$$y + \varphi'(x, y) = 0,$$
$$z + \varphi''(x, y) = 0,$$

φ' & φ'' étant les coéfficiens de dx & dy, dans la différentielle de la fonction φ ; donc, l'intégrale complète de la propoſée eſt le ſyſtème des trois équations ſimultanées

$$xz + u^2 = \varphi(x, y),$$
$$y = \varphi'(x, y),$$
$$z = \varphi''(x, y).$$

Digitized by Google

X X.

LE nombre des équations intégrales n'eſt pas toujours, comme dans le cas précédent, égal au nombre des variables diminué d'une unité.

Exemple IV. Soit propoſée l'équation

$$(A) \quad u\,du + x\,dx + x\,dy + z\,dz = 0.$$

On voit d'abord qu'on peut là réduire à trois termes, ſous la forme ſuivante :

$$u\,du + x\,(dx + dy) + z\,dz = 0,$$

dont l'intégrale eſt évidemment le ſyſtème des deux équations ſimultanées

$$u^2 + z^2 + \varphi\,(x + y) = 0,$$
$$2x - \varphi'\,(x + y) = 0.$$

Ainſi toutes les fois que la propoſée ſera ſuſceptible d'être réduite à trois termes, ſon intégrale ne contiendra pas plus de deux équations ; mais dans tous les cas où elle ſera ſuſceptible de cette forme, il ne ſera pas toujours auſſi facile que dans cet exemple ſimple, de l'y ramener ; alors, en opérant comme dans l'*article XX*, le calcul indiquera la réduction des équations. En effet, ſi dans la propoſée on met pour dz ſa valeur $p\,du + q\,dx + r\,dy$, on aura les trois équations aux différences partielles,

$$u + pz = 0,$$
$$x + qz = 0,$$
$$x + rz = 0;$$

l'intégrale de la première eſt

$$(E) \quad z^2 + u^2 = \varphi\,(x, y),$$

φ étant ſuppoſée une fonction de deux quantités ; & pour que les deux autres ſoient ſatisfaites, il faut que l'on ait

$$(F) \quad -2x = \varphi'\,(x, y),$$
$$(G) \quad -2x = \varphi''\,(x, y),$$

Digitized by Google

φ' & φ'' étant les coéfficiens de dx & dy dans la différentielle de $\varphi(x, y)$.

Mais les deux équations *(F)*, *(G)*, étant entre les deux mêmes variables x & y, il s'enſuit que la fonction φ, qui étoit regardée comme compoſée de deux quantités, n'eſt compoſée que d'une ſeule; car ſi l'on fait

$$\varphi(x, y) = z', \text{ \& } dz' = p'dx + q'dy,$$

les équations *(F)*, *(G)*, deviennent

$$(F') \quad -2x = p',$$
$$(G') \quad -2x = q',$$

ce qui donne $p' - q' = 0$, & par conſéquent

$$z' = \downarrow(x + y),$$

$\downarrow$ étant une fonction arbitraire de la ſeule quantité $x + y$; donc l'équation *(E)* deviendra

$$z^2 + u^2 = \downarrow(x + y),$$

& une des deux équations *(F')* ou *(G')* ſera employée: & pour que l'autre ſoit ſatisfaite, il faudra que l'on ait

$$-2x = \Psi(x + y);$$

donc l'intégrale de la propoſée *(A)* eſt le ſyſtème des deux dernières équations priſes ſimultanément, comme on l'avoit trouvée d'abord.

CONCLUSION.

Les équations aux différences ordinaires, ſoit élevées, ſoit linéaires, qui ne ſatisfont pas aux conditions d'intégrabilité, ne renferment rien d'abſurde, ſi l'on entend par-là qu'elles expriment des propriétés impoſſibles, imaginaires....; elles énoncent toutes des propriétés réelles, & elles ſont ſuſceptibles d'une véritable intégration en quantités finies. Ce qu'il y avoit d'abſurde, c'étoit que leurs intégrales puſſent être exprimées par une ſeule équation; par exemple, pour le cas de trois variables, il étoit abſurde que l'équation appartînt à une ſurface courbe, ce que l'on ſuppoſoit tacitement; dans ce cas

Digitized by Google

elle appartient à une courbe à double courbure, qui peut être déterminée par une seule équation différentielle, mais qui ne peut être exprimée en quantités finies, que par le système de deux équations simultanées.

Des Équations aux différences ordinaires élevées du second ordre, & pour un nombre de variables plus grand que deux.

XXI.

DANS le Mémoire que j'ai donné sur les développées des courbes à double courbure, imprimé parmi ceux des Savans étrangers, *tome X*, j'ai fait voir, 1.° que, quoique chaque courbe eût un nombre infini de développées, elle n'avoit cependant, pour chacun de ses points, qu'un seul rayon de courbure; 2.° que lorsque la courbe étoit à double courbure, la suite des centres de courbure formoit une ligne courbe qui n'étoit pas une des développées; 3.° que x, y, z, étant les coordonnées rectangulaires d'un point de la courbe, l'expression du carré du rayon de courbure pour ce point, en ne faisant nulle aucune différence seconde, étoit

$$(dx^2 + dy^2 + dz^2)^3 : \begin{cases} (dxddy - dyddx)^2, \\ + (dzddx - dxddz)^2, \\ + (dyddz - dzddy)^2. \end{cases}$$

Si donc on vouloit avoir l'équation différentielle de toutes les courbes à double courbure, dont le rayon de courbure est constant, il faudroit égaler l'expression précédente à une constante a, ce qui donneroit

$$(A)\ (dx^2 + dy^2 + dz^2)^3 = a^2 \begin{cases} (dxddy - dyddx)^2, \\ + (dzddx - dxddz)^2, \\ + (dyddz - dzddy)^2, \end{cases}$$

équation élevée, du genre de celles que l'on regarde ordinairement comme absurdes, & qui cependant exprime une

une propriété réelle, & qui eſt ſuſceptible d'une véritable intégration, même en quantités finies.

XXII.

D'ABORD il eſt évident que tous les cercles dont le rayon eſt a, quelles que ſoient d'ailleurs leurs poſitions dans l'eſpace, doivent ſatisfaire à cette équation; or les équations d'un cercle placé d'une manière quelconque dans l'eſpace, ſont

$$(x - \alpha)^2 + (y - \zeta)^2 + (z - \gamma)^2 = a^2,$$
$$x - \alpha + (y - \zeta)\epsilon + (z - \gamma)\eta = 0,$$

α, ζ, γ, étant les coordonnées du centre, & ϵ, η, déterminant les deux directions du plan du cercle; donc, ſi dans ces deux équations on regarde les cinq quantités α, ζ, γ, ϵ, η, comme des conſtantes arbitraires, elles ſatisferont à l'équation aux différences ordinaires du ſecond ordre *(A)*; ce qu'il eſt facile de vérifier par la différenciation; car ſi l'on différencie aux différences ordinaires, premières & ſecondes, chacune de ces équations, on aura en tout ſix équations, entre leſquelles éliminant les cinq conſtantes arbitraires, on trouvera l'équation *(A)*. Mais quoique les équations au cercle contiennent cinq arbitraires, elles ne ſont encore qu'un cas particulier de l'intégrale complète; car les angles que les élémens conſécutifs de la circonférence du cercle font entr'eux, ſont égaux & dans un même plan, & l'on peut concevoir une courbe telle que ces angles, ſans ceſſer d'être égaux, ſoient dans des plans perpétuellement différens: les équations de cette courbe ſatisferoient à l'équation *(A)*, puiſque ſon rayon de courbure ſeroit conſtant; & elles ne ſeroient pas compriſes dans celle du cercle, puiſque la courbe ſeroit à double courbure.

Les trois coordonnées rectangulaires de la courbe que l'on conſidère étant x, y, z, ſoient α, ζ, γ, les coordonnées reſpectives du centre de courbure qui correſpond

à ce point; de plus ſoient $6 = \varphi a$, $\gamma = \downarrow a$, les équations de la courbe qui paſſe par tous les centres de courbure, φ & $\downarrow$, étant deux fonctions de a. Cela poſé, la longueur du rayon de courbure devant être égale à une conſtante a, on aura d'abord

$$(B)\quad (x - a)^2 + (y - \varphi a)^2 + (z - \downarrow a)^2 = a.$$

Puis, dans toute courbe à double courbure, les diſtances d'un même centre quelconque de courbure aux trois points conſécutifs de la courbe, dont il eſt le centre, ſont toujours égales entr'elles; donc la diſtance du point de la courbe au centre de courbure correſpondant ne change pas, lorſqu'on fait varier deux fois de ſuite l'ordonnée a; donc les différences première & ſeconde de l'équation (B), priſes en regardant a comme ſeule variable, doivent avoir lieu; donc on aura encore

$$(C)\quad x - a + (y - \varphi a)\varphi' a + (z - \downarrow a)\downarrow' a = 0,$$

$$(D)\quad \left\{\begin{array}{r} -1 - (\varphi' a)^2 - (\downarrow' a)^2 \\ + (y - \varphi a)\varphi'' a + (z - \downarrow a)\downarrow'' a \end{array}\right\} = 0.$$

La conſidération qui vient de fournir les dernières équations eſt générale, & elle appartient à toutes les courbes à double courbure; mais la courbe dont il s'agit, a cela de particulier, que ſon rayon de courbure étant conſtant, la diſtance du même centre de courbure à quatre points conſécutifs de la courbe eſt toujours la même; donc la diſtance du point de la courbe au centre de courbure ne change pas encore, lorſqu'on fait varier une troiſième fois l'ordonnée; donc la différence troiſième de l'équation (B), priſe en regardant a comme ſeule variable, doit encore avoir lieu; donc on aura la quatrième équation

$$(E)\quad \left\{\begin{array}{r} -3\varphi' a\varphi'' a - 3\downarrow' a\downarrow'' a \\ + (y - \varphi a)\varphi''' a + (z - \downarrow a)\downarrow''' a \end{array}\right\} = 0.$$

Digitized by Google

Ainſi, en repréſentant l'équation *(B)* par $M = o$, le ſyſtème des quatre équations ſimultanées,

$$(B) \quad M = o,$$

$$(C) \quad \left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = o,$$

$$(D) \quad \left(\frac{ddM}{d\alpha^2}\right) = o,$$

$$(E) \quad \left(\frac{d^3M}{d\alpha^3}\right) = o,$$

appartient à la courbe dont le rayon de courbure eſt conſtant & $= a$, & il exprime la même choſe que l'équation aux différences ſecondes ordinaires *(A)*.

Les quatre équations que je viens de trouver ſeroient l'intégrale finie de l'équation *(A)*, ſi leur nombre n'excédoit pas celui des variables x, y, z; mais, entre ces quatre équations, on peut éliminer x, y, z, & il reſte entre α, $\varphi\alpha$, $\downarrow\alpha$, une équation de condition qui doit être ſatisfaite, pour que les trois équations employées à l'élimination ſoient l'intégrale demandée.

Il réſulte au moins de-là que les fonctions φ & $\downarrow$ ne doivent pas être toutes deux arbitraires; & que l'une des deux étant priſe à volonté, la forme de l'autre s'enſuit, pour que la courbe dont les équations ſont $\zeta = \varphi\alpha$, $\gamma = \downarrow\alpha$, paſſe par les centres de courbure d'une courbe dont la courbure eſt conſtante. De plus, ſi l'on élimine les coordonnées x, y, z, l'équation réſultante eſt en α, $\varphi\alpha$, $\downarrow\alpha$, préciſément la même que l'équation *(A)* en x, y, z, ce qui tient à une propriété remarquable des courbes de courbure conſtante, & que nous expoſerons bientôt.

XXIII.

QUOIQUE les quatre équations *(B)*, *(C)*, *(D)*, *(E)*, ne préſentent qu'un réſultat différentiel, leur conſidération

conduit cependant à l'intégrale première de l'équation *(A)*. En effet ſi, de ces quatre équations, on différencie les deux premières, en regardant α comme conſtante, ce qui eſt permis en vertu de la ſeconde & de la troiſième; & qu'entre les quatre équations *(B)*, *(C)*, *d(B)*, *d(C)*, on élimine les fonctions φ, φ', on aura les deux équations

$$(b)\qquad (x-\alpha)^2(dy^2+dx^2)+2(x-\alpha)(z-\psi\alpha)dxdz + (z-\psi\alpha)^2(dy^2+dz^2)=a^2dy^2,$$

$$(c)\quad (x-\alpha)(dy^2+dx^2)+[(x-\alpha)\psi'\alpha+(z-\psi\alpha)]dxdz + (z-\psi\alpha)\psi'\alpha(dy^2+dz^2)=0.$$

Puis, après avoir pris dans l'équation *d.(B)*, la valeur de $\varphi'\alpha$, qui eſt $\varphi'\alpha=-\frac{\psi'\alpha dz+dx}{dy}$, ſi on la différencie en regardant α comme conſtante, ce qui eſt encore permis, en vertu de l'équation *(E)*, on trouvera

$$\varphi''\alpha=-\frac{dz}{dy}\psi''\alpha.$$

Enfin ſubſtituant cette valeur de $\varphi''\alpha$ dans *(D)*, on aura la troiſième équation

$$(d)\quad -(dx^2+dy^2)-(dy^2+dz^2)(\psi'\alpha)^2-2dxdz\psi'\alpha + (x-\alpha)\psi''\alpha dxdz+(z-\psi\alpha)\psi''\alpha(dy^2+dz^2)=0;$$

les trois équations *(b)*, *(c)*, *(d)*, ſont le réſultat de l'élimination de la fonction φ & de ſes différences entre les quatre équations *(B)*, *(C)*, *(D)*, *(E)*, & celles de leurs différentielles que l'on a pu prendre en regardant α comme conſtante.

Or, ſi l'on repréſente l'équation *(b)* par $N=0$, les équations *(c)*, *(d)* ſeront $(\frac{dN}{d\alpha})=0$, $(\frac{ddN}{d\alpha^2})=0$, ce quil eſt facile de reconnoître à l'inſpection; donc une des intégrales, première & complète de l'équation *(A)*

aux différences ordinaires secondes, est le résultat de l'élimination de α entre les trois équations

$$(b) \qquad N = 0,$$

$$(c) \qquad \left(\frac{dN}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$(d) \qquad \left(\frac{ddN}{d\alpha^2}\right) = 0.$$

Il est facile de vérifier ce résultat par la différenciation, car si l'on différencie aux différences ordinaires les deux premières de ces équations, en regardant α comme constante, ce qui est permis en vertu de la seconde & de la troisième ; & qu'entre les quatre équations *(b)*, *(c)*, *d (b)*, *d (c)*, on élimine les trois quantités α, $\downarrow\alpha$, $\downarrow'\alpha$, le résultat de l'élimination sera l'équation *(A)* de l'*article XXII.*

XXIV.

Si, au lieu d'éliminer la fonction φ & ses différentielles φ', φ'' entre les équations *(B)*, *(C)*, *d (B)*, *d (C)*, on eût éliminé la fonction $\downarrow$ & ses différentielles $\downarrow'$, $\downarrow''$, on auroit trouvé, en faisant, pour abréger,

$$(x - \alpha)^2 (dz^2 + dx^2) + 2(x - \alpha)(y - \varphi\alpha)\, dx\, dy + (y - \varphi\alpha)^2 (dy^2 + dz^2) - a^2 dz^2 = N',$$

que l'autre intégrale première & complète de l'équation *(A)* est le résultat de l'élimination de α entre les trois équations

$$(b') \qquad N' = 0,$$

$$(c') \qquad \left(\frac{dN'}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$(d') \qquad \left(\frac{ddN'}{d\alpha^2}\right) = 0,$$

intégrale qui est complétée par la fonction arbitraire φ,

comme l'autre l'étoit par la fonction $\downarrow$, & qu'on peut vérifier de même par la différenciation.

XXV.

ACTUELLEMENT que nous avons les deux intégrales premières & complètes de l'équation *(A)*, il est facile de trouver son intégrale finie. Pour cela il faut observer que, s'il étoit possible d'éliminer α entre les trois équations de la première intégrale, ce qui produiroit deux équations sans α, & ensuite d'éliminer encore α entre les trois équations de la seconde intégrale, ce qui produiroit deux autres équations sans α; on auroit alors quatre équations sans α, qui contiendroient les quantités différentielles $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, & les deux fonctions arbitraires φ, $\downarrow$; & en éliminant entre ces quatre équations les deux quantités $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, les deux équations résultantes seroient l'intégrale finie de l'équation *(A)*. Mais, quoique les éliminations dont il s'agit ici ne puissent pas se faire en général, on peut néanmoins les indiquer; d'ailleurs il est nécessaire de remarquer que α devant être éliminé d'abord entre les trois équations *(b)*, *(c)*, *(d)*, prises en particulier, & ensuite entre les trois autres *(b')*, *(c')*, *(d')*, prises de même en particulier, avant de combiner ces six équations, il faut accentuer α dans un des systèmes, par exemple, dans le second. D'après cela, en faisant, pour abréger,

$$(x - \alpha)(dy^2 + dx^2) + 2(x - \alpha)(z - \downarrow\alpha)\,dx\,dz + (z - \downarrow\alpha)^2(dy^2 + dz^2) - a^2dy^2 = N,$$

$$(x - \alpha')(dz^2 + dx^2) + 2(x - \alpha')(y - \varphi\alpha')\,dx\,dy + (y - \varphi\alpha')^2(dy^2 + dz^2) - a^2dz^2 = L,$$

l'intégrale finie & complète de l'équation *(A)* est le résultat

Digitized by Google

de l'élimination des quatre quantités α, α', $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, entre les six équations suivantes,

$$L = 0, \qquad N = 0,$$
$$\left(\frac{dL}{d\alpha'}\right) = 0, \qquad \left(\frac{dN}{d\alpha}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{ddL}{d\alpha'^2}\right) = 0, \qquad \left(\frac{ddN}{d\alpha'^2}\right) = 0:$$

& parce que les deux quantités $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, ne sont pas sous les fonctions arbitraires, l'élimination actuelle de ces quantités est possible. Cette élimination étant faite, il restera quatre équations sans différentielles, & l'intégrale finie de l'équation *(A)* sera le résultat de l'élimination des deux indéterminées α, α' entre ces quatre équations, que je ne rapporte pas, parce qu'elles sont d'un trop grand développement.

On opérera d'une manière analogue pour avoir l'intégrale finie d'une équation aux différences ordinaires d'un ordre quelconque, toutes les fois qu'on aura toutes ses intégrales premières complètes.

On voit donc, non-seulement que l'équation *(A)* aux différences secondes ordinaires, qui ne satisfait pas aux conditions d'intégrabilité, n'est pas absurde, & qu'elle exprime une propriété réelle, puisqu'elle appartient à toutes les courbes à double courbure, dont le rayon de courbure est constant & $= a$; mais encore que cette équation est susceptible de deux véritables intégrations aux différences premières & d'une intégration en quantités finies; enfin que ses deux intégrales premières sont complétées chacune par une fonction arbitraire particulière, & que son intégrale finie est complétée par ces deux fonctions.

XXVI.

Avant que de quitter cet exemple, je rapporterai quelques propriétés de la courbe qui en est l'objet, moins

parce qu'elles ſont très-remarquables, que pour donner une idée des réſultats auxquels peut conduire la conſidération des équations aux différences ordinaires élevées.

1.° Nous avons vu, *article XXIII*, qu'en faiſant, pour abréger,

$$(x-\alpha)^2+(y-\varphi\alpha)^2+(z-\downarrow\alpha)^2-a^2=M,$$

le ſyſtème des quatre équations

$$M=0,$$

$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right)=0,$$

$$\left(\frac{ddM}{d\alpha^2}\right)=0,$$

$$\left(\frac{d^3M}{d\alpha^3}\right)=0,$$

appartient à la courbe dont la courbure eſt conſtante; mais que ce ſyſtème n'eſt pas une intégrale, parce qu'en éliminant entre ces quatre équations, les trois coordonnées x, y, z, on arrive à une équation de condition qui eſt entre α, $\varphi\alpha$, $\downarrow\alpha$, la même que l'équation aux différences ordinaires ſecondes, en x, y, z. Il réſulte de-là que la courbe dont les coordonnées ſont α, $\varphi\alpha$, $\downarrow\alpha$, eſt auſſi de courbure conſtante; & parce que les quatre équations expriment que quatre points conſécutifs de la ſeconde courbe ſont à égales diſtances du même point correſpondant de la première, il s'enſuit que le rayon de courbure de la ſeconde courbe eſt le même, de grandeur & de poſition, que celui de la première.

Donc, *lorſque la courbure d'une courbe eſt conſtante, cette courbe, & celle qui paſſe par ſes centres de courbure, ſont réciproques, c'eſt-à-dire, que ces deux courbes ſont réciproquement, l'une, la ligne des centres de courbure de l'autre.*

On

On pourroit arriver à ce réſultat par une autre conſidération, car j'ai fait voir dans le Mémoire ſur les développées *(Savans étrangers, tome X)*, que les équations d'une courbe à double courbure étant $y = \varphi x$, $z = \psi x$, & α, ζ, γ, étant les coordonnées de la courbe qui paſſe par ſes centres, pour avoir en α, ζ, γ, les équations de cette dernière, il falloit, en faiſant, pour abréger,

$$(\alpha - x)^2 + (\zeta - \varphi x)^2 + (\gamma - \psi x)^2 - a^2 = M,$$

éliminer x entre les trois équations

$$\left(\frac{d\,M}{d\,x}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{d\,d\,M}{d\,x^2}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{d^3\,M}{d\,x^3}\right) = 0;$$

donc, ſi le rayon de courbure de la première courbe eſt conſtant, & $= a$, il faut de plus, que l'on ait $M = 0$. Ainſi, une courbe de courbure conſtante étant donnée, les équations de la ligne de ſes centres ſatisfont aux quatre équations

$$M = 0, \qquad \left(\frac{d\,M}{d\,x}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{d\,d\,M}{d\,x^2}\right) = 0, \qquad \left(\frac{d^3\,M}{d\,x^3}\right) = 0.$$

Mais nous avons vu, *article XXIII*, que la ligne des centres étant donnée, les équations de la courbe de courbure conſtante ſatisfaiſoient aux quatre équations

$$M = 0, \qquad \left(\frac{d\,M}{d\,\alpha}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{d\,d\,M}{d\,\alpha^2}\right) = 0, \qquad \left(\frac{d^3\,M}{d\,\alpha^3}\right) = 0.$$

De plus, les x, y, z entrent dans M, de la même manière que les α, ζ, γ; donc, la courbe de courbure

conſtante, & celle qui paſſe par ſes centres de courbure, ſe déduiſent l'une de l'autre de la même manière, & ſont par conſéquent réciproques, comme je l'ai énoncé plus haut.

2.° L'élément de la courbe qui paſſe par les centres de courbure d'une autre courbe, eſt toujours dirigé dans le plan normal à la ſeconde, car deux centres de courbure conſécutifs ſont toujours ſur le même plan normal; mais lorſque la courbure d'une courbe eſt conſtante, l'élément de ſa ligne des centres eſt de plus perpendiculaire au rayon de courbure commun; donc les tangentes correſpondantes des deux courbes ſont toujours à la même diſtance, & dirigées dans des plans rectangulaires.

Donc, *lorſque la courbure d'une courbe eſt conſtante, cette courbe & celle qui paſſe par ſes centres de courbure, ſont par-tout à la même diſtance l'une de l'autre; elles s'entrelacent perpétuellement, en ſe préſentant toujours leurs concavités, à peu-près comme les torons d'une corde à deux brins, & leurs tangentes aux extrémités du rayon de courbure commun ſont dans des plans rectangulaires.*

Le filet d'une vis à baſe circulaire, eſt évidemment une courbe à courbure conſtante, & ſes équations ſatisfont à l'équation *(A)*. La ligne des centres de cette courbe eſt le filet d'une autre vis de même pas & de même axe, mais tracée ſur un cylindre d'un diamètre plus ou moins grand que celui de la première, ſuivant que l'inclinaiſon conſtante de la tangente de la première eſt plus ou moins grande que 45 degrés; & le diamètre du cylindre de la ſeconde courbe eſt tel que, pour le même pas, l'inclinaiſon des tangentes des deux courbes ſont complément l'une de l'autre.

Enfin, tout le monde connoît les vis à deux filets équidiſtans; on les emploie fréquemment dans les arts, & principalement dans les balanciers des monnoies: lorſque les tangentes de ces filets ſont des angles de 45 degrés avec le plan de la baſe du cylindre, ces deux courbes ſont réciproquement l'une la ligne des centres de courbure de l'autre.

Digitized by Google

XXVII.

THÉORÈME I. La différence dx de la variable principale étant conſtante, ſi l'on a une équation aux différences ſecondes ordinaires à trois variables

$$(A) \quad F\left(\frac{ddy}{dx^2}, \frac{ddz}{dx^2}\right) = 0,$$

dans laquelle il n'entre que les différences ſecondes & la différence première conſtante dx; l'intégrale première de cette équation ſera le réſultat de l'élimination de l'indéterminée α entre les trois équations ſuivantes,

$$(B) \quad F\left(\frac{dy - \alpha dx}{x\,dx}, \frac{dz - \varphi\alpha . dx}{x\,dx}\right) = 0,$$

$$(C) \qquad \left(\frac{dF}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$(D) \qquad \left(\frac{ddF}{d\alpha^2}\right) = 0,$$

dans leſquelles la fonction F eſt la même que celle de la propoſée, & où φ eſt une fonction arbitraire.

Pour le démontrer, ſoit fait, pour abréger,

$$\frac{dy - \alpha dx}{x\,dx} = u, \quad \frac{dz - \varphi\alpha dx}{x\,dx} = v,$$

les deux premières équations intégrales *(B)*, *(C)*, deviendront

$$(B') \quad F(u, v) = 0,$$

$$(C') \quad \left(\frac{dF}{du}\right) + \left(\frac{dF}{dv}\right)\varphi'\alpha = 0;$$

ſi l'on différencie ces deux dernières équations, en regardant α comme conſtante, ce qui eſt permis en vertu des deux équations *(C)*, *(D)*, les différentielles ſeront toutes deux de la forme

$$Mdu + Ndv = 0;$$

Digitized by Google

elles ne pourront pas subsister simultanément, & indépendamment de la forme de la fonction F, à moins que l'on n'ait en même-temps $du = 0$, $dv = 0$; ou, développant les valeurs de du & dv, à moins que l'on n'ait

$$\frac{dy - \alpha\, dx}{x\, dx} = \frac{ddy}{dx^2},$$

$$\frac{dz - \varphi\alpha\, dx}{x\, dx} = \frac{ddz}{dx^2};$$

or si l'on élimine de l'équation (B) les quantités α, $\varphi\alpha$, au moyen des deux dernières équations, on aura la proposée (A); donc, &c.

XXVIII.

THÉORÈME II. La différence dx de la variable principale étant toujours regardée comme constante, & les quantités Y, Z étant composées l'une & l'autre, d'une manière quelconque, des trois variables x, y, z, & de leurs différences premières; si l'on a une équation aux différences ordinaires secondes

$$F\left(\frac{dY}{dx^2}, \frac{dZ}{dx^2}\right) = 0;$$

dans laquelle il n'entre que les différences des quantités x, Y, Z, l'intégrale première de cette équation sera le résultat de l'élimination de α entre les trois équations

$$F\left(\frac{Y - \alpha dx}{x\, dx}, \frac{Z - \varphi\alpha . dx}{x\, dx}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{dF}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{ddF}{d\alpha^2}\right) = 0,$$

dans lesquelles F est la fonction de la proposée, & où φ est une fonction arbitraire.

Ce théorème est une suite du précédent.

Digitized by Google

XXIX.

THÉORÈME III. Quel que ſoit le nombre des variables $u, x, y, z \ldots$, parmi leſquelles u eſt la variable principale, dont la différence première du eſt regardée comme conſtante; de plus, les trois quantités X, Y, Z, étant compoſées d'une manière quelconque de toutes les variables & de leurs différences premières; ſi l'on a une équation aux différences ordinaires ſecondes

$$F\left(\frac{dY}{dX}, \frac{dZ}{dX}\right) = 0,$$

qui ne renferme que les différences des quantités X, Y, Z, une des intégrales premières de cette équation ſera le réſultat de l'élimination de l'indéterminée α entre les trois équations

$$F\left(\frac{Y - \alpha du}{X}, \frac{Z - \varphi \alpha du}{X}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{dF}{d\alpha}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{ddF}{d\alpha^2}\right) = 0.$$

XXX.

THÉORÈME IV. Quel que ſoit le nombre des variables parmi leſquelles u eſt la variable principale, dont la différence première du eſt regardée comme conſtante; de plus, les trois quantités U, V, W, étant compoſées d'une manière quelconque de toutes les variables; ſi l'on a l'équation aux différences ordinaires ſecondes

$$F\left(\frac{ddU}{ddW}, \frac{ddV}{ddW}\right) = 0,$$

outre l'intégrale première déduite du théorème précédent; cette équation en aura encore une autre, qui ſera le réſultat de l'élimination de l'indéterminée α' entre les trois équations ſuivantes

Digitized by Google

$$F\left[\frac{udU-(U-\alpha')du}{udW-Wdu},\frac{udV-(V-\varphi\alpha')du}{udW-Wdu}\right]=0,$$

$$\left(\frac{dF}{d\alpha'}\right)=0,$$

$$\left(\frac{ddF}{d\alpha'^2}\right)=0.$$

Ces deux derniers théorèmes se démontrent comme le premier.

CONCLUSION.

ON voit donc, 1.° que les équations aux différences ordinaires secondes, qui ne satisfont pas aux anciennes conditions d'intégrabilité, & par une analogie évidente celles des ordres supérieurs, n'énoncent rien d'absurde; qu'elles sont susceptibles d'une véritable intégration, & que leurs intégrales sont complétées par des fonctions arbitraires; 2.° que celles de ces équations qui ne renferment que trois variables, appartiennent à des courbes à double courbure, dont elles expriment la génération; & c'est lorsque cette génération ne dépend pas seulement de quelques points donnés à volonté, mais de courbes prises arbitrairement, que les intégrales de ces équations différentielles sont complétées par des fonctions arbitraires.

Des Équations aux différences partielles du premier ordre.

XXXI.

ON a déjà vu qu'étant proposée une équation aux différences partielles du premier ordre, & à trois variables, représentée par $V=0$, si l'on substitue dans cette équation pour p ou q, pour p, par exemple, sa valeur prise dans l'équation $dz=p\,dx+q\,dy$, & qu'on élimine q du résultat, au moyen de sa différentielle prise en regardant q comme seule variable, on aura une équation aux différences ordinaires $U=0$, qui en général sera élevée. On a vu pareillement que si l'intégrale complète de l'équation aux différences ordinaires est le résultat de l'élimination de α entre les trois équations

Digitized by Google

$$M = 0,$$

$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{ddM}{d\alpha^2}\right) = 0;$$

M étant trouvée par intégration, & contenant une fonction arbitraire de α, l'intégrale complète de l'équation aux différences partielles $V = 0$, eſt le réſultat de l'élimination de α entre les deux premiéres de ces équations intégrales; en ſorte que de la perfection du calcul intégral des équations aux différences ordinaires, s'enſuivroit celle du calcul des équations aux différences partielles.

Ce que j'ai dit dans le Mémoire précédent ſur l'intégration des équations aux différences partielles linéaires, eſt un cas particulier de la méthode que je viens de propoſer, car l'équation linéaire eſt toujours de la forme

$$Lp + Mq + N = 0.$$

Si l'on élimine p, au moyen de l'équation $dz = pdx + qdy$,

on a $$Ldz + Ndx + q(Mdx - Ldy) = 0;$$

& ſi l'on différencie cette dernière équation, en regardant q comme ſeule variable, on a

$$Mdx - Ldy = 0,$$

& par conſéquent

$$Ldz + Ndx = 0,$$

qui ſont les deux équations que j'ai données, & que M. de la Grange avoit publiées auparavant.

XXXII.

Les intégrales de toutes les équations aux différences partielles, même du premier ordre & à trois variables, ne ſont pas ſuſceptibles d'être miſes ſous la forme précédente, parce que cette forme ſuppoſe tacitement que l'équation

Digitized by Google

appartient à une ſurface courbe; & il y a un nombre infini d'équations aux différences partielles qui appartiennent à des courbes à double courbure, & dont l'intégrale ne peut être exprimée que par le ſyſtème de deux équations ſimultanées, entre leſquelles il n'y a rien à éliminer, ou par le ſyſtème de trois équations, entre leſquelles il faut éliminer une indéterminée, comme je vais le faire voir dans l'exemple ſuivant.

Soit propoſé d'intégrer l'équation

$$p - Ay = \varphi(q + Ax),$$

dans laquelle A eſt une conſtante, & où φ eſt une fonction arbitraire.

Ce que cette équation a de remarquable, c'eſt que ſi l'on fait $A = 0$, elle devient $p = \varphi q$, qui appartient à toutes les ſurfaces développables, & dont l'intégrale eſt connue; tandis que ſi on laiſſe ſubſiſter A, elle n'appartient plus à une ſurface courbe, mais à une courbe à double courbure.

En effet, ſoit fait, pour abréger,

$$q + Ax = \alpha,$$

ce qui donnera

$$p - Ay = \varphi\alpha.$$

Il eſt clair que la quantité α eſt une indéterminée ſur la valeur de laquelle rien ne doit être prononcé, & qui eſt deſtinée à diſparoître par élimination. Si l'on ſubſtitue pour p & q les valeurs précédentes dans $dz = pdx + qdy$, on aura

$$dz = dx\varphi\alpha + \alpha dy - A(xdy - ydx).$$

Actuellement, ſi cette équation aux différences ordinaires étoit intégrable en regardant α comme conſtant, & ſi ſon intégrale complétée par une fonction arbitraire de α étoit $M = 0$, il eſt évident, par les principes de ce genre de calcul, que l'intégrale complète de la propoſée ſeroit

Digitized by Google

ſeroit le réſultat de l'élimination de α entre les deux équations $M = 0$, $\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0$; mais l'équation aux différences ordinaires ne ſatisfait pas aux conditions d'intégrabilité, elle appartient à une courbe à double courbure, qui ne peut être exprimée en quantités finies, que par le ſyſtème de deux équations, & d'après l'*article XVI*, ſi la quantité α étoit une conſtante abſolue, ces deux équations ſeroient

$$z = x\varphi\alpha + \alpha y + \downarrow\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\downarrow'\left(\frac{y}{x}\right) = -Ax^2.$$

De plus, α n'eſt pas une conſtante abſolue, elle doit ſeulement être regardée comme conſtante dans l'intégration précédente, c'eſt-à-dire, que cette intégration eſt priſe en regardant comme conſtantes les deux quantités $\frac{y}{x}$ & α; donc la fonction $\downarrow$ qui complète l'intégrale doit être compoſée de ces deux quantités; donc l'intégrale complète de la propoſée eſt le réſultat de l'élimination de l'indéterminée α entre les trois équations

$$(A)\quad z = x\varphi\alpha + \alpha y + \downarrow\left(\frac{y}{x}, \alpha\right),$$

$$(B)\quad x\varphi'\alpha + y + \downarrow''\left(\frac{y}{x}, \alpha\right)$$

$$(C)\quad \downarrow'\left(\frac{y}{x}, \alpha\right) = -Ax^2,$$

dont la ſeconde eſt la différentielle de la première, priſe en regardant α comme ſeule variable, & dans leſquelles $\downarrow$ eſt une fonction arbitraire de deux quantités, $\downarrow'$ & $\downarrow''$ étant les coéfficiens de du & dv dans la différentielle de $\downarrow(u, v)$. Le réſultat de cette élimination comporte deux équations qui ſont celles de la courbe à double

courbure, à laquelle appartient l'équation aux différences partielles.

Parmi les équations aux différences partielles, il y en a donc qui appartiennent à des courbes à double courbure; leur intégrale finie ne peut être exprimée que par le système de deux équations entre lesquelles il n'y a rien à éliminer, & cette intégrale est complétée par une fonction arbitraire de deux quantités, ce que les Géomètres ne s'étoient encore permis que pour les intégrales des équations à quatre variables.

Comme la conclusion précédente est extraordinaire, je vais la vérifier de plusieurs manières.

1.° Si, dans l'intégrale, on fait $A = 0$, l'équation *(C)* donne $\downarrow' = 0$, ce qui indique que la quantité $\frac{y}{x}$ n'entre pas dans la fonction $\downarrow$; ainsi cette intégrale se réduit aux deux équations

$$z = x\varphi\alpha + \alpha y + \downarrow\alpha$$
$$x\varphi'\alpha + y + \downarrow'\alpha = 0,$$

qui sont l'intégrale connue de l'équation $p = \varphi q$, que l'on obtient en faisant de même dans la proposée $A = 0$.

2.° Si l'on différencie l'équation *(A)* en regardant α comme constante, ce qui est permis en vertu de *(B)*, on trouve

$$p = \varphi\alpha - \frac{y}{x^2}\downarrow'\left(\frac{y}{x}, \alpha\right),$$

$$q = \alpha + \frac{1}{x}\downarrow'\left(\frac{y}{x}, \alpha\right):$$

si l'on substitue pour $\downarrow'$, sa valeur, prise dans *(C)*, on a

$$p = \varphi\alpha + Ay,$$
$$q = \alpha - Ax;$$

& enfin, éliminant α, on obtient

$$p - Ay = \varphi(q + Ax),$$

qui est la proposée.

Digitized by Google

3.° Si l'on prend des cas particuliers, c'eſt-à-dire, ſi l'on donne aux fonctions φ, ψ, des formes déterminées, & qu'on élimine α entre les trois équations *(A)*, *(B)*, *(C)*, on aura deux équations qui, par la différenciation, ſatiſferont à la propoſée.

XXXIII.

En opérant d'une manière analogue, on trouve qu'étant propoſée l'équation aux différences partielles à quatre variables u, x, y, z,

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) + Aux = \varphi\left[\left(\frac{dz}{du}\right) - Axy, \left(\frac{dz}{dx}\right) - Auy\right],$$

dans laquelle A eſt une conſtante abſolue, & φ une fonction arbitraire de deux quantités; ſon intégrale complète eſt le réſultat de l'élimination des deux indéterminées α, ζ, entre les quatre équations ſuivantes,

$$z = \alpha u + \zeta x + y\varphi(\alpha, \zeta) + \psi\left(\frac{ux}{y}, \alpha, \zeta\right),$$
$$u + y\varphi'(\alpha, \zeta) + \psi'' = 0,$$
$$x + y\varphi''(\alpha, \zeta) + \psi''' = 0,$$
$$\psi' = Ay^2,$$

dont la deuxième & la troiſième ſont les différentielles de la première, priſes en regardant α pour l'une, & ζ pour l'autre, comme ſeule variable; dans leſquelles ψ eſt une fonction arbitraire de trois quantités; où φ' & φ'' ſont les deux coéfficiens de la différence de φ; & où ψ', ψ'', ψ''', ſont les coéfficiens de la différence de ψ.

Le calcul intégral des équations aux différences ordinaires, & celui des équations aux différences partielles, dépendant réciproquement l'un de l'autre, tous les pas que l'on fait dans la ſeconde de ces deux eſpèces de calculs, ſont utiles à la première; ainſi, je vais rapporter quelques théorèmes, qui ne ſont pas compris dans ceux de M. de la Grange.

Digitized by Google

XXXIV.

JE ſuppoſerai que le nombre des variables ſoit quelconque, & je ferai, pour abréger,

$$dz = p\,du + q\,dx + r\,dy \ldots\ldots$$

THÉORÈME I. Les quantités U, X, Y, étant des fonctions données reſpectivement en u, x, y, l'intégrale complète de l'équation aux différences partielles

$$F(z, pU, qX, rY \ldots\ldots) = 0,$$

ne dépend que des quadratures.

Soit fait

$$pU = \alpha rY,$$
$$qX = \zeta rY,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

α, ζ.... étant des indéterminées ſur la valeur deſquelles on ne doit rien ſtatuer, & qui ſont deſtinées à diſparoître par l'élimination ; & ſoient ſubſtituées dans la propoſée pour pU, qX.... leurs valeurs, l'équation deviendra

$$f(z, \alpha, \zeta, \ldots\ldots rY) = 0,$$

de laquelle on pourra tirer la valeur de rY en z, α, ζ.....Soit cette valeur

$$rY = f(z, \alpha, \zeta \ldots\ldots),$$

on en conclura

$$pU = \alpha f(z, \alpha, \zeta \ldots\ldots),$$
$$qX = \zeta f(z, \alpha, \zeta \ldots\ldots);$$

ſubſtituant pour p, q, r.... ces valeurs dans

$$dz = p\,du + q\,dx + r\,dy \ldots\ldots$$

on aura

$$\frac{dz}{f(z, \alpha, \zeta \ldots)} = \frac{\alpha\,du}{U} + \frac{\zeta\,dx}{X} + \frac{dy}{Y} \ldots\ldots$$

Digitized by Google

équation dont l'intégrale, en regardant α, $\zeta\ldots$ comme conſtantes, ne dépend que des quadratures, & doit être complétée par une fonction arbitraire des conſtantes hypothétiques α, $\zeta\ldots$. Soit $M = 0$, cette intégrale ainſi complétée; elle ne pourra pas être employée ſeule, parce qu'il faut indiquer ce qui a été regardé comme conſtant dans l'intégration; on aura donc, ſimultanément,

$$M = 0,$$

$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{dM}{d\zeta}\right) = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

Toutes ces équations devant avoir lieu, indépendamment des valeurs de α, $\zeta\ldots$ ſi l'on élimine ces indéterminées, on aura l'intégrale complète de la propoſée. L'élimination dont il s'agit ici, ne peut pas s'exécuter en général, parce que les quantités α, $\zeta\ldots$ ſont ſous la fonction arbitraire & ſous ſes différences partielles.

XXXV.

Théorème II. Les quantités L, M, N, $P\ldots$. en même nombre que les variables, étant compoſées des variables & des différences partielles premières, de manière que toutes les équations ſuivantes, moins une, étant poſées, la dernière s'enſuive néceſſairement,

$$dL = 0,$$

$$lM = 0,$$

$$dN = 0,$$

$$dP = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

Digitized by Google

ſi l'on a une équation compoſée de toutes ces quantités, & que je repréſente par

$$F(L, M, N, P.....) = 0,$$

F étant une fonction quelconque donnée, algébrique ou tranſcendante, arbitraire ou déterminée; on aura l'intégrale de cette équation, en éliminant d'abord toutes les différences partielles, & une des deux fonctions arbitraires φ ou $\downarrow$, entre les équations ſuivantes,

$$\begin{aligned} L &= \varphi(\alpha, \zeta....), \\ M &= \downarrow(\alpha, \zeta....), \\ N &= \alpha, \\ P &= \zeta, \\ &..... \\ F(\varphi, \downarrow, \alpha, \zeta.....) &= 0, \end{aligned}$$

dans leſquelles F eſt la même fonction que celle de la propoſée; ce qui produira une équation unique que je repréſente par $M = 0$, puis en éliminant toutes les indéterminées α, ζ..... entre les équations

$$\begin{aligned} M &= 0, \\ \left(\frac{dM}{d\alpha}\right) &= 0, \\ \left(\frac{dM}{d\zeta}\right) &= 0, \\ &..... \end{aligned}$$

Exemple. Soit propoſée l'équation

$$F[p, q, r....(z - pu - qx - ry....)] = 0,$$

dans laquelle F indique une fonction quelconque donnée. Comme de toutes les équations

$$dp = 0,$$

Digitized by Google

$$dq = 0,$$
$$dr = 0,$$
$$\ldots\ldots$$
$$d(z - pu - qx - ry\ldots..) = 0,$$

une quelconque ſuit de toutes les autres, la propoſée eſt dans le cas du théorème, & ſon intégrale eſt le réſultat de l'élimination des indéterminées α, $\mathfrak{C}\ldots.$ entre les équations ſuivantes,

$$F\{\varphi(\alpha,\mathfrak{C}\ldots),\alpha,\mathfrak{C}\ldots[z - u\varphi(\alpha,\mathfrak{C}\ldots) - \alpha x - \mathfrak{C}y\ldots]\} = 0,$$
$$\left(\frac{dF}{d\alpha}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{dF}{d\mathfrak{C}}\right) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

M. de la Grange avoit donné un réſultat analogue, ſeulement pour le cas de deux variables principales.

XXXVI.

Sur les équations aux différences partielles des ordres ſupérieurs.

Ce que nous avons dit des équations aux différences partielles du premier ordre, a pareillement lieu pour celles des ordres ſupérieurs; c'eſt-à-dire qu'en faiſant, pour abréger,

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$
$$dp = r\,dx + s\,dy,$$
$$dq = s\,dx + t\,dy,$$

ſi l'on ſubſtitue dans une équation aux différences partielles ſecondes $V = 0$, pour r & t leurs valeurs en dp, dq, dx, dy, priſes dans les équations précédentes, on aura une équation qui ne renfermera plus d'autres différences

Digitized by Google

partielles secondes que s; & si l'on différencie cette équation en regardant s comme seule variable, & qu'ensuite on élimine s au moyen de cette différentielle, on aura une équation $U = 0$ aux différences ordinaires entre les variables x, y, z, p, q, dont l'intégrale fournira celle de la proposée.

Le résultat aux différences ordinaires que j'ai représenté en général par $U = 0$, peut arriver sous plusieurs formes très-différentes.

1.° Ce résultat peut comporter deux équations aux différences ordinaires, ce qui aura toujours lieu lorsque la proposée sera linéaire, & dans quelques cas des différences élevées; alors si les intégrales de ces deux équations aux différences ordinaires sont $M = \alpha$, $N = \zeta$, α & ζ étant les constantes arbitraires introduites par les intégrations, l'intégrale première de la proposée sera $M = \varphi N$.

2.° Si le résultat aux différences ordinaires ne renferme qu'une seule équation élevée, & que l'intégrale complète de cette équation soit le résultat de l'élimination de l'indéterminée α entre trois équations de cette forme

$$M = 0,$$
$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{d.dM}{d\alpha^2}\right) = 0,$$

l'intégrale première de la proposée sera le résultat de l'élimination de α entre les deux premières équations

$$M = 0,$$
$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0.$$

3.° Enfin si le résultat aux différences ordinaires est une équation linéaire unique, & pour laquelle les anciennes conditions d'intégrabilité ne soient pas satisfaites, on se comportera

comportera d'une manière analogue à ce que j'ai fait, *article XXXII.*

Je vais apporter un exemple pour chacun de ces trois cas.

XXXVII.

EXEMPLE I. Soit proposé d'intégrer l'équation aux différences partielles secondes

$$rt - s^2 + A = 0,$$

dans laquelle A est une constante.

Je substitue pour r & t leurs valeurs prises dans

$$dp = rdx + sdy, \quad dq = sdx + tdy,$$

ce qui donne

$$s(dqdy + dpdx) = dpdq + Adxdy.$$

Je différencie cette équation en regardant s comme seule variable, & j'élimine s, ce qui, dans ce cas où s est linéaire, se réduit à égaler à zéro chacun des deux membres; & j'ai les deux équations aux différences ordinaires

$$dqdy + dpdx = 0,$$
$$dpdq + Adxdy = 0,$$

desquelles on tire

$$dp = -dy\sqrt{(A)},$$
$$dq = dx\sqrt{(A)}:$$

or ces deux équations sont des différences exactes, & leurs intégrales complètes sont

$$p + y\sqrt{(A)} = \alpha,$$
$$q + x\sqrt{(A)} = \zeta;$$

donc faisant $\alpha = \varphi\zeta$, l'intégrale complète première de la proposée est

$$p + y\sqrt{(A)} = \varphi[q - x\sqrt{(A)}].$$

Si dans la propoſée on fait $A = 0$, elle devient $rt - s^2 = 0$, équation des ſurfaces développables; & ſi on fait la même ſuppoſition dans l'intégrale, on a $p = \varphi q$, qui eſt une des intégrales premières de cette équation.

Actuellement, l'intégrale que l'on vient de trouver, eſt préciſément l'équation que j'ai traitée, *article XXXII;* donc l'intégrale complète de la propoſée eſt le réſultat de l'élimination de l'indéterminée α entre les trois équations

$$z = x\varphi\alpha + \alpha y + \downarrow\left(\frac{y}{x}, \alpha\right),$$

$$x\varphi'\alpha + y + \downarrow'\left(\frac{y}{x}, \alpha\right),$$

$$\downarrow'\left(\frac{y}{x}, \alpha\right) = x^3 V(A),$$

dont la ſeconde eſt la différentielle de la première, priſe en regardant α comme ſeule variable; & dans leſquelles φ eſt une fonction arbitraire d'une quantité, $\downarrow$ eſt une fonction arbitraire de deux quantités, $\downarrow'$ & $\downarrow''$ ſont les coéfficiens de du & dv dans la différentielle de $\downarrow(u, v)$.

Ainſi la propoſée appartient à une courbe à double courbure, excepté dans le cas où l'on a $A = 0$; alors elle appartient à toutes les ſurfaces développables.

XXXVIII.

EXEMPLE II. Soit propoſé d'intégrer l'équation

$$(rt - s^2)^2 + 4rs = 0.$$

Je chaſſe r & t, au moyen des équations

$$dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy,$$

ce qui donne

$$\left.\begin{array}{l}[dp\,dq - s(dq\,dy + dp\,dx)]^2 \\ + 4s\,dx\,dy^2(dp - s\,dy)\end{array}\right\} = 0;$$

Digitized by Google

différenciant cette équation, en regardant s comme seule variable, & éliminant ensuite s au moyen de cette différentielle, je trouve l'équation aux différences ordinaires,

$$dpdq = dy^2.$$

Or, cette équation élevée est compriſe dans celles que j'ai traitées, *article VII*, & en faiſant, pour abréger,

$$(p - \alpha)(q - \varphi\alpha) - y^2 = M,$$

ſon intégrale eſt le réſultat de l'élimination de α entre les trois équations

$$M = 0,$$

$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{ddM}{d\alpha^2}\right) = 0;$$

donc une des intégrales premières de la propoſée eſt le ſyſtème des deux premières de ces trois équations, c'eſt-à-dire, le réſultat de l'élimination de l'indéterminée α entre les deux ſuivantes,

$$(p - \alpha)(q - \varphi\alpha) - y^2 = 0,$$
$$(p - \alpha)\varphi'\alpha + q - \varphi\alpha = 0.$$

Pour avoir l'intégrale finie, je tire de ces deux équations les valeurs de p & q, ce qui donne

$$p = \alpha + \frac{y}{\sqrt{(-\varphi'\alpha)^2}},$$
$$q = \varphi\alpha + y\sqrt{(-\varphi'\alpha)};$$

& ſubſtituant ces valeurs dans $dz = p\,dx + q\,dy$, je trouve

$$dz = \alpha\,dx + dy\varphi\alpha + \frac{y}{\sqrt{(-\varphi'\alpha)}}(dx - dy\varphi'\alpha).$$

Si cette dernière équation étoit intégrable, en regardant α comme conſtante, & que ſon intégrale, complétée par

une fonction arbitraire de α, fût $M = 0$, l'intégrale finie demandée seroit le résultat de l'élimination de α entre les deux équations $M = 0$, $\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0$, & cette intégrale appartiendroit à une surface courbe. Mais la dernière équation aux différences ordinaires n'est pas intégrable en regardant α comme constante; & pour qu'elle le devînt, il faudroit encore regarder $x - y\varphi'\alpha$ comme constante; donc je pourrai l'intégrer dans cette double hypothèse, & alors il faudra, 1.° compléter l'intégrale par une fonction arbitraire des deux quantités regardées comme constantes dans l'intégration; 2.° exprimer par deux équations, que ces deux quantités n'ont pas varié, ce qui donnera

$$z = \alpha x + y\varphi\alpha + \downarrow [(x - y\varphi'\alpha), \alpha]$$
$$x + y\varphi'\alpha - y\varphi''\alpha\downarrow' + \downarrow'' = 0,$$
$$\downarrow' = \frac{y}{\sqrt{(-\varphi'\alpha)}};$$

donc l'intégrale finie de la proposée est le résultat de l'élimination de α entre les trois équations précédentes, dont la seconde est la différentielle de la première, prise en regardant α comme constante, & dans lesquelles φ est une fonction arbitraire d'une quantité, $\downarrow$ est une fonction arbitraire de deux quantités, & $\downarrow'$, $\downarrow''$ sont les coëfficiens de du & dv dans la différentielle de $\downarrow(u, v)$. Ainsi la proposée appartient à une courbe à double courbure.

XXXIX.

EXEMPLE III. Soit proposé

$$Ar + Bq + z = 0,$$

dans laquelle A & B sont des constantes.

Je substitue pour r sa valeur dans $dp = rdx + sdy$, & je trouve

$$Adp + (Bq + z)dx = Asdy;$$

Digitized by Google

Éliminant s au moyen de la différentielle prise en regardant s comme seule variable, ce qui se réduit à égaler à zéro les deux membres de l'équation, j'obtiens les deux équations aux différences ordinaires simultanées,

$$Adp + (Bq + z)dx = 0,$$
$$dy = 0,$$

en sorte que si la premiére satisfaisoit aux conditions d'intégrabilité, & que son intégrale fût $M = \alpha$, l'intégrale première de la proposée seroit $M = \varphi y$. Mais la première équation ne satisfait pas aux conditions d'intégrabilité, & son intégrale, prise indépendamment de la seconde équation, seroit le système des deux équations simultanées,

$$Ap + \varphi x = 0,$$
$$\varphi' x = Bq + z;$$

donc cette intégrale devant être prise en supposant que la seconde équation ait lieu, l'arbitraire qui la complète doit être aussi fonction de y; & l'on doit avoir pour intégrale première de la proposée, le système des équations simultanées,

$$Ap + \varphi(x, y) = 0,$$
$$\varphi'(x, y) = Bq + z,$$

dans lesquelles φ' est le coéfficient de dx dans la différentielle de $\varphi(x, y)$.

Cette intégrale première peut être mise sous une autre forme; car si l'on tire de ces équations les valeurs suivantes de p, q,

$$p = \frac{-\varphi(x,y)}{A},$$
$$q = \frac{\varphi'(x,y) - z}{B},$$

Digitized by Google

& qu'on les ſubſtitue dans $dz = p\,dx + q\,dy$, on aura

$$dz = \frac{-dx\varphi(x,y)}{A} + \frac{dy\varphi'(x,y) - z\,dy}{B},$$

équation aux différences ordinaires du premier ordre, qui ne renferme aucune indéterminée, & qui devant ſubſiſter ſans condition, eſt elle-même la véritable intégrale première de l'équation aux différences partielles du ſecond ordre, c'eſt-à-dire, qu'elle exprime la même choſe, & qu'elle eſt de la même généralité que la propoſée; & parce que cette équation ne ſatisfait pas aux conditions d'intégrabilité, & que ſon intégrale ne peut être exprimée que par le ſyſtème de deux équations ſimultanées, il s'enſuit que la propoſée appartient à une courbe à double courbure.

Actuellement, pour intégrer encore une fois cette équation, ſoit $\varphi(x,y)$ le coëfficient de dx dans la différentielle d'une autre fonction arbitraire $\psi(x,y)$, de manière que l'on ait

$$\varphi(x,y) = \psi(x,y),$$
$$\varphi'(x,y) = \psi'(x,y),$$

ψ' étant le coëfficient de dx^2 dans la différence ſeconde de ψ, l'équation aux différences ordinaires deviendra

$$dz = -d\frac{\psi(x,y)}{A} + dy\left[\frac{\psi'(x,y) - z}{B} + \frac{\psi''(x,y)}{A}\right],$$

ψ'' étant le coëfficient de dy dans la différentielle de $\psi(x,y)$. Or d'après ce que j'ai dit ſur l'intégration des équations aux différences ordinaires linéaires, l'intégrale de cette équation eſt le ſyſtème des deux équations ſimultanées

$$z = -\frac{\psi(x,y)}{A} + \pi y,$$
$$\pi' y = \frac{\psi'(x,y) - z}{B} + \frac{\psi''(x,y)}{A},$$

Digitized by Google

dans lesquelles π est une fonction arbitraire de la seule quantité y; donc ce système d'équations est aussi l'intégrale finie & complète de la proposée; ce qu'il est très-facile de vérifier par la différenciation.

XL.

Le même procédé s'applique aux équations d'ordres supérieurs. Je ne me permettrai qu'un seul exemple.

Soit proposé d'intégrer l'équation aux différences partielles du troisième ordre

$$\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right)\left(\frac{d^3z}{dy^3}\right) = \left(\frac{d^3z}{dx^2dy}\right)\left(\frac{d^3z}{dxdy^2}\right),$$

je chasse trois de ces différences partielles au moyen des trois équations suivantes

$$dr = \left(\frac{d^3z}{dx^3}\right)dx + \left(\frac{d^3z}{dx^2dy}\right)dy,$$

$$ds = \left(\frac{d^3z}{dx^2dy}\right)dx + \left(\frac{d^3z}{dxdy^2}\right)dy,$$

$$dt = \left(\frac{d^3z}{dxdy^2}\right)dx + \left(\frac{d^3z}{dy^3}\right)dy,$$

ce qui donne, en conservant $\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right)$,

$$\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right)(dtdy^2 - drdx^2) = dr(dsdy - drdx);$$

je différencie cette équation en regardant $\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right)$ comme seule variable, & j'élimine cette quantité au moyen de la différentielle, ce qui, à cause que $\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right)$ est linéaire, se réduit à égaler à zéro chacun des membres de l'équation, & j'ai les deux équations aux différences ordinaires

$$dr(dsdy - drdx) = 0,$$
$$dtdy^2 - drdx^2 = 0.$$

Digitized by Google

La première de ces deux équations a deux racines, dont l'une eſt $dr = 0$, en vertu de laquelle la ſeconde équation devient $dtdy^2 = 0$; dont une des racines eſt $dt = 0$; donc on a ſimultanément les deux équations

$$dr = 0,$$
$$dt = 0;$$

or les intégrales complètes de ces équations ſont $r = \alpha$, $t = \zeta$; donc une des intégrales premières de la propoſée eſt

$$t = \varphi r,$$

ce qu'il eſt facile de vérifier par la différenciation.

XLI.

LES équations aux différences partielles élevées ne ſont pas les ſeules qui puiſſent appartenir à des courbes à double courbure; la plupart des équations linéaires ſont encore dans le même cas; nous nous contenterons de le faire voir par l'équation

$$(A)\quad Ar + Bs + Ct + Dp + Eq + F = 0,$$

dans laquelle tous les coéfficiens ſont conſtans. Nous avons déjà traité cette équation dans le Mémoire précédent, *article XXX;* mais l'intégrale que nous avons trouvée eſt encore trop particulière.

Si l'on ſubſtitue dans cette équation par r & t leurs valeurs priſes dans

$$dp = rdx + sdy,\ dq = sdy + tdy,$$

& qu'enſuite l'on élimine s au moyen de la différentielle priſe en regardant s comme ſeule variable, on aura les deux équations aux différences ordinaires ſimultanées

$$(B)\quad Ady^2 - Bdxdy + Cdx^2 = 0,$$
$$(C)\quad Adpdy^2 - Cdqdx + dxdy(Dp + Eq + F) = 0,$$

les

les racines de la première ſont

$$dy - kdx = 0, \quad \& \quad dy + k'dx = 0,$$

k & k' étant les racines de l'équation algébrique

$$Ak^2 - Bk + C = 0;$$

ainſi, en employant la première racine, & l'introduiſant dans l'équation *(C)*, les deux équations aux différences ordinaires ſimultanées deviennent

$$(D) \qquad dy - k\,dx = 0,$$

$$(E) \quad A(dp + k'dq) + dx(Dp + Eq + F) = 0.$$

Ce ſont ces deux équations qui doivent donner une des intégrales premières de la propoſée.

L'intégrale de l'équation *(D)* eſt $y - kx = \alpha$, α étant la conſtante arbitraire; ſi celle de l'équation *(E)* étoit $M = \mathfrak{C}$, l'intégrale première ſeroit $M = \varphi\alpha$; mais, 1.° l'équation *(E)* n'appartient pas en général à une ſurface courbe, & ſon intégrale ne peut être une équation unique que dans le cas où les coéfficiens de la propoſée ſatisfont à l'équation

$$CD^2 + AE^2 = BDE;$$

dans tous les autres cas, l'intégrale de l'équation aux différences ordinaires *(E)*, conſidérée indépendamment de l'équation *(D)*, ne peut être exprimée que par le ſyſtème des deux équations ſimultanées

$$A(p + k'q) + \varphi x = 0,$$

$$\varphi' x = Dp + Eq + F;$$

2.° l'équation *(E)* ne doit pas être conſidérée ſeule, & ſon intégrale doit être priſe en ſuppoſant que l'équation *(D)* ait lieu, c'eſt-à-dire, que α ſoit conſtant; donc cette intégrale doit être complétée, non pas par une fonction de x ſeulement, mais par une fonction de x & de α; donc

la forme ſous laquelle ſe préſente d'abord l'intégrale première de la propoſée, eſt le ſyſtème des deux équations

$$(F)\ A(p + k'q) + \varphi(x, y - kx) = 0,$$
$$(G)\ \varphi'(x, y - kx) = Dp + Eq + F,$$

dans leſquelles φ eſt une fonction arbitraire de deux quantités, & où φ' eſt le coéfficient de du dans la différence de $\varphi(u, v)$.

Cette intégrale ſe vérifie par la différenciation; d'ailleurs ſi l'on fait $D = 0$, $E = 0$, $F = 0$, la propoſée devient

$$Ar + Bs + Ct = 0,$$

& l'équation (G) donne $\varphi'(x, y - kx) = 0$, ce qui exprime que la fonction φ, n'eſt compoſée que de la ſeule quantité $y - kx$; donc alors l'intégrale première ſe réduit à l'équation unique & connue

$$A(p + k'q) + \varphi(y - kx) = 0.$$

Des deux équations (F), (G) on tire les valeurs ſuivantes de p & de q,

$$p(Dk' - E) = \frac{E}{A}\varphi(x, y - kx) - k'[F - \varphi'(x, y - kx)],$$
$$q(Dk' - E) = -\frac{D}{A}\varphi(x, y - kx) + F - \varphi'(x, y - kx);$$

& en les ſubſtituant dans $dz = pdx + qdy$, on trouve

$$(H)\ dz(Dk' - E) = \frac{\varphi}{A}(Edx - Ddy) + (F - \varphi')(dy - k'dx),$$

équation aux différences ordinaires, qui exprime ſeule la même choſe que la propoſée, & qui eſt une de ſes intégrales premières, complétée par une fonction de deux

Digitized by Google

quantités. Si dans cette équation, l'on change les deux quantités k, k' l'une en l'autre, il eſt évident que l'on aura l'autre intégrale première de la propoſée.

Les deux intégrales premières de l'équation *(A)* aux différences partielles linéaires, ſont donc l'une & l'autre une véritable équation aux différences ordinaires, dans laquelle il n'eſt plus queſtion des manières différentes dont la quantité z a pu varier; & parce que ces deux équations ne ſatisfont pas à la condition d'intégrabilité, & que leur intégrale commune ne peut être exprimée que par le ſyſtème de deux équations ſimultanées, il s'enſuit que la propoſée n'appartient pas en général à une ſurface courbe, mais à une courbe à double courbure.

Pour intégrer l'équation *(H)*, il faut obſerver d'abord que l'intégrale du premier membre doit être une fonction des deux quantités $Ex - Dy$ & $y - k'x$, & enſuite que les différences partielles de cette fonction doivent être égales aux deux termes reſpectifs du ſecond membre; ainſi l'intégrale finie de l'équation *(A)* eſt comportée par le ſyſtème des trois équations

$$z(Dk' - E) = \downarrow (E\,x - Dy,y - k'x),$$
$$A\downarrow (Ex - Dy,y - k'x) = \varphi\,(x,\ y - kx),$$
$$\downarrow'' (Ex - Dy,y - k'x) = F - \varphi'(x,y - kx),$$

dans leſquelles $\downarrow$ eſt une fonction arbitraire de deux quantités, & où $\downarrow'$ & $\downarrow''$ ſont les coéfficiens de du & dv dans la différentielle de $\downarrow(u,v)$. De ces trois équations, la ſeconde eſt deſtinée à donner la forme de la fonction φ, d'après celle de la fonction $\downarrow$, & les deux autres équations ſont celles de la courbe à double courbure, qui eſt le lieu de la propoſée.

Si dans les équations *(D)*, *(E)* on ſubſtitue pour dx, dy, leurs valeurs tirées des deux ſuivantes,

$$dy - k\,dx = d\alpha, \quad dy - k'dx = d\alpha',$$

en opérant enſuite comme nous avons fait, on trouve que l'intégrale complète de la propoſée eſt le ſyſtème des deux équations

$$z = \pi(y - kx,\ y - k'x),$$

$$\left.\begin{aligned}&(kD - E)\pi' + (k'D - E)\pi''\\ &+ \frac{B^2 - 4AC}{A}\pi''' - F\end{aligned}\right\} = 0,$$

dans leſquelles π eſt une fonction arbitraire de deux quantités, où π' & π'' ſont les coéfficiens de du, dv dans la différentielle de $\pi(u, v)$, & où π''' eſt la moitié du coéfficient de $dudv$ dans la différentielle ſeconde de la même fonction.

Comme l'équation d'une ſurface courbe quelconque peut toujours être miſe ſous la forme

$$z = \pi(y - kx,\ y - k'x),$$

il s'enſuit qu'il n'y a aucune ſurface courbe ſur laquelle on ne puiſſe tracer une des courbes à double courbure qui ſatisfont à la propoſée; & lorſque la fonction π eſt telle que la ſeconde équation eſt naturellement ſatisfaite, l'équation de la ſurface eſt elle-même un cas de l'intégrale complète, parce qu'alors la ſurface eſt toute compoſée de courbes qui ſatisfont à la propoſée.

Ce que nous venons de dire ſur cet exemple doit auſſi s'appliquer aux autres cas que nous avons traités dans le Mémoire précédent. Par un ſemblable raiſonnement, on trouve que pour l'équation $r - t - \frac{2p}{x} = 0$, de l'*article XV* du Mémoire, l'intégrale première complète eſt l'équation aux différences ordinaires

$$dz + dy\varphi(x, y - x) - \frac{dx + dy}{2x}\varphi'(x, y - x) = 0,$$

où φ eſt une fonction arbitraire de deux quantités, & où φ'

Digitized by Google

eſt le coéfficient de du dans la différentielle de $\varphi(u, v)$. Enfin l'intégrale finie eſt le ſyſtème des deux équations

$$z = \downarrow(x + y, x - y),$$
$$\downarrow' + \downarrow'' = 2x\downarrow'',$$

dans leſquelles $\downarrow$ eſt une fonction arbitraire de deux quantités, où $\downarrow'$, $\downarrow''$ ſont les coéfficiens de du, dv dans la différentielle de $\varphi(u, v)$, & où $\downarrow''$ eſt la moitié du coéfficient de $dudv$ dans la différentielle ſeconde de la même fonction.

CONCLUSION GÉNÉRALE.

IL réſulte de ce ſupplément :

1.° que les équations aux différences ordinaires, pour leſquelles les conditions d'intégrabilité ne ſont pas ſatisfaites, ne contiennent rien d'abſurde, ni d'impoſſible, & qu'elles ſont ſuſceptibles d'une véritable intégration en quantités finies.

2.° Que les intégrales de ces équations ſont complétées, par des fonctions arbitraires de quantités variables, fonctions que l'on n'avoit encore employées que pour les intégrales des équations aux différences partielles.

3.° Que les conditions d'intégrabilité ont ſeulement pour objet d'indiquer le nombre des équations dont l'intégrale finie doit être compoſée, toute élimination d'indéterminées étant ſuppoſée faite.

4.° Que les intégrales du plus grand nombre des équations aux différences partielles ne ſont pas ſuſceptibles d'être exprimées par une ſeule équation, même en ſuppoſant que l'élimination de toutes les indéterminées ſoit faite; c'eſt-à-dire, par exemple, que dans le cas de trois variables, le plus grand nombre des équations aux différences partielles appartient à des courbes à double courbure, & non pas à des ſurfaces courbes, ce que toutes

Digitized by Google

les méthodes ordinaires d'intégration supposent tacitement; & alors le nombre des quantités qui entrent dans les fonctions arbitraires est plus grand que celui des variables principales diminué d'une unité.

5.° Qu'il y a certaines équations aux différences partielles, dont les intégrales intermédiaires sont de véritables équations aux différences ordinaires.

6.° Enfin, que la Géométrie peut encore faire de très-grands progrès, parce qu'on a le moyen de mettre en analyse des manières nouvelles d'engendrer les courbes, & parce qu'on a la faculté d'entendre un grand nombre de propriétés de l'étendue, qui sont exprimées par les relations qu'ont entr'elles des équations jusqu'ici regardées comme impossibles.

ADDITION.

DANS le supplément qui précède, j'ai construit plusieurs équations aux différences ordinaires élevées; mais de toutes les équations linéaires, qui ne satisfont pas aux conditions d'intégrabilité, & que j'ai intégrées, je n'en ai construit aucune : je vais montrer, par un exemple, ce que ces sortes d'équations signifient dans l'espace.

Si l'on suppose qu'un œil, réduit à un point unique, soit placé d'une manière quelconque, par rapport à une surface courbe, j'appelle *ligne du contour apparent* de cette surface, la courbe composée des points extrêmes de cette surface, que l'œil peut apercevoir; cette ligne est le contact de la surface courbe avec une surface conique qui lui seroit circonscrite, & dont le sommet seroit au point de l'œil: d'après cela, je suppose qu'il s'agisse de trouver la ligne du contour apparent d'une surface quelconque de révolution autour de l'axe des z, vue par un œil situé dans le point dont les coordonnées sont a, b, c, indépendamment de la courbe génératrice de la surface.

Digitized by Google

L'équation de la ſurface de révolution eſt

$$z = \varphi(x^2 + y^2),$$

& ſon équation aux différences partielles eſt

$$py - qx = 0.$$

L'équation de la ſurface conique à baſe quelconque, & dont le ſommet eſt au point de l'œil, eſt

$$\frac{z-c}{x-a} = \psi\left(\frac{y-b}{x-a}\right),$$

& ſon équation aux différences partielles eſt

$$p(x-a) + q(y-b) = z - c.$$

Or, il eſt évident que pour la courbe demandée, non-ſeulement les x, y, z de la ſurface de révolution & de la ſurface conique, ſont reſpectivement les mêmes, mais encore que les quantités p, q, ſont les mêmes dans les deux ſurfaces, puiſque tout le long de la courbe, ces deux ſurfaces ont le même plan tangent. Donc dans les deux équations

$$py - qx = 0, p(x-a) + q(y-b) = z - c,$$

les cinq quantités x, y, z, p, q ont les mêmes valeurs; donc ſi l'on prend dans ces deux équations les valeurs de p & de q, & qu'on les ſubſtitue dans $dz = pdx + qdy$, qui a également lieu pour les deux ſurfaces, on aura

$$[x(x-a) + y(y-b)]dz = (z-c)(xdx + ydy),$$

équation aux différences ordinaires linéaires, qui ne ſatisfait pas à la condition d'intégrabilité, & qui, conſidérée ſeule, exprime le contour apparent d'une ſurface quelconque de révolution autour de l'axe des z, vue par un œil placé dans le point dont les coordonnées ſont a, b, c. L'intégrale de cette équation eſt le ſyſtème des deux ſuivantes

Digitized by Google

$$z = \varphi(x^2 + y^2),$$
$$2[x(x-a) + y(y-b)]\varphi' = \varphi - c,$$

dans lesquelles φ est une fonction arbitraire.

On voit donc que toute équation aux différences ordinaires à trois variables, linéaire, du premier ordre, & qui ne satisfait pas à la condition d'intégrabilité, appartient à la courbe de contact de deux surfaces courbes générales, c'est-à-dire, de deux surfaces données chacune par une équation aux différences partielles linéaires.

FAUTES à corriger dans ce Mémoire.

Pages,	*Lignes,*	*Au lieu de,*	*Lisez,*
502.	27.....	faisant la,.....	faisant sur la,
504.	12.....	le mot qu'elle exprime,	ce mot, qu'elle exprime,
507.	22.....	sommes,.....	sommets,
517.	dernière,.	le.....	la
522.	25.....	$d(\frac{\psi c}{dc})$,.....	$(\frac{d.\psi c}{dc})$,
528.	7.....	THÉORÈME III,..	THÉORÈME II,
529.	16.....	N,.....	M,
533.	18 & 26,	u^2.....	$\frac{u^2}{2}$,
	21.....	o,.....	z,
	27.....	y,.....	$z - y$,
	28.....	z,.....	$- z$,
545.	19.....	dx'^2.....	dx^2.

SUITE

SUITE DE L'ESSAI

Pour connoître la Population du Royaume, & le nombre de ſes habitans, en adaptant aux Villes, Bourgs & Villages, portés ſur chacune des Cartes de M. de Caſſini, l'année commune des Naiſſances, & en la multipliant par 26.

Par M.rs DU SÉJOUR, le Marquis DE CONDORCET, & DE LA PLACE.

Population de la Carte de la France, n.° 133. ISLE-DE-RÉ.

« CETTE Iſle contient la ville de Ré, & ſept villages.

L'année commune des naiſſances de la ville de Ré, eſt de..... 149.

Celle des 7 villages, eſt de..... 528.

NOMBRE des LIEUES de ſuperficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
5 $\frac{1}{4}$.	1.	7.	3874.	13728.	17,602.	2496.

Cette iſle n'a qu'environ 3 $\frac{5}{6}$ lieues $\frac{1}{2}$ carrées de ſuperficie habitable ; le reſte eſt occupé par des rochers & des bancs, couverts le plus ſouvent par la mer.

Digitized by Google

LILLE.

Population de la Carte de la France, n.° 41.

« CETTE Carte contient les villes de Lille, de Douai, de Saint-Amand & de Condé, & 187 bourgs ou villages. »

L'année commune des naiſſances dans la ville de Lille, eſt de 2462.
Dans celle de Douai.....de..... 665.
Dans celle de Saint-Amand.....de..... 296.
Dans celle de Condé.....de..... 155.
Et dans les 187 bourgs ou villages, de..... 7749.

NOMBRE des LIEUES de ſuperficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
107.	4.	187.	93028.	201474.	294502.	1883.

Cette Carte ne contient pour la France que 107 lieues; le ſurplus dépend de la Flandre Autrichienne.

ISLE D'OLERON.

Population de l'île d'Oleron, portée ſur les Cartes, n.os 133 & 134.

« CETTE île contient la ville d'Oleron, & 5 bourgs ou villages. »

L'année commune des naiſſances dans la ville d'Oleron, eſt de 95.
Et dans les 5 bourgs ou villages, de..... 484.

NOMBRE des LIEUES de ſuperficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
12.	1.	5.	2470.	12584.	15054.	1094.

Cette île ne contient que 12 lieues carrées habitées; il y en a environ 3 de ſables, qui ne ſont ſuſceptibles d'aucune culture.

Digitized by Google

Population de la Carte de la France, n.° 52. CLERMONT-FERRAND.

« CETTE Carte contient les villes de Clermont, de Riom, de Thiers, d'Ambert, de Billom & de Maringues, « & 228 bourgs ou villages. »

L'année commune des naiſſances dans la ville de Clermont, eſt de	789.
Dans celle de Riom..... de.....	526.
Dans celle de Thiers..... de.....	508.
Dans celle d'Ambert..... de.....	228.
Dans celle de Billom..... de.....	143.
Dans celle de Maringues..... de.....	124.
	2318.
Et dans les 228 bourgs ou villages, de.....	9534.
TOTAL.....	11852.

NOMBRE des LIEUES de ſuperficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	6.	228.	60268.	247884.	308152.	791.

Population de la Carte de la France, n.° 5. SAINT-OMER.

« CETTE Carte contient les villes d'Heſdin, de Lens, de Lilliers, de Saint-Omer, de Saint-Pol, de Saint-« Venant, d'Armentières, de Béthune & de Caſſel, & « 435 bourgs ou villages. »

L'année commmune des naiſſances dans la ville d'Heſdin, eſt de	117.
Dans celle de Lens..... de.....	76.
Dans celle de Lilliers..... de.....	115.

Digitized by Google

Dans celle de Saint-Omer.....de.....	647.
Dans celle de Saint-Pol.....de.....	107.
Dans celle de Saint-Venant.....de.....	59.
Dans celle d'Armentières.....de.....	229.
Dans celle de Béthune.....de.....	162.
Dans celle de Caſſel.....de.....	130.
	1642.
Et dans les 435 bourgs ou villages, de.....	9020.
TOTAL.....	10662.

NOMBRE des LIEUES de ſuperficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
246.	9.	435.	42692.	234520.	277212.	953.

Cette Carte ne contient, pour la France, que 246 lieues; le ſurplus dépend de la Flandre Autrichienne.

DUNKERQUE.

Population de la Carte de la France, n.° 6.

« CETTE Carte contient les villes de Dunkerque, » Bergues, Bourgbourg, Gravelines, Ardres & Calais, & 103 bourgs ou villages. »

L'année commune des naiſſances dans la ville de Dunkerque, eſt de.....	1032.
Dans celle de Bergues.....de.....	231.
Dans celle de Bourgbourg.....de.....	126.
Dans celle de Gravelines.....de.....	101.
Dans celle d'Ardres.....de.....	50.
Dans celle de Calais.....de.....	225.
	1765.
Et dans les 103 bourgs ou villages, de.....	3024.
TOTAL.....	4789.

Digitized by Google

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
83.	6.	103.	45890.	78624.	124514.	947.

Cette Carte ne contient, pour la France, que 83 lieues; le reste est couvert par la mer, & occupé par le pays étranger.

Population de la Carte de la France, n.° 86. MÂCON.

« CETTE Carte contient les villes de Mâcon, de Roanne, de Semur & de Villefranche, & 313 bourgs « ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Mâcon, est de	956.
Dans celle de Roanne de	272.
Dans celle de Semur en Brionnois, de	45.
Dans celle de Villefranche de	184.
	1457.
Et dans les 313 bourgs ou villages, de	8086.
TOTAL	9543.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	4.	313.	37882.	210236.	248118.	841.

Digitized by Google

EU. *Population de la Carte de la France*, n.° 23.

« CETTE Carte contient les villes d'Eu, du Tréport & de Saint-Vallery, & 156 bourgs ou villages. »

L'année commune des naiſſances dans la ville d'Eu, eſt de.....	109.
Dans celle du Tréport.....de.....	34.
Dans celle de Saint-Valléry.....de.....	103.
	246.
Et dans les 156 bourgs ou villages, de.....	2209.
TOTAL.....	2455.

NOMBRE des LIEUES de ſuperficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
82.	3.	156.	6396.	57434.	63830.	778.

Cette Carte ne contient que 82 lieues cultivées ; le reſte eſt couvert par la mer & par les ſables de l'embouchure de la Somme.

BOURG EN BRESSE. *Population de la Carte de la France*, n.° 117.

« CETTE Carte contient la ville de Bourg, & 273 bourgs ou villages. »

L'année commune des naiſſances dans la ville de Bourg, eſt de.....	286.
Et dans les 273 bourgs ou villages, de.....	6483.
TOTAL.....	6769.

Digitized by Google

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
245.	1.	273.	7436.	168558.	175994.	688.

Cette Carte ne contient, pour la France, que 245 lieues; le surplus dépend de la Savoie.

Population de la Carte de la France, n.° 53. ISSOIRE.

« CETTE Carte contient les villes d'Issoire & de Brioude, & 235 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville d'Issoire, est de..... 181.
Dans celle de Brioude.....de..... 171.

352.
Et dans les 235 bourgs ou villages, de..... 5842.

TOTAL..... 6194.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	2.	235.	9152.	151892.	161044.	607.

Digitized by Google

CHALLON-SUR-SAÔNE.

Population de la Carte de la France, n.° 85.

« CETTE Carte contient les villes de Challon-sur-Saône, Clugny & Montcenis, & 252 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Challon, est de..... 934.
Dans celle de Clugny.....de..... 149.
Dans celle de Montcenis.....de..... 50.
Et dans les 252 bourgs ou villages, de..... 5593.
TOTAL..... 6726.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	3.	252.	29458.	145496.	174954.	582.

MONTLUÇON.

Population de la Carte de la France, n.° 12.

« CETTE Carte contient les villes de Montluçon, Gueret & Evaux, & 219 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Montluçon, est de..... 190.
Dans celle de Gueret.....de..... 121.
Dans celle d'Évaux.....de..... 71.
382.
Et dans les 219 bourgs ou villages, de..... 5436.
TOTAL..... 5818.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
650.	3.	219.	9932.	141336.	151238.	565.

Population

Population de la Carte de la France, n.° 114. DIJON.

« CETTE Carte contient les villes de Dijon & de Gray, & 273 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Dijon, est de.....	621.
Dans celle de Gray.....de.....	170.
	791.
Et dans les 273 bourgs ou villages, de.....	5434.
TOTAL.....	6225.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	2.	273.	20566.	141284.	161850.	565.

Population de la Carte de la France, n.° 8. ORLÉANS.

« CETTE Carte contient les villes d'Orléans, de Montargis & de Pithiviers, & 212 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville d'Orléans, est de.....	1194.
Dans celle de Montargis.....de.....	197.
Dans celle de Pithiviers.....de.....	91.
	1482.
Et dans les 212 bourgs ou villages, de.....	5208.
TOTAL.....	6690.

Digitized by Google

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	3.	212.	38572.	135408.	173980.	541.

SENS. *Population de la Carte de la France*, n.° 46.

« CETTE Carte contient les villes de Sens, de Provins, » de Nogent-sur-Seine & de Montereau, & 290 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Sens, est de.....	340.
Dans celle de Provins.....de.....	157.
Dans celle de Montereau.....de.....	118.
Dans celle de Nogent.....de.....	112.
	727.
Et dans les 290 bourgs ou villages, de.....	4825.
TOTAL.....	5552.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	4.	290.	18902.	125450.	144352.	502.

Digitized by Google

Population de la Carte de la France, n.° 22. BOULOGNE.

« CETTE Carte contient les villes de Boulogne & de Montreuil, & 69 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Boulogne, est de..... 295.
Dans celle de Montreuil.....de..... 125.
420.
Et dans les 69 bourgs ou villages, de..... 882.
TOTAL..... 1302.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
46.	2.	69.	10920.	22932.	33852.	498.

Population de la Carte de la France, n.° 21. AMBLETEUSE ou PAS DE CALAIS.

« CETTE Carte ne contient aucune ville, mais seulement 18 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans ces 18 bourgs ou villages, est de..... 225.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
12.	0.	18.	0.	5850.	5850.	488.

Cette Carte ne contient que 12 lieues de superficie; le reste est couvert par la mer.

AUTUN. *Population de la Carte de la France*, n.° 84.

« CETTE Carte contient les villes d'Autun, de Beaune, » de Saulieu, d'Arnay-le-Duc & de Châteauchinon, & 207 bourgs ou villages. »

L'année commune des naiſſances dans la ville d'Autun, eſt de.....	283.
Dans celle de Beaune.....de.....	351.
Dans celle de Saulieu.....de.....	108.
Dans celle d'Arnay-le-Duc.....de.....	86.
Dans celle de Châteauchinon.....de.....	85.
	913.
Et dans les 207 bourgs ou villages, de.....	4629.
TOTAL.....	5542.

NOMBRE des LIEUES de ſuperficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	5.	207.	23738.	120354.	144092.	481.

BOURGES. *Population de la Carte de la France*, n.° 10.

« CETTE Carte contient les villes de Bourges & d'Iſſoudun, & 170 bourgs ou villages. »

L'année commune des naiſſances dans la ville de Bourges, eſt de.....	951.
Dans celle d'Iſſoudun.....de.....	464.
	1415.
Et dans les 170 bourgs ou villages, de.....	4588.
TOTAL.....	6003.

Digitized by Google

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	2.	170.	36790.	119288.	156078.	477.

Population de la Carte de la France, n.° 49. NEVERS.

« CETTE Carte contient les villes de Nevers & de la Charité, & 208 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Nevers, est de..... 475..
Dans celle de la Charité.....de..... 182.
657.
Et dans les 208 bourgs ou villages, de..... 4566.
TOTAL..... 5223.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	2.	208.	17082.	118716.	135798.	475.

Population de la Carte de la France, n.° 11. LA CHÂTRE.

« CETTE Carte contient les villes de la Châtre & de Saint-Amand, & 170 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de la Châtre, est de..... 171.
Dans celle de Saint-Amand.....de..... 224.
395.
Et dans les 170 bourgs ou villages, de..... 4176.
TOTAL..... 4571.

Digitized by Google

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	2.	170.	10270.	108576.	118846.	434.

MOULINS.

Population de la Carte de la France, n.° 50.

« CETTE Carte contient les villes de Moulins, de » Bourbon-Lancy & de Saint-Pierre-le-Moutier, & 142 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Moulins, est de	636.
Dans celle de Bourbon-Lancy.... de	102.
Dans celle de Saint-Pierre-le-Moutier, de	114.
	852.
Et dans les 142 bourgs ou villages, de	4039.
TOTAL	4891.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	3.	142.	19500.	105914.	174514.	420.

AUBUSSON.

Population de la Carte de la France, n.° 13.

« CETTE Carte contient la ville d'Aubuſſon, & 157 bourgs ou villages. »

L'année commune des naiſſances dans la ville d'Aubuſſon, eſt de	180.
Et dans les 157 bourgs ou villages, de	3845.
TOTAL	4025.

Digitized by Google

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	1.	157.	4680.	99970.	104650.	400.

Population de la Carte de la France, n.° 83. AVALON.

« CETTE Carte contient les villes d'Avalon, de Montbart, de Noyers & de Semur en Auxois, & 239 « bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville d'Avalon, est de.....	144.
Dans celle de Montbart.....de.....	79.
Dans celle de Noyers.....de.....	75.
Dans celle de Semur en Auxois,...de.....	132.
	430.
Et dans les 239 bourgs ou villages, de.....	3710.
TOTAL.....	4140.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	4.	239.	11180.	96460.	107640.	386.

Population de la Carte de la France, n.° 58. NARBONNE.

« CETTE Carte contient les villes de Narbonne, d'Agde & de Beſiers, & 75 bourgs ou villages. »

Digitized by Google

L'année commune des naissances dans la ville de Narbonne, est de..... 293.
Dans celle de Béziers.....de..... 495.
Dans celle d'Agde.....de..... 239.
1027.
Et dans les 75 bourgs ou villages, de..... 1259.
TOTAL..... 2286.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
105.	3.	75.	26702.	32734.	59436.	311.

Cette Carte ne contient que 105 lieues de superficie; le reste est couvert par la mer.

MONTPELLIER.

Population de la Carte de la France, n.° 92.

« CETTE Carte contient les villes de Montpellier & d'Arles, & 107 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Montpellier, est de..... 1104.
Dans celle d'Arles.....de..... 615.
1719.
Et dans les 107 bourgs ou villages, de..... 2066.
TOTAL..... 3785.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
183.	2.	107.	44694.	53716.	98410.	293.

Cette Carte ne contient que 183 lieues de superficie; le reste est couvert par la mer.

MÉMOIRE

Digitized by Google

Professions & décès en Religion dans le Royaume, 770 à l'année 1783 inclusivement.

MORTS			EXCÉDANT des MORTS.	EXCÉDANT des NAISSANCES
SOCIÉTÉ e.	EN RELIGION.	TOTAL DES MORTS.	sur les Naissances.	sur les Morts.
)32.	1754.	709,786.	.....	240,742.
233.	1868.	770,101.	.....	143,113.
)78.	1678.	864,656.	.....	40,924.
764.	1875.	840,639.	.....	59,799.
203.	1785.	774,988.	.....	164,620.
547.	1833.	817,480.	.....	117,000.
789.	1910.	740,699.	.....	198,375.
)81.	1730.	751,711.	.....	246,480.
332.	1828.	744,160.	.....	188,640.
559.	1808.	966,467.	...9800..	
)50.	2067.	914,017.	.....	75,289.
170.	1968.	881,138.	.....	89,268.
421.	2081.	948,502.	.....	27,201.
261.	1944.	952,205.	...4264..	
420.	26,129.	11,696,549.	14,064.	1,591,451.
			A déduire sur les résultats de la colonne de l'excédant des Naissances sur les Morts.....	14,064.
172.	1866.	834,037.	Reste.....	1,577,387.
			Donc l'année commune, sur 14, est de	112,670.

Digitized by Google

Digitized by Google

des Généralités, pendant l'année 1783.

pport des Naissances avec les Décès.

CÉDANT des aissances sur Morts.	EXCÉDANT des Décès sur les Naissances.	EXCÉDANT absolu des Morts sur les Naissances.	*OBSERVATIONS.*
n	322.		Ce Tableau présente des résultats d'autant plus affligeans, que, par comparaison avec ceux des quatre années antérieures, le nombre des Naissances y est diminué; que les décès y excèdent les Naissances, ce qui, depuis quatorze ans, n'étoit encore arrivé qu'en l'année 1779; qu'enfin les Mariages ne s'y trouvent pas dans la proportion nécessaire pour réparer, dans les années suivantes, la grande perte que la population a éprouvée.
n	6,438.		
n	5,178.		
n	8,747.		
n	346.		
n	1,695.		
1,729.	*n*		
n	1,527.		
1,166.	*n*		
4,711.	*n*		
3,385.	*n*		
4,092.	*n*		
2,809.	*n*		
3,592.	*n*		
n	1,897.		
n	159.		
n	90.		
n	8.	4,264.	Les maladies épidémiques, qui avoient ravagé la généralité d'Amiens en 1781, & qui avoient paru cesser en 1782, s'y sont renouvelées en 1783.
n	1,089.		
n	1,150.		
131.	*n*		
n	3,140.		Les généralités d'Orléans, de Tours, de Poitiers, de Bourges, de la Rochelle, de Moulins, d'Alençon & de Rennes, qui, en 1782, avoient essuyé le même fléau, en ont encore été affligées en 1783.
n	11,121.		L'épidémie s'est étendue dans les généralités de Paris, de Châlons, de Rouen, d'Aix, de Dijon, de Metz & de Lille.
306.	*n*		
9,469.	*n*		
n	2,839.		
n	5,754.		
239.	*n*		
3,327.	*n*		
n	1,380.		
1,101.	*n*		
3,371.	*n*		
n	1,017.		
205.	*n*		Enfin les autres Généralités n'offrent pas des résultats capables d'indemniser de la mortalité que la plus grande partie du Royaume a éprouvée pendant le courant de l'année 1783.
9,633.	53,897.		

Digitized by Google

Digitized by Google

MÉMOIRE
SUR LA COMBINAISON
DU PRINCIPE OXYGINE,
Avec l'Eſprit-de-vin, l'Huile, & différens Corps combuſtibles.

Par M. LAVOISIER.

J'AI fait voir dans un Mémoire imprimé dans le recueil de l'Académie pour l'année 1781, *page 492*, que ſi on brûloit de l'eſprit-de-vin dans un appareil propre à condenſer la plus grande partie de l'eau produite par la combuſtion, on obtenoit environ dix-huit onces d'eau pour une livre ou ſeize onces d'eſprit-de-vin. J'ai reconnu depuis que ce phénomène avoit conſtamment lieu dans la combuſtion d'un grand nombre de matières végétales & animales, & qu'on obtenoit également des huiles qui brûlent, un poids d'eau plus conſidérable que celui du combuſtible qui avoit été conſommé.

L'appareil dont je me ſuis ſervi pour ce genre d'expériences, conſiſte dans une lampe conſtruite ſur les principes de celles de M.r Meuſnier, Argand, Lange & Quinquet; la mèche doit en être circulaire, elle doit avoir un canal intérieur qui donne un libre accès au courant d'air; la flamme doit être revêtue d'une cheminée de verre, dont on puiſſe à volonté rétrécir ou élargir l'ouverture inférieure; enfin, la mèche doit être mouchée courte, afin d'éviter la fumée, & que toute l'huile ou l'eſprit-de-vin, élevé par la mèche, puiſſe brûler. A l'égard de la bougie, comme il auroit été très-difficile de lui fournir de l'air par un canal intérieur, & d'employer une mèche circulaire & creuſe, j'ai été obligé de me borner à la cheminée extérieure de verre: mais pour que la combuſtion ſe

fît toujours à une même hauteur, & que la flamme de la bougie demeurât conſtamment à l'embouchure de la cheminée de verre, je l'ai renfermée dans un tuyau de fer-blanc, dont elle occupoit toujours le haut, par le moyen d'un reſſort à boudin qui la preſſoit par-deſſous, à la manière des cierges à reſſort qu'on emploie maintenant dans la plupart des égliſes.

Le tuyau de verre dans lequel brûle cette lampe ou bougie, s'adapte à une cheminée de fer-blanc, qui conduit la vapeur dans un ſerpentin où elle ſe condenſe comme on le voit, *figure 5*.

On n'obtient point, dans ces expériences, une quantité d'eau toujours conſtante; le même combuſtible en donne plus ou moins, ſuivant que l'expérience a été ſuivie avec plus ou moins de ſoin; mais, comme je l'ai déjà dit, à moins qu'on n'ait opéré très-négligemment, elle excède communément d'un huitième le poids de l'eſprit-de-vin. L'augmentation eſt plus conſidérable avec l'huile; mais on n'obtient, avec la bougie, qu'un poids d'eau au plus égal à celui de la cire qui a été conſommée. On verra dans la ſuite de ce Mémoire, que cette différence à l'égard de la bougie, tient à ce qu'on ne peut adapter à cette combuſtion le tuyau intérieur d'airage, & à ce qu'il ſe forme de la fumée qui ſe diſſipe en pure perte: en effet, en opérant par une autre méthode dont je donnerai bientôt la deſcription, on retire plus de dix-huit onces d'eau de la combuſtion d'une livre de cire.

Ces augmentations de poids s'expliquent d'une manière toute naturelle, en admettant, comme je l'ai annoncé ailleurs, que l'eau n'eſt point une ſubſtance ſimple, qu'elle eſt compoſée d'air vital & de gaz inflammable. On ne peut douter en effet que l'eſprit-de-vin, les huiles, & preſque tous les combuſtibles ne contiennent de l'air inflammable: on en a la preuve en faiſant paſſer ces ſubſtances à travers un tube de verre rougi au feu; la matière charbonneuſe ſe dépoſe dans l'intérieur du tube, & il en reſſort de l'air

Digitized by Google

inflammable mêlé communément d'un peu d'acide charbonneux, & qui tient du charbon en diſſolution.

Mais ſi l'eſprit-de-vin & les huiles ſont compoſés principalement d'air inflammable & de ſubſtance charbonneuſe; ſi, d'un autre côté, il eſt démontré que, dans une combuſtion quelconque, l'air vital, ou plutôt ſa baſe, que j'ai nommé *principe oxygine* ſe combine avec la ſubſtance qui brûle; enfin ſi principe oxygine, combiné avec l'air inflammable, forme de l'eau, ſi, combiné avec la ſubſtance charbonneuſe, il forme de l'air fixe ou acide charbonneux, il eſt évident que, dans la combuſtion de l'eſprit-de-vin & des huiles, il doit ſe former de l'eau & de l'acide charbonneux, & que le poids total des matières doit ſe trouver augmenté de toute la quantité d'air vital qui s'eſt combiné avec la ſubſtance qui a été brûlée. Cette théorie de la combuſtion eſt démontrée en partant des baſes que j'ai cherché à établir dans mes précédens Mémoires; mais il me reſtoit à déterminer avec préciſion les quantités d'eau & d'acide charbonneux formées pendant la combuſtion des différentes ſubſtances, afin d'en conclure la quantité d'air inflammable & de principe charbonneux qu'elles contiennent: c'eſt l'objet que je me ſuis propoſé à l'égard de quelques-unes, dans les expériences dont je vais rendre compte.

Une première condition de ce genre d'expériences étoit d'opérer la combuſtion dans des vaiſſeaux fermés, afin de ne rien perdre, & de pouvoir déterminer la quantité des ſubſtances employées & obtenues avant & après l'opération: mais la combuſtion de l'eſprit-de-vin dans des vaiſſeaux fermés, ſur-tout dans l'air vital, préſentoit de grandes difficultés; en effet, à 66 degrés du thermomètre de M. de Réaumur, il prend l'état aériforme, & alors, quand il eſt mêlé avec l'air vital, au lieu de brûler paiſiblement, il détonne avec fracas. Cette circonſtance ne me permettoit pas d'opérer avec l'eſprit-de-vin dans l'air vital, comme je l'avois fait pour le charbon, le phoſphore &

quelques autres ſubſtances. Mais, avant de rendre compte des précautions particulières que j'ai priſes pour cette combuſtion, il eſt néceſſaire que je donne une idée de l'appareil dont j'ai coutume de me ſervir dans mes expériences pneumato-chimiques au mercure : il ſeroit peut-être difficile de m'entendre ſans cette connoiſſance préliminaire.

Après avoir eſſayé de différentes matières, je me ſuis déterminé à faire conſtruire en marbre la cuve dont je me ſers pour contenir le mercure.

J'ai donc fait tailler un bloc de marbre *BCDE*, *figures 1, 2 & 3*, de deux pieds de long ſur un pied de large & neuf pouces d'épaiſſeur; je l'ai fait creuſer d'environ quatre pouces pour contenir du mercure; & pour qu'on pût emplir commodément les jarres deſtinées aux expériences, j'y ai fait creuſer une rigole *TV* de quatre autres pouces, *figure 2*. Enfin, comme cette rigole pouvoit être embarraſſante dans quelques expériences, j'ai diſpoſé les choſes de manière qu'on pût la boucher & la condamner au moyen de petites planches qui entrent dans une rainure *xx*.

Avec cet appareil j'opère auſſi en grand ſur le mercure, qu'on a coutume de le faire ſur l'eau, & les tranſvaſions ſe font avec facilité.

Combuſtion de l'Eſprit-de-vin.

C'eſt dans cet appareil, que nous avons fait dans l'air vital, M. de la Place & moi, toutes les combuſtions de charbon & de phoſphore dont nous avons rendu compte dans le Mémoire que nous avons publié ſur la chaleur en 1780. Mais à l'égard de l'eſprit-de-vin, je me ſuis trouvé forcé, comme je l'ai dit, de prendre quelques précautions particulières.

Je me ſuis d'abord déterminé à n'opérer que dans de l'air atmoſphérique, pour éviter le danger d'une détonation; mais comme je ne pouvois pas eſpérer alors de faire durer long-temps la combuſtion, à cauſe de la grande quantité d'air vital que l'eſprit-de-vin conſomme en brûlant, j'ai diſpoſé mon appareil de manière à pouvoir

Digitized by Google

rendre de l'air vital à meſure qu'il s'en conſommoit. Cet appareil eſt repréſenté, *figure 4.*

On voit en *A* une cloche de criſtal de 15 à 18 pintes de capacité; on conçoit qu'elle doit être très-forte, afin de ſoutenir le poids de mercure qui doit s'y élever.

Sous cette cloche, qui eſt remplie d'air commun, on place une lampe *R* à eſprit-de-vin, dont le poids eſt très-exactement déterminé. On a dû placer ſur la mèche un petit atome de phoſphore, dont on expliquera l'uſage dans un moment. Cette cloche ſe poſe ſur le bain de mercure contenu dans la cuve *BCDE*. Enfin, on élève le mercure en ſuçant avec un ſiphon juſqu'à la hauteur *HI*.

L'intérieur de cette cloche communique par un ſiphon de verre *IKLM*, avec la cloche *S* qui eſt remplie d'air vital, & qui repoſe ſur une cuve d'eau. On peut ouvrir & fermer la communication entre les deux cloches, par le moyen d'un robinet *M*.

Avant de commencer l'expérience, on marque exactement ſur les deux cloches la hauteur de l'eau & celle du mercure; on meſure la hauteur de ces deux fluides au-deſſus de leur niveau, afin de connoître l'état de compreſſion ou de dilatation de l'air ſur lequel on opère; après quoi on allume la lampe *R* avec un fer rouge recourbé qu'on paſſe ſous le mercure: le phoſphore s'allume d'abord, & il communique l'inflammation à la mèche.

Peu de temps après que la lampe a été allumée, on s'aperçoit que ſa flamme diminue de vivacité; alors, pour prolonger la combuſtion, on ouvre le robinet *M*; auſſitôt une portion d'air vital paſſe de la cloche *S* dans la cloche *A*; en même-temps, l'eau monte dans la cloche *S*, & le mercure deſcend dans la cloche *A*, juſqu'à ce que la hauteur des deux fluides ſoit, dans chaque cloche, en raiſon inverſe de leur peſanteur ſpécifique. Il y a alors équilibre, tout demeure en repos, & on referme le robinet *M*. L'air de la cloche *A* étant devenu beaucoup plus propre à la combuſtion, au moyen de l'air vital qui y a été introduit, la lampe *R* y brûle mieux qu'elle n'avoit même brûlé dans le

Digitized by Google

premier instant; le volume d'air diminue de nouveau, le mercure monte; & lorsqu'on voit que la flamme est languissante, on redonne de nouvel air vital. On peut ainsi rendre deux ou trois fois de l'activité à la flamme, par une introduction d'air vital; mais, peu à peu, la quantité d'air fixe qui résulte de la combustion, s'accumule, & on arrive bientôt au terme où la combustion ne peut plus avoir lieu.

Cette expérience ne réussit pas toujours, & elle est souvent contrariée par de petits accidens; un des plus fréquens est la fracture de la cloche: la chaleur de la flamme en échauffe quelquefois tellement la voûte, qu'elle casse; aussi, d'un assez grand nombre que j'ai faites, n'y en a-t-il eu qu'une seule dont je sois pleinement satisfait.

La combustion faite, on laisse refroidir; on mesure exactement le volume des airs restant, en tenant compte de leur état de dilatation & de compression. On détermine ensuite la quantité d'air fixe ou acide charbonneux aériforme qui a été produite, en introduisant sous la cloche de l'alkali caustique en liqueur. Enfin, l'opération finie, on repèse la lampe, pour connoître la quantité d'esprit-de-vin qui a été consommée.

	gros	grains
Le poids de l'esprit-de-vin que je suis parvenu à brûler dans cette expérience, a été de.....	1	21,50.
La quantité d'air vital consommé par la combustion, a été de 220,28 pouces, pesant, à raison d'un demi-grain le pouce cube....	1.	38,32.
TOTAL du poids des matières avant la combustion.....	2.	59,82.

La combustion finie, il s'est trouvé dans la cloche, air fixe ou acide charbonneux, 95,28 pouces, pesant, à raison de 0,695 grains le pouce cube..... 1 gros 23 grains 28.

De plus, il s'est trouvé une quantité d'eau assez considérable, partie répandue

Digitized by Google

en gouttelettes sur les parois intérieures de la cloche, partie rassemblée & nageant sur la surface du mercure. On conçoit qu'il auroit été impossible de recueillir cette eau, de manière à en déterminer le poids avec exactitude; mais il m'a été aisé de le conclure par le calcul. On ne peut douter en effet que le poids des matières qui ont servi à la combustion, ne soit le même avant & après l'opération. En supposant qu'il y eût quelque différence, elle ne pourroit être dûe qu'à la dissipation de la matière de la chaleur & de la lumière, qui seule s'échappe à travers les pores des vaisseaux: or, j'ai démontré ailleurs, que ces deux matières n'avoient qu'une pesanteur absolument insensible; je puis donc conclure pour le poids de l'eau...

	gros	grains.
	1.	36,54.
TOTAL du poids des matières après la combustion.....	2.	59,82.
Mais 1 gros 23 grains,28 d'acide charbonneux contiennent, air vital.....	»	68,60.
La quantité totale consommée dans l'expérience, étoit de.....	1.	38,32.
Il y a donc eu un excédant employé à faire de l'eau, & qui est de.....	»	41,72.
A quoi ajoutant la quantité de gaz inflammable nécessaire pour former de l'eau, à raison de 15 parties pour 85 d'air vital, & qui est de.....	»	7,36.
On aura, pour la quantité d'eau formée,	1.	49,08.

	gros.	grains.
La quantité existante après l'expérience, étoit de.....	1.	36,54.
Il en existoit donc toute formée dans l'esprit-de-vin.....	"	59,46.

D'après cela, on pourra récapituler ainsi le produit des substances après la combustion.

	gros.	grains.
Air vital employé à faire de l'acide charbonneux...	"	68,60
Air vital employé à faire de l'eau.....	"	41,72
Charbon contenu dans l'acide charbonneux.....	"	26,68
Gaz inflammable contenu dans l'eau qui s'est formée...	"	7,36
Eau qui existoit dans l'esprit-de-vin avant la combustion..	"	59,46
TOTAL du poids des matières après la combustion..	2.	59,82

Si on retranche de ces quantités l'air vital qui n'a été introduit, dans l'expérience, que comme un moyen d'analyse, il restera pour la composition de 1 gros 21 grains $\frac{1}{2}$ d'esprit-de-vin, les quantités qui suivent:

	gros.	grains.
Charbon.....	"	26,68
Gaz inflammable.....	"	7,36
Eau toute formée.....	"	59,46
TOTAL.....	1.	21,50

D'où l'on conclura,

Composition d'une livre d'Esprit-de-vin.

	onces.	gros.	grains.
Charbon,.....	4.	4.	$37\frac{1}{2}$
Gaz inflammable.....	1.	2.	$5\frac{1}{2}$
Eau toute formée.....	10,	1.	29
TOTAL.....	1 livre	"	"

Composition

Digitized by Google

Compoſition d'un quintal d'Eſprit-de-vin.

	livres.	onces.	gros.	grains.
Charbon.....	28.	8.	4.	6.
Gaz inflammable....	7.	13.	7.	46.
Eau toute formée....	63.	9.	4.	20.
TOTAL....	100.	"	"	"

Enfin, en réuniſſant enſemble la quantité d'eau exiſtant dans l'eſprit-de-vin, avec celle qui s'eſt formée pendant ſa combuſtion, par la combinaiſon du gaz inflammable & de l'air vital, on aura pour la quantité réſultante de la combuſtion d'une livre d'eſprit-de-vin. 1 livre 2 onces 4 gros 42 grains.

Et pour celle réſultante de la combuſtion d'un quintal.. 116. 1. 2. 24.

Ces réſultats s'accordent aſſez bien avec les premiers aperçus que j'ai donnés ſur le même objet, dans mon Mémoire ſur la décompoſition de l'eau, imprimé en 1781.

Ce phénomène ſingulier, qu'une ſubſtance très-volatile dont tous les principes ſont ſuſceptibles de ſe diſſiper pendant la combuſtion, fourniſſe néanmoins un réſidu, ou plutôt un réſultat plus peſant qu'elle-même, avoit échappé juſqu'ici à tous les phyſiciens: il étoit abſolument inexplicable avant qu'on ſût que l'air vital ſe fixoit dans les corps pendant l'acte de la combuſtion, circonſtance dont je crois pouvoir m'attribuer la découverte.

Quoique j'aie lieu de croire ces réſultats aſſez exacts, je dois avertir de deux cauſes d'incertitude que comporte néceſſairement ce genre d'expériences. Premièrement, je n'ai pu déterminer la quantité d'eſprit-de-vin brûlé, qu'en peſant la lampe avant & après la combuſtion; mais il eſt poſſible qu'indépendamment de la portion qui s'eſt brûlée, une autre ſe ſoit vaporiſée par la chaleur, & que j'aie moins brûlé d'eſprit-de-vin, que ne l'indiquoit

la différence du poids. Je sais que cette quantité ainsi évaporée, ne peut pas être très-considérable, puisqu'autrement il se seroit fait une détonation dans l'intérieur des vaisseaux ; mais elle peut être suffisante cependant pour troubler sensiblement l'exactitude des résultats ci-dessus.

Secondement, il est impossible de rassembler l'eau qui se forme pendant cette expérience ; une partie tapisse les parois de la cloche, une autre nage sur le mercure, & on est obligé de conclure ce poids, de celui des matériaux employés : quoique cette méthode paroisse sûre, elle n'est pas cependant aussi satisfaisante que si on pouvoit peser l'eau directement & exactement.

Je ne prétends pas non plus que ce soit une manière rigoureuse d'analyser l'esprit-de-vin ; indépendamment de l'eau, du charbon & du gaz inflammable qui entrent essentiellement dans sa combinaison, il est probable qu'il contient encore, en très-petite quantité, quelques autres principes qui échappent à ce genre d'analyse. Par exemple, l'eau qu'on obtient par cette combustion sous une cloche, est légèrement acide, elle rougit le papier bleu, & cette circonstance indique, ou qu'il existe une petite quantité d'acide dans l'esprit-de-vin, ou qu'il s'en forme pendant sa combustion.

Combustion de l'Huile d'Olive.

La combustion de l'huile d'olive ne renferme pas autant de causes d'incertitude que celle de l'esprit-de-vin, parce que l'huile d'olive n'étant pas susceptible de se volatiliser aisément, on peut connoître avec une exactitude rigoureuse la quantité brûlée, par la différence du poids déterminé avant & après la combustion. J'ai donc quelque lieu de penser que les résultats que je vais exposer ne laissent rien à desirer du côté de l'exactitude. J'aurois été cependant plus satisfait encore si j'eusse pu répéter l'expérience plus en grand ; mais il auroit fallu employer des appareils

Digitized by Google

extrêmement compliqués, & je doute que je fusse parvenu à des résultats beaucoup plus rigoureux.

L'appareil dont je me suis servi pour la combustion de l'huile, est encore celui représenté, *figure 4*, mais quelques précautions que j'aie prises, la quantité d'huile que je suis parvenu à brûler n'a pas été bien considérable, je n'ai pu la porter qu'à..... 0 gros 19,25 grains

La quantité d'air vital consommé, s'est trouvée de 124 pouces, pesant, à raison d'un demi-grain le pouce cube..... 0 62,

Ce qui donne pour le poids total des matières employées avant la combustion 1 gros 9,25 grains

La quantité d'acide charbonneux aériforme que j'ai obtenu, étoit de 79 pouces $\frac{1}{2}$, ce qui revient, en poids, à..... 0 grains 54,25.

A l'égard de l'eau qui s'est formée, elle n'a pu être ni rassemblée ni pesée, & j'en ai exposé ailleurs la raison; elle est ici la même que pour l'esprit-de-vin: je l'ai donc conclue par le calcul, & toujours en partant de la supposition, que le poids des matières est le même avant & après l'opération, ce que je regarde comme évident; j'ai eu..... 0 27,00

TOTAL après la combustion... 1 gros 9,25 grains

D'après ces données, & en supposant qu'un quintal d'acide charbonneux soit composé de 72 parties d'air vital & de 28 de charbon, on pourra faire le calcul suivant:

	gros.	grains.
Quantité d'air vital employé à faire de l'acide charbonneux	#	39,06
Quantité employée à faire de l'eau	#	22,94
Quantité de gaz inflammable nécessaire pour former 27 grains d'eau	#	4,05
Quantité de charbon contenu dans 54 grains ½ d'air fixe ou acide charbonneux	#	15,20
TOTAL	1.	9,25

119 grains ½ d'huile d'olive sont donc composés de

	grains.
Charbon	15,20
Gaz inflammable	4,05
TOTAL	19,25

D'où l'on conclura,

Composition d'une livre d'Huile d'olive.

	livres.	onces.	gros.	grains.
Charbon	#	12.	5.	5.
Gaz inflammable	#	3.	2.	67.
TOTAL	1.	#	#	#

Composition d'un quintal d'Huile d'olive.

	livres.	onces.	gros.	grains.
Charbon	78.	15.	2.	68.
Gaz inflammable	21.	#	5.	4.
TOTAL	100.	#	#	#

Enfin, on voit qu'en brûlant une livre d'huile d'olive avec toutes les précautions convenables, on peut en obtenir $1^{\text{livre}}\ 6^{\text{onces}}\ 3^{\text{gros}}\ 38^{\text{grains}}$ d'eau ; & d'un quintal, $140^{\text{livres}}\ 4^{\text{onces}}\ 1^{\text{gros}}\ 17^{\text{grains}}$.

Digitized by Google

Il faut, pour arriver à ce réſultat, c'eſt-à-dire, pour obtenir cette quantité d'eau, qu'on ait fourni à la flamme toute la quantité d'air vital néceſſaire pour que la combuſtion ſoit complète; circonſtance qui ſe rencontre dans les lampes de M.rs Meuſnier, Argand, Lange & Quinquet: autrement, c'eſt-à-dire, ſi la quantité d'air eſt inſuffiſante, il y a bien décompoſition de l'huile, c'eſt-à-dire, ſéparation de la matière charbonneuſe & du gaz inflammable; mais à défaut d'une ſuffiſante quantité d'air vital, il n'y a pas recompoſition complète d'eau & d'acide charbonneux, & il s'échappe une portion de charbon & de gaz inflammable libre. C'eſt cet effet qu'on exprime quand on dit qu'une lampe fume.

Combuſtion de la Cire.

Cette même méthode appliquée à la bougie, m'a donné également la quantité d'eau qui ſe forme pendant ſa combuſtion. Je me ſuis ſervi, dans cette expérience, d'une ſimple cloche de criſtal remplie d'air vital, & placée ſur la cuve de mercure: mais, comme les bougies ordinaires coulent beaucoup dans l'air vital, parce qu'il y a dans cet air beaucoup moins de diſtance entre la flamme & la cire, qu'il n'y en a dans l'air ordinaire, j'ai été obligé d'employer un lampion de cire.

Dans une première expérience, la cloche contenoit, air vital..... pouces 183,51

Il en eſt reſté, après la combuſtion & l'abſorbtion par l'alkali cauſtique..... 50,41

Donc quantité d'air vital réellement employée..... 133,10

Cette quantité d'air vital réduite en poids, à raiſon d'un demi-grain par pouce cube, devoit peſer.... grains 66,55

La quantité de cire conſommée s'eſt trouvée de 21,90

TOTAL des matières conſommées..... 88,45

La quantité d'air fixe ou acide charbonneux qui s'eſt formé, étoit de 90,046 pouces; & à raiſon de 06,95 grains le pouce cube, elle devoit peſer..... 62,58 grains.

Donc, déficit dû à l'eau qui s'étoit formée, & qui en effet nageoit ſur le mercure..... 25,87

Mais 25,87 grains d'eau ſont compoſés de

	grains.
Principe oxygine.....	21,99
Gaz inflammable aqueux.....	3,88
TOTAL.....	25,87

Ainſi, des 66,55 grains d'air vital qui ont ſervi à cette expérience, il en a été employé

	grains
à former de l'eau.....	21,99
Et à former de l'air vital.....	44,56
TOTAL égal.....	66,55

Ce qui donne pour la compoſition de la cire

	grains.
Subſtance charbonneuſe.....	18,02
Gaz inflammable.....	3,88
TOTAL.....	21,90

Compoſition d'une livre de Cire.

	livres.	onces.	gros.	grains.
Subſtance charbonneuſe.....	#	13.	1.	23.
Gaz inflammable.....	#	2.	6.	49.
TOTAL.....	1.	#	#	#

Compoſition d'un quintal de Cire

	livres.	onces.	gros.	grains.
Subſtance charbonneuſe.....	82.	4.	3.	68.
Gas inflammable.....	17.	11.	4.	4.
TOTAL.....	100.	#	#	#

Digitized by Google

J'ai répété une seconde fois cette expérience avec le même soin, & j'ai obtenu les résultats qui suivent :

Quantité d'air vital contenu dans la cloche avant la combustion	194,80 pouces
Quantité restante après la combustion, mais avant l'addition de l'alkali caustique	150,30
Diminution opérée par la combustion	44,50
Quantité d'air restante après l'absorbtion par l'alkali caustique	53,51
Donc, quantité d'air vital consommé dans l'expérience	141,29

Cette dernière quantité d'air vital, à raison d'un demi-grain le pouce cube, devroit peser. 70,64 grains
Cire consommée 21,75

TOTAL des substances consommées.. 92,39

Il ne s'est produit que 96,438 pouces d'air fixe ou acide charbonneux, qui, à raison de 0,695 grains le pouce cube, devoient peser.... 67,08

Donc, déficit ou eau formée..... 25,31

Mais 25,31 grains d'eau sont composés de..

Principe oxygine	21,51 grains
Principe inflammable de l'eau	3,80
TOTAL	25,31

D'où il résulte que sur la quantité d'air vital employé dans l'expérience, & qui étoit de. 70,64 grains
Il en a été employé à former de l'eau... 21,51

Et par conséquent à former de l'acide charbonneux..... 49,13

Digitized by Google

La cire, d'après ces données eſt compoſée de

	grains
Matière charbonneuſe.....	17,95
Principe inflammable de l'eau...	3,80
TOTAL.....	21,75

D'où l'on conclura

Compoſition d'une livre de Cire.

	livres.	onces.	gros.	grains.
Subſtance charbonneuſe.....	#	13.	1.	46.
Principe inflammable de l'eau...	#	2.	6.	26.
TOTAL.....	1.	#	#	#

Compoſition d'un quintal de Cire.

Subſtance charbonneuſe.....	82.	8.	3.	64.
Principe inflammable de l'eau...	17.	7.	4.	8.
TOTAL.....	100.	#	#	#

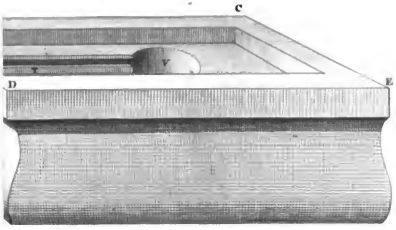
En prenant un milieu entre le réſultat de ces deux expériences, on trouve qu'une livre de cire formeroit, en brûlant, une quantité d'eau de 1 livre 2 onces 6 gros 5 grains.

Et qu'un quintal de cire en formeroit..... 117. 3. 7. #

Je dois avertir que dans toutes ces expérienes, le volume des airs doit être corrigé de la variation du baromètre & du thermomètre, & ramené à une preſſion de 28 pouces, & à une température de 10 degrés du thermomètre de Réaumur. Je ſuis entré ailleurs dans le détail des calculs qu'exige cette correction.

ESSAI

Fig. 1.



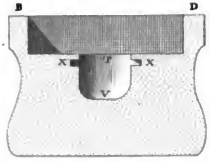
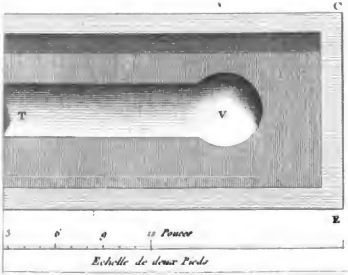


Fig. 2

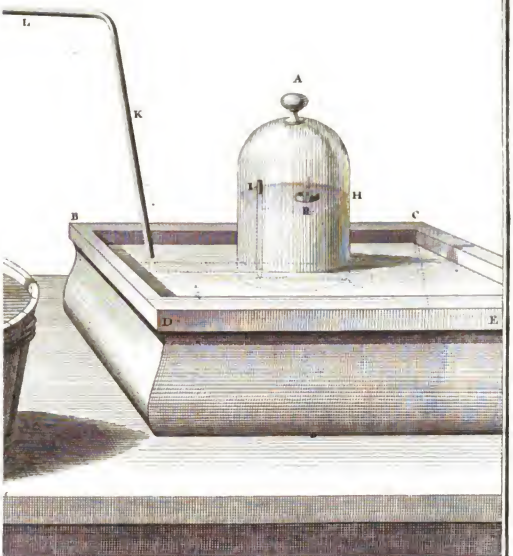


Fleuriau sculp.

Digitized by Google

Digitized by Google

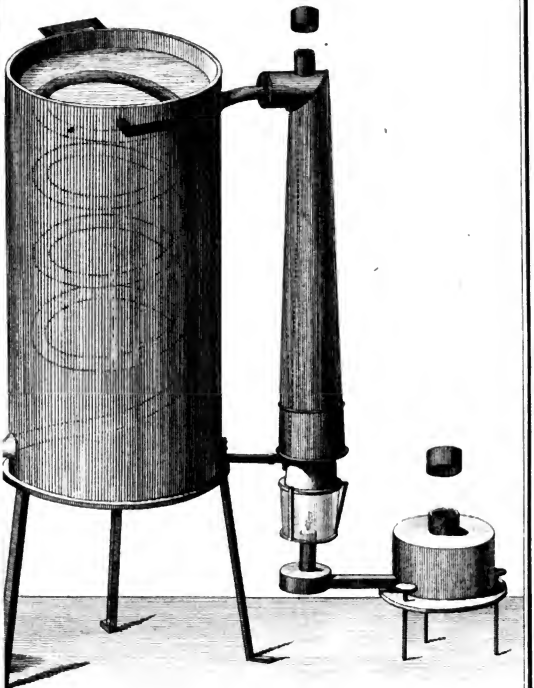
Fig. 4.

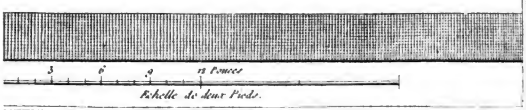


Y. le Gouaz. sculp.

Digitized by Google

Digitized by Google





J. B. Grivaz. sculp.

Digitized by Google

Digitized by Google

ESSAI DE COMPARAISON
ENTRE
LES MOUVEMENS DES ANIMAUX
ET CEUX DES PLANTES.
Et deſcription d'une eſpèce de Sainfoin, *dont les feuilles ſont dans un mouvement continuel.*

Par M. BROUSSONET.

Lû le 31 août 1785.

L'ÉTUDE de la zootomie peut ſeule, en nous mettant à portée d'établir une comparaiſon entre les mêmes organes dans les différentes eſpèces d'animaux, nous éclairer ſur les fonctions auxquelles ſes parties analogues ſont deſtinées dans l'homme. Les anatomiſtes ſe ſont adonnés à la diſſection des animaux, dans un temps où n'ayant point encore perfectionné celle de l'homme, la phyſiologie ne pouvoit retirer aucun avantage de ces connoiſſances; dès que l'inſpection des cadavres a été permiſe, & que celle des animaux a pu dès-lors devenir utile, on a paru en négliger l'étude. Les recherches anatomiques ont été faites d'abord ſur des êtres dont l'organiſation ſe rapprochoit le plus de celle de l'homme, tels que les quadrupèdes; on n'a examiné que long-temps après quelques eſpèces qui s'en éloignent un peu plus. On avoit cru que l'inſpection des parties, dans les animaux dont la forme a le plus de rapport avec celle de l'homme, faciliteroit la découverte de l'uſage de ces mêmes parties; mais cette comparaiſon n'eſt pas auſſi avantageuſe à l'objet que ſe propoſe le phyſiologiſte, que celle qui naît du rapprochement des êtres les plus éloignés, & dans leſquels on a de la peine à reconnoître, au premier abord, les traces de l'analogie. Plus les objets diffèrent entr'eux, plus les réſultats qui naiſſent de la

comparaiſon qu'on en fait, ſont lumineux. On ne ſera pas ſans doute ſurpris qu'on ait négligé de faire le rapprochement des eſpèces appartenantes à des règnes différens, puiſqu'il n'avoit pas même été fait entre les animaux des divers ordres, dont les différences ſont bien moins eſſentielles. Les phyſiologiſtes n'ont pas retiré des travaux de Grew, de Malpighi, de M. Duhamel, &c. tous les avantages qu'ils auroient peut-être pu en obtenir pour expliquer pluſieurs phénomènes de l'économie animale. On s'eſt contenté de ſaiſir çà & là un petit nombre de faits iſolés; mais les fonctions les plus importantes, celles qui ont une analogie très-marquée avec ces mêmes fonctions dans les animaux, n'ont été bien connues, dans les plantes, que de nos jours. Les naturaliſtes du dernier ſiècle ſavoient à peine qu'on pût retrouver dans les végétaux des traces de la reſpiration, de la génération & de la circulation. On a cru pouvoir rendre raiſon de quelques-uns de ces phénomènes communs aux deux règnes, en les examinant dans des êtres qui, par leur forme, paroiſſent également appartenir au végétal & à l'animal; mais, outre que ces êtres ſont très-peu connus par les anatomiſtes, ils appartiennent d'ailleurs excluſivement à un ſeul règne, & n'ont de commun avec le règne voiſin, que la forme, preſque toujours accidentelle. La Nature a varié les formes à l'infini, elles caractériſent les eſpèces, c'eſt ce qui paroît lui avoir coûté le moins; leur différence ne conſiſtant que dans des parties plus ou moins alongées, plus ou moins groſſes, placées plus ou moins près de telle ou telle autre partie, le nombre a pu en être beaucoup & facilement augmenté. Son économie ne s'eſt manifeſtée que dans les fonctions qu'elle a toujours établies ſur les mêmes principes, ne leur aſſignant aucune différence dans les eſpèces, mais ſeulement dans les grandes claſſes dont elles ſont en quelque ſorte l'apanage.

Les diverſes parties des plantes jouiſſent de la faculté de ſe mouvoir, mais les mouvemens qu'elles exécutent

ſont d'une nature bien différente de ceux des animaux; les plus ſenſibles, ceux qui ſont produits le plus rapidement dans les plantes, ſont preſque toujours déterminés par quelque cauſe irritante. L'irritabilité, qui n'eſt que la ſenſibilité manifeſtée par le mouvement, eſt une loi générale à laquelle la nature a ſoumis tous les êtres vivans, c'eſt elle qui veille continuellement à leur conſervation; plus puiſſante dans les animaux que dans les plantes, elle peut être ſouvent confondue dans celles-ci avec des phénomènes qui dépendent d'une cauſe bien différente. L'organe qui eſt ſoumis, dans le végétal, à l'action de l'aiguillon, eſt le ſeul qui ſe meuve: jamais l'irritation de pluſieurs parties ne produit, comme dans les animaux, cette prompte combinaiſon de ſenſations, d'après laquelle on voit ſe remuer certains organes, quoiqu'ils ne ſoient pas directement affectés, & qu'ils puſſent d'ailleurs être paſſifs.

Plus l'organiſation eſt parfaite dans les différentes parties des animaux, plus les ſignes d'irritabilité y ſont ſenſibles. Les parties qui ſe rapprochent le plus de celles des végétaux, & dont par conſéquent l'organiſation eſt la plus imparfaite, ſont les moins irritables. La même loi ſe retrouve ſur les plantes, mais avec des réſultats oppoſés; les ſignes d'irritabilité y ſont plus ſenſibles à meſure que les parties ſe rapprochent davantage de celles des animaux, ils ſont nuls dans celles qui en ſont les plus éloignées. Cette aſſertion eſt ſur-tout prouvée par ce qu'on obſerve dans les organes deſtinés, dans les végétaux, à perpétuer l'eſpèce; ces parties ſont, ſuivant toutes les apparences, les ſeules irritables; les feuilles, l'écorce, les tiges & les racines ne donnant aucun ſigne d'irritabilité.

La faculté de ſe reproduire, dans les plantes comme dans les animaux, eſt une fonction propre à l'eſpèce, & ſans laquelle l'individu peut ſubſiſter; mais la nature paroît y avoir attaché dans les plantes beaucoup plus d'importance que dans la plupart des animaux. Tout, dans l'individu végétal, paroît concourir preſque uniquement à ce but; c'eſt pour

le remplir que la végétation a lieu, que les différentes parties se développent; c'eſt ici que ſont prodiguées la variété, la richeſſe des couleurs, que l'organiſation eſt perfectionnée. Dès que le vœu de la nature eſt rempli, que les ſemences ont acquis dans leur capſule le degré de maturité qui leur eſt néceſſaire, les ſucs nourriciers ceſſent de couler dans les vaiſſeaux, l'individu ſe deſſèche & périt. Les plantes ſe rapprochent des animaux par les organes de la génération, non-ſeulement parce qu'ils ſont en elles les ſeules parties irritables, mais encore parce qu'ils ſont les ſeuls qui les faſſent jouir en quelque ſorte de la vertu de la locomotion. Je crois inutile de détailler ici les mouvemens ſubits des étamines, des piſtils, &c. de pluſieurs plantes, dès qu'on les irrite; ces phénomènes ſont trop bien connus des phyſiciens.

Les mouvemens vitaux, dans les plantes, ſont ceux qu'on peut obſerver le plus communément; ils ſont lents, entièrement déterminés par des circonſtances qui ne manquent jamais de ſe répéter, & ſont répandus également ſur toutes les parties. Dans les animaux au contraire, preſque tous les mouvemens vitaux ſont très-ſenſibles, tels ſont le battement du cœur, celui des artères, la dilatation du thorax, &c. comme ils ſont abſolument néceſſaires à la conſervation des individus, ils ſe reproduiſent toujours, dans ceux de la même eſpèce, d'une manière ſemblable & dans la même direction, ce qui a également lieu dans les plantes. Les plantes grimpantes, le houblon, par exemple, ſuit conſtamment, en s'entortillant autour d'une perche, la direction du midi au couchant.

En interrompant ces ſortes de mouvemens dans les végétaux, ceux-ci périſſent bientôt; ſi on détache, par exemple, une plante grimpante dont la direction étoit ſur une branche de droite à gauche, & qu'on la place dans une direction contraire, elle ſe deſſèche dans peu, ſur-tout ſi elle n'a pas aſſez de vigueur pour reprendre ſa ſituation naturelle. On donne de la même manière la mort à un

Digitized by Google

animal, lorſqu'on arrête quelqu'un de ſes mouvemens vitaux.

La loi par laquelle les plantes ſont forcées à ſe mouvoir de telle ou telle manière, eſt très-puiſſante; lorſque deux plantes grimpantes, dont l'une eſt plus foible que l'autre, viennent à ſe rencontrer, deux chèvre-feuilles par exemple, ils s'entrelacent mutuellement, comme pour augmenter en quelque ſorte leur force; l'un ſe dirige à droite, l'autre à gauche, celui-ci eſt toujours le plus foible, il eſt forcé de prendre une direction contraire à celle qu'il auroit ſuivie s'il ſe fût trouvé hors de la portée de l'autre: mais ſi par quelqu'accident ces deux chèvre-feuilles viennent enſuite à ſe ſéparer, ils reprennent l'un & l'autre leur direction naturelle, c'eſt-à-dire, de droite à gauche.

Les mouvemens eſſentiellement vitaux qui ont, dans les plantes, le plus grand rapport avec ceux des animaux, ſont le cours de la séve, le paſſage de l'air dans les trachées, les différentes poſitions que prennent les fleurs de quelques plantes à certaines heures du jour, &c. mais en obſervant la manière dont tous ces mouvemens s'exécutent dans les plantes, nous verrons qu'ils offrent un plus grand nombre de modifications que les mouvemens analogues qui ont lieu dans les animaux. La température de l'atmoſphère, ſon agitation, la lumière, &c. influent beaucoup ſur les mouvemens des plantes, en accélérant ou retardant le cours de leurs fluides; & comme elles ne peuvent jamais changer de place, ces variations produiſent en elles des changemens plus ſenſibles & plus uniformes que dans les animaux.

La rareté des fluides dans les vaiſſeaux des plantes, occaſionne quelquefois des mouvemens particuliers; ainſi dès que les ſemences de la balſamine, de l'alleluia, du ſablier, &c. ſont parvenues à un certain degré de maturité, les ſucs ceſſent de s'y porter, les parties qui compoſent les capſules ſe deſsèchent, & jouiſſant alors de toute leur élaſticité, elles ſe ſéparent ſubitement & jettent à une certaine diſtance les graines qu'elles renfermoient. Cette

action peut être considérée comme vitale puisqu'elle tend à la conservation de l'espèce; mais elle est modifiée, comme on voit, par une cause externe, puisqu'elle est accélérée ou retardée suivant le plus ou moins grand degré de sécheresse ou d'humidité de l'atmosphère.

L'abondance des fluides détermine aussi, dans les plantes comme dans les animaux, plusieurs mouvemens vitaux. L'action prompte des étamines de la pariétaire, l'inflexion des pédoncules des fleurs, des pistils, paroissent devoir être attribuées à une cause semblable: ces sortes de mouvemens qui s'observent sur-tout dans les organes destinés à la reproduction de l'individu, n'ayant lieu que dans des circonstances qui les rendent absolument nécessaires, paroissent être en quelque sorte l'effet d'une combinaison particulière; ils ne sont cependant que mécaniques, puisqu'ils sont toujours reproduits de la même manière & dans les mêmes circonstances. C'est ainsi que la rose de Jéricho, & les fruits secs de plusieurs espèces de Mesembryanthemum ne s'épanouissent que lorsque leurs vaisseaux sont remplis d'eau.

Le dégagement subit des fluides produit une espèce de mouvement; c'est à cette cause qu'il faut rapporter un grand nombre de phénomènes qu'on observe dans les feuilles de plusieurs plantes, & qui ne doivent pas être attribués à l'irritabilité. Les glandules qu'on voit au milieu de chaque feuille du *dionæa*, sont à peine piquées par quelque insecte, que celle-ci se replie sur elle-même & saisit aussi-tôt l'animal: la piqûre paroît déterminer un dégagement de fluide qui retenoit la feuille ouverte en remplissant ses vaisseaux. Cette explication est d'autant plus probable, que dans les premiers temps de la végétation de cette plante, lorsque les glandules ne sont presque pas développées, & que probablement les sucs ne coulent pas en abondance dans ses vaisseaux, les feuilles sont repliées sur elles-mêmes de la même manière qu'elles le deviennent après qu'elles ont été piquées par un insecte, lorsque la plante est plus avancée. On observe un phénomène analogue à celui-ci,

Digitized by Google

sur les feuilles des deux espèces de rossolis *. Le mécanisme est ici très-facile à apercevoir; les feuilles sont d'abord repliées sur elles-mêmes, les sucs ne sont point encore portés jusque dans les petits poils dont elles sont recouvertes, mais après leur développement, la présence du fluide est démontrée par une goutte qu'on voit à l'extrémité de chaque poil; c'est en absorbant ce fluide, que l'insecte dégorge les vaisseaux de la feuille qui se replie sur elle-même & reprend son premier état: la promptitude de l'action est proportionnée à la quantité de poils touchés par l'insecte. Ce mouvement pourroit être comparé en quelque sorte à celui qui a lieu dans l'extrémité d'un animal, laquelle retenue dans un état de flexion par une tumeur dans l'articulation, reprend tout-à-coup son ancienne position au moment où l'on donne issue à l'humeur qui faisoit obstacle. Quelques botanistes ont donné une explication très-ingénieuse du mouvement des sensitives; ils l'attribuent à des molécules qui s'amassent dans les vaisseaux de la plante, & qui se dégagent au moment de l'attouchement: mais la cause est ici moins facile à saisir.

* M. Roth.

Les phénomènes qui dépendent de l'abondance des fluides, sont sur-tout apparens dans les plantes qui croissent dans les endroits humides; le Rossolis, le Dionæa, sont de cet ordre; & l'on sait, d'après les expériences de Mrs Dufay & Duhamel, que les sensitives sont sur-tout sensibles, lorsque le soleil est caché par des nuages, & que l'air est humide & chaud.

L'influence des causes externes modifie quelquefois les mouvemens vitaux dans les plantes, de manière qu'on seroit tenté de les attribuer à la volonté, comme ceux qui dépendent entièrement de cette faculté dans les animaux. Si l'on met une perche en terre auprès d'une plante grimpante, elle la saisit toujours * pour s'y entortiller, dans quelqu'endroit qu'on la place. La même chose a lieu pour les vrilles de la vigne qui s'attachent toujours à un bâton qu'on leur présente, quelque part qu'il soit placé, pourvu

* M. Musset.

Digitized by Google

qu'elles puiſſent y atteindre; mais ces mouvemens ſont entièrement vitaux, la plante grimpante & les vrilles ſe portent ſucceſſivement dans toutes les directions, & ne ſauroient par conſéquent manquer de rencontrer les corps qui ſont à leur portée. Ces mouvemens ont lieu tant que les parties prennent de l'accroiſſement; dès qu'elles ceſſent de pouſſer, ſi elles n'ont atteint aucun corps pour s'y fixer, elles ſe recourbent ſur elles-mêmes. Une racine pouſſe ſur la paroi d'un foſſé; ſi elle ſuivoit la ligne horizontale, elle ſeroit bientôt à découvert & périroit; mais elle ſe recourbe avant d'avoir atteint le foſſé, & comme ſi elle étoit dirigée par une ſorte d'inſtinct, elle pouſſe en en-bas, paſſe au-deſſous du foſſé, remonte du côté oppoſé, & parvenue à la même hauteur où elle étoit d'abord, elle continue de pouſſer horizontalement. Ceci a également lieu lorſque la racine rencontre quelque corps ſolide. Si on met à découvert une racine & qu'on place tout auprès, en évitant pourtant le contact, une éponge pleine d'eau, la racine ſe rapproche de l'éponge, & ſe dirige dans tous les points où on la place ſucceſſivement: cette obſervation démontre, ſur-tout, juſqu'à quel point les mouvemens vitaux dans les plantes peuvent être modifiés par des cauſes externes, & combien ils diffèrent eſſentiellement de ceux que la volonté détermine dans les animaux.

Les mouvemens produits par la préſence des fluides dans les vaiſſeaux, ſont plus ou moins ſenſibles dans les feuilles des différentes eſpèces de plantes. Quelques-unes paroiſſent ne jouir d'aucune ſorte de mouvement, d'autres ont des feuilles ſuſceptibles de ſe mouvoir en différens ſens; leurs mouvemens ſont ordinairement modifiés par différentes cauſes, mais aucune ne paroît jouir d'un mouvement auſſi ſenſible & auſſi continu qu'une eſpèce de ſainfoin. Cette plante ſingulière a été découverte au Bengale, dans des lieux humides & argileux aux environs de Dacca, par Milady Monſon, que ſon zèle pour l'hiſtoire naturelle avoit déterminé à entreprendre un voyage dans les Indes; zèle

zèle d'autant plus louable, que les perſonnes de ſon ſexe ont rarement la force & plus rarement encore le courage de le diriger vers un pareil objet. La mort l'a ſurpriſe au milieu de ſes courſes botaniques. Linné avoit cru devoir conſacrer à ſa mémoire un genre de plante ſous le nom de *Monſonia*. M. le chevalier Banks ayant bien voulu me communiquer les manuſcrits de Milady Monſon, j'en ai extrait les obſervations qui ont rapport aux mouvemens de cette plante, & tels qu'elle les avoit obſervés au Bengale; je les comparerai avec ceux que j'ai eu occaſion d'examiner ſur les individus qu'on cultive dans les ſerres en Europe; mais je crois néceſſaire auparavant de donner la deſcription de cette plante, parce que *Linné* le fils eſt le ſeul auteur qui en ait parlé dans ſon *Supplementum plantarum*; mais il n'a pas vu les fleurs, & ſa deſcription eſt dès-lors incomplette. Je joins encore à ce Mémoire un deſſin, parce que je ne connois aucune figure de cette plante.

Les Indiens la nomment *Burum chandali*. Linné a cru devoir la rapporter au genre d'*hedyſarum* (ſainfoin), & la déſigner ſous le nom ſpécifique de *gyrans* (tournant); je lui conſerverai la dénomination de ſainfoin oſcillant, ou de plante oſcillante, que M. Daubenton lui a donnée dans le cabinet du Roi. Ce nom exprime beaucoup mieux que celui de *gyrans*, les mouvemens de ſes folioles.

La racine eſt ordinairement annuelle, quelquefois biſannuelle, & dans nos ſerres elle dure ſouvent plus de deux ans; elle eſt également branchue & fibreuſe. Les branches partent d'une tige qui s'élève très-peu; elles ſont communément au nombre de ſix ou ſept; elles viennent à la hauteur de trois ou quatre pieds; elles ſont ligneuſes, liſſes, cylindriques, de la groſſeur du petit doigt, ſupportant des rameaux placés alternativement, déliés, plians & recouverts d'un épiderme liſſe & vert: les feuilles ſont diſpoſées alternativement ſur les branches & les rameaux, elles ſont preſque toujours compoſées de trois folioles, rarement & ſeulement vers le bas des tiges ſimples, elles ſont ſoutenues

par un pétiole d'un ou deux pouces de long, légèrement velu & garni à la base de deux stipules alongées, pointues & roussâtres. La foliole intermédiaire, plus longue que le pétiole, est ordinairement de trois ou quatre pouces sur un de large; elle est lancéolée, oblongue, unie sur les bords, très-lisse, d'un vert pâle, glauque dans le milieu, & légèrement veinée. Les deux folioles latérales qu'on pourroit en quelque sorte regarder comme des appendices de l'intermédiaire, sont supportées par des pétioles courts, fixés sur le pétiole commun; elles sont lancéolées & étroites: on voit à leur base de petites stipules relevées, subulées, caduques & vertes.

Les fleurs forment des épis redressés, alongés, qui partent des aisselles, ou qui terminent les branches; elles sont papilionnacées, petites, d'un jaune foncé, situées deux à deux & embrassées par des bractées ovales, aiguës, caduques, & qui se recouvrent en partie les unes les autres. Le calice est à quatre dents, presque labié, d'abord vert; mais à mesure qu'il approche de la maturité, il devient rougeâtre & quadrangulaire. La corolle est composée de cinq pétales, l'étendard *(a)* est arrondi, échancré, convergent sur les côtés, les *(b)* ailes sont plus courtes que la carène; celle-ci *(c)* est presque ovale, comprimée, de la longueur de l'étendard, & formée par deux pétales réunis. Les étamines *(d)* au nombre de dix, sont séparées en deux corps: neuf sont réunies entre elles par leurs filamens; la dixième est isolée; chacune supporte une anthère alongée & assez grosse. Le germe est linéaire, comprimé, surmonté d'un style simple, subulé, tourné en en-haut, & terminé par un stigmate obtus.

Le fruit est un légume *(e)* d'environ deux pouces, légèrement recourbé, comprimé, formant un étranglement entre chaque semence; celles-ci *(f)* sont petites, réniformes, comprimées, très-lisses, grisâtres & marquées d'une tache.

Le sainfoin oscillant est en fleur au Bengale au mois de septembre; les légumes ont déjà acquis toute leur ma-

Digitized by Google

turité en novembre, & ils laiſſent pour lors échapper les graines qu'ils renferment. Il fleurit rarement en Europe, & ſa culture demande beaucoup de ſoin; il doit être renfermé dans une ſerre chaude, & n'en ſortir preſque jamais. La première fois qu'on l'a vu en Europe, c'eſt en 1777, en Angleterre, dans le jardin de Lord Bute, à Luton-Park, il y fleurit en mars.

Aucune partie de cette plante ne donne des ſignes d'irritabilité quand on la pique. Dans la journée, la foliole du milieu eſt étendue horizontalement, & eſt immobile; dans la nuit elle ſe recourbe & vient s'appliquer ſur les branches. Les folioles latérales ſont toujours en mouvement, portées alternativement, vers le haut & vers le bas; toute l'action du mouvement eſt dans le pétiole qui paroît ſe contourner: ces folioles décrivent un arc de cercle. Aux Indes, deux minutes ſuffiſent pour faire exécuter aux folioles tout leur mouvement; je ne les ai jamais vues ſe remuer auſſi promptement que cela dans nos ſerres. Le mouvement qui les porte en en-bas eſt plus prompt que celui qui les fait aller en en-haut; le premier eſt même quelquefois exécuté par interruptions, ou du moins il n'eſt point égal. Le mouvement en en-haut eſt au contraire toujours uniforme. Le plus ſouvent chaque foliole ſe meut dans un ſens oppoſé; c'eſt-à-dire, que l'une eſt tournée en en-bas, quand l'autre regarde en en-haut: quelquefois une des folioles eſt ſtable, tandis que l'autre ſe remue; ce mouvement eſt ſi naturel, que ſi l'on vient à l'interrompre, en fixant une des folioles, il recommence dès que l'obſtacle eſt levé.

Le mouvement n'a plus lieu, dès que les grandes folioles ſont agitées par le vent. Dans les animaux, la tranſpiration eſt ſur-tout accélérée par le cours du ſang, par l'action des muſcles, &c. Dans les plantes, où la circulation des fluides eſt très-lente, la perſpiration paroît être augmentée par des cauſes externes, l'agitation de l'air en eſt une des principales, les feuilles qui ſont les organes deſtinés à cette fonction, ſont ordinairement ſoutenues par des pétioles minces & qui leur

permettent de ſe mouvoir en tous ſens, ſi cette ſtructure manque, les organes des végétaux ſont conſtruits différemment; la chaleur du ſoleil, l'humidité ou une grande abondance de fluides dans des vaiſſeaux conſtruits d'une manière particulière déterminent la perſpiration de pluſieurs plantes. Le Dionœa, le Roſſolis, &c. comme nous l'avons déjà remarqué, croiſſent dans des lieux humides, où les fluides abondent, pluſieurs ſenſitives viennent dans des endroits où l'air eſt très-peu agité; ou bien celles dont la perſpiration ne peut s'opérer de toutes ces manières, ont un petit nombre de feuilles ordinairement ſucculentes, & recouvertes d'un épiderme très-mince. Quand le ſoleil eſt très-chaud, les folioles du ſainfoin oſcillant ſont auſſi immobiles; mais, lorſque le temps eſt chaud & humide, ou qu'il pleut, elles ſe meuvent très-bien.

Ce mouvement paroît abſolument néceſſaire à cette plante; car, dès qu'elle a pouſſé les premières feuilles, il commence à avoir lieu, & il ſe continue même pendant la nuit, mais il s'affoiblit avec le temps; dans nos ſerres il a lieu, ſur-tout dans la première année; à la ſeconde il eſt très-peu ſenſible; dans ſon pays natal, toutes les feuilles ſont en mouvement, jamais je ne les ai vues ſe remuer toutes dans nos ſerres. Dans le moment que la plante eſt le plus chargée de fleurs, que la fécondation des germes a lieu, les folioles ſont beaucoup plus agitées. Dans les plantes comme dans les animaux, le temps de la reproduction des individus eſt toujours celui où tous les organes ſont dans leur plus grande perfection. Dès que le temps de la génération eſt paſſé, les folioles ceſſent de ſe mouvoir; les ſenſitives ne ſont preſque plus ſenſibles après ce temps, les pétales de pluſieurs plantes ne ſe referment plus périodiquement.

Ce mouvement d'oſcillation eſt tellement naturel à la plante oſcillante, qu'il a non-ſeulement lieu pendant deux ou trois jours ſur les folioles d'une branche qu'on a coupée, & qui a été miſe dans l'eau, mais qu'il eſt même continué pendant quelque temps ſur les feuilles des rameaux

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

qu'on a séparés de la plante, & qu'on n'a point mis dans l'eau. Ne peut-on pas, dans ce dernier cas, le comparer en quelque sorte aux battemens du cœur des animaux, après que cet organe a été arraché? Les feuilles semblent tenir lieu de cœur dans les végétaux, elles augmentent par leurs mouvemens le cours des fluides, comme ce viscère, par ses contractions détermine la circulation du sang. Dès que les feuilles se séparent d'une plante, les progrès de la végétation sont arrêtés, & les végétaux ressemblent à ces animaux, dont le sommeil périodique est caractérisé par une diminution dans les battemens du cœur.

Les Indiens, qui sont de tous les peuples ceux qui s'adonnent le plus à la connoissance des plantes, n'ont point manqué de remarquer le mouvement singulier des feuilles de celle-ci, & ce phénomène étoit trop extraordinaire pour qu'il ne devînt pas, chez une nation superstitieuse, l'objet d'un culte particulier. Ils cueillent à un certain jour de l'année, qu'ils nomment *lunichur*, deux folioles latérales dans l'instant qu'elles sont le plus rapprochées, ils les pilent ensemble avec la langue d'une espèce de chouette, & l'amant plein de foi croit, avec cette préparation, se rendre favorable l'objet de son amour. Je ne crains point de rapporter ce trait d'après Milady Monson, persuadé que rien de ce qui a rapport à l'histoire d'une plante aussi curieuse que celle-ci ne doit être omis.

Le mouvement, comme nous venons de le voir, est un attribut moins essentiel aux végétaux qu'aux animaux, plusieurs plantes ont des parties qui en donnent à peine quelques signes, plusieurs en ont aussi qui sont entièrement cataleptiques, ce qui s'observe plus rarement dans les animaux, excepté dans ceux qui sont rapprochés par leur forme du règne végétal; cette singularité est sur-tout remarquable dans une espèce de dracocephalum de Virginie, dont les péduncules des fleurs conservent toutes les positions qu'on leur donne. Cette plante me paroît devoir être mise en opposition avec celle dont je viens de parler. Son histoire est consignée dans les Mémoires de l'Académie, *année 1712.*

MESSIEURS DE LA SOCIÉTÉ Royale des Sciences établie à Montpellier, ont envoyé à l'Académie le Mémoire ſuivant, pour entretenir l'union intime qui doit être entre elles, comme ne faiſant qu'un ſeul Corps, aux termes des Statuts accordés par le Roi, au mois de Février 1706.

OBSERVATIONS SUR LA CRISTALLISATION. DE L'HUILE DE VITRIOL.

Par M. CHAPTAL.

LE 3 du mois de Janvier 1786, les ouvriers de ma fabrique d'Acides minéraux, en retirant des galères l'huile de vitriol rectifiée, en trouvèrent une cornue qui n'avoit pas le degré de concentration ſuffiſant, & en remplirent une dame-jeanne qu'ils dépoſèrent, ſelon la coutume, dans un coin du hangar : le ſurlendemain, ils voulurent prendre cette huile pour lui faire ſubir une ſeconde rectification; mais quel fut leur étonnement, lorſqu'ils trouvèrent dans la bouteille une maſſe ſolide qui en occupoit le milieu, & d'où partoient des criſtaux qui alloient ſe terminer contre les parois du vaſe! Ils ſe hâtèrent de confier ce prodige à M. Berard, Directeur de ma fabrique, qui m'inſtruiſit du phénomène le lendemain. Je crus

Digitized by Google

d'abord, qu'on avoit laiſſé dans le hangar quelque bouteille remplie d'eau, & que les bulles d'air qu'on obſerve ſouvent dans la glace, diſpoſées ſur la même ligne du centre à la circonférence de la bouteille, en avoient impoſé à M. Berard, & que c'étoient-là les criſtaux de l'huile de vitriol dont il me parloit; je lui fis part de mes doutes, il s'obſtina à me dire que c'étoit une véritable criſtalliſation d'huile de vitriol.

Mes doutes ne me parurent pas ſuffiſamment éclaircis, mais des occupations réitérées, ne me permirent d'aller à la fabrique que le 18: on avoit conſervé cette bouteille, & l'ouverture en étoit ſimplement recouverte par un bouchon de terre cuite.

Je ne fus pas peu étonné, lorſque j'aperçus une maſſe ou groupe de criſtaux, qui peſoit au moins 60 livres, puiſque mes bouteilles ſont ordinairement de cette contenance. Il y avoit dans le fond une couche de 2 pouces d'huile de vitriol, provenant d'un commencement de fonte ou *deliquium* de ces criſtaux.

Je m'empreſſai de caſſer la dame-jeanne, pour avoir le plaiſir de manier ces criſtaux, & d'en déterminer la figure. Le thermomètre étoit en ce moment à + 7, l'onctueux de la ſurface de ces criſtaux étoit celui de l'huile de vitriol. Leur température étoit plus chaude au tact que celle de tous les corps voiſins; tels que les bois, les pierres, les verres, &c. la couleur étoit d'un jaune rembruni, la caſſure liſſe, unie & vitreuſe.

Je détachai de ce groupe pluſieurs criſtaux bien formés; &, dans tous, la forme m'a paru un priſme hexaèdre aplati, terminé par une pyramide hexaèdre. Un examen plus approfondi du criſtal m'a préſenté les formes ſuivantes:

L'épaiſſeur du priſme eſt à peine le quart de la largeur, La pyramide d'un priſme de 8 pouces 7 lignes avoit 11 lignes de longueur.

Les deux grands côtés du priſme aplati forment deux

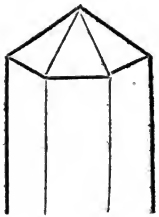
Digitized by Google

parallélogrammes, les quatre petits s'uniſſent à angle aigu, & forment un angle obtus à leur réunion aux grands côtés du priſme.

Les petits côtés du priſme ſe terminent du côté de la pyramide par une ligne inclinée aux grands côtés du priſme, & qui forme avec eux un angle obtus; par ce moyen, la pyramide réſulte de l'aſſemblage de ſix triangles iſocèles.

Je n'ai pas trouvé de criſtal à deux pyramides; ils étoient tous implantés dans une maſſe commune qui occupoit le milieu de la bouteille.

J'ai eſſayé de repréſenter, dans cette figure, la forme de ces criſtaux. Les côtés de la pyramide & du priſme ont à peu-près leurs largeur & dimenſions reſpectives.



À meſure que je maniois les criſtaux à l'air libre & à une chaleur de 7 degrés au-deſſus de 0, il découloit de la maſſe, de l'huile noirâtre qui noirciſſoit le bois, & attaquoit ſi fortement mes mains, qu'elles devinrent luiſantes, calleuſes, & que l'épiderme fut détruit.

Je remplis un vaiſſeau de verre à large ouverture, de 15 à 16 livres de ces criſtaux bien figurés; je les ai montrés & laiſſé manier, pendant mon cours, à trois ou quatre cents auditeurs, & je les ai conſervés juſqu'au 30 Janvier, alors le *deliquium* a été complet.

L'huile

L'huile de vitriol provenue de la fonte de ces criſtaux, eſt d'un jaune-noirâtre, marquant de 63 à 64 degrés à mon peſe-liqueur qui donne 66 dans la bonne huile du commerce.

J'ai rectifié avec ſoin une grande partie de l'huile provenue de ces criſtaux tombés en *deliquium*; j'ai adapté pour cet effet à ma cornue un récipient bien luté, & l'appareil des gaz; mais je n'ai retiré que de la très-belle huile de vitriol, & un flegme très-acide: 2 livres 9 onces de ce *deliquium* m'ont fourni 1 livre 10 onces d'huile très-concentrée, & 15 onces d'eſprit de vitriol à 23 degrés.

L'état du thermomètre, depuis la production du phénomène juſqu'à la fonte des criſtaux, a été comme il ſuit:

Les 2, 3, 4, 5 de Janvier, il deſcendit ſous 0 de 2, & même de 3 degrés le 5 au matin; depuis ce jour, il s'eſt conſtamment tenu au-deſſus de 0, & a été juſqu'au 12: ſon terme moyen a été entre 5 & 8.

Ce phénomène me parut nouveau & intéreſſant. Je deſirois un froid aſſez vif pour pouvoir répéter l'expérience, & je commençois à déſeſpérer, lorſque, le 9 Mars, l'air ſe refroidit au point de me faire eſpérer de reproduire ce phénomène. Dans la nuit du 9 au 10, le thermomètre deſcendit à — 1; le lendemain, le thermomètre marquant — 3, je diſpoſai, à 8 heures du matin, des appareils convenables ſur une terraſſe expoſée au levant.

Je me ſervis de capſules de verre pour mes expériences, & mis dans ces vaſes.

1.° De l'huile de ma fabrique, concentrée, blanche comme l'eau, & donnant 66 $\frac{1}{2}$ au pèſe-liqueur.

2.° De l'huile de vitriol provenant du *deliquium* des premiers criſtaux, & concentrée au 65me degré.

3.° Le flegme provenu de ces concentrations, & marquant 23 degrés,

4.° De l'huile rapprochée par la concentration jusqu'au 64.me degré.

5.° L'huile provenue du *deliquium* des criſtaux, qui avoit été expoſée à l'air pendant trente-ſept jours, & ne marquant plus que 60 degrés.

Ces huiles, plus ou moins fortes, reſtèrent expoſées à l'air tout le jour & toute la nuit du 10 au 11.

Le 11, à 8 heures du matin, le thermomètre marquant — 2, je trouvai, 1.° que l'huile de l'expérience, *n.° 1*, n'avoit éprouvé aucun changement du moins en apparence.

2.° Que celle de l'expérience, *n.° 2*, préſentoit, au fond de la liqueur, ſur les parois du vaſe, une couche de petits criſtaux de la groſſeur d'une tête d'épingle, dont la forme très-bien caractériſée paroiſſoit celle d'un rhombe alongé.

3.° Le flegme marquant 23 degrés, ne préſentoit aucun changement.

4.° L'huile marquant 64 degrés, préſentoit à ſa ſurface trente à quarante criſtaux figurés en rhombes alongés, ayant à peu-près 4 lignes de long ſur 3 de large, & une d'épaiſſeur.

J'ai décanté la liqueur que ſurnageoient les criſtaux, & en ai trouvé une couche de ſemblables au fond du vaſe. L'huile décantée, miſe dans un grand vaſe de verre (le thermomètre montant toujours par la chaleur du ſoleil qui donnoit déjà ſur les murs voiſins), a été convertie preſque toute en criſtaux dans l'eſpace d'un quart d'heure. L'huile qui ſurnageoit, coulée ſur des plaques de verre, s'y figeoit dans la minute, & formoit une ſuite de criſtaux implantés les uns dans les autres; un carreau de vitre enduit de cette huile, s'en eſt recouvert, au point que j'ai retiré 2 onces 7 gros d'huile de vitriol de la fonte de cette eſpèce d'incruſtation.

5.° L'huile provenant du *deliquium* des criſtaux, & affoiblie au 60.me degré par ſon expoſition à l'air, n'a donné

Digitized by Google

aucun ſigne de criſtalliſation, quoique j'en euſſe rempli des tubes de verre minces, pour que le froid la frappât mieux.

Au plaiſir de répéter mon expérience, j'ai joint la ſatisfaction de rendre témoins de tous ces phénomènes pluſieurs de mes confrères à l'Académie, tels que M.rs Mourgues, Peyre, Joyeuſe, Bertholon, Brun, &c. Deux d'entr'eux, M.rs Peyre & Joyeuſe, aſſociés-chimiſtes, ont eu le plaiſir de voir ſe former & croître, à vue d'œil, des criſtaux de l'huile décantée de deſſus la première couche criſtalline, & miſe dans une grande capſule. Pluſieurs criſtaux ont acquis, ſous nos yeux, en quelques minutes, une longueur d'un pouce; & nous avons vu que le rhombe qui paroît d'abord, n'eſt qu'un ſegment de priſme, & qu'il s'alonge par l'addition & l'application de nouveaux criſtaux.

Dans le nombre infini de criſtaux qui ſe font formés, il y en a avec pyramide, & d'autres ſans pyramide.

Il me paroît réſulter de cette expérience, 1.° que l'huile très-concentrée ne criſtalliſe point; 2.° que l'huile concentrée entre le 63 & le 65 $\frac{1}{2}$ à un aréomètre marquant 66 dans celle du commerce, criſtalliſe facilement; 3.° que le degré de froid convenable eſt depuis — 1 juſqu'à — 3.

Ce fait me paroît nouveau, & je vais le rapprocher de deux connus qui paroiſſoient avoir de l'analogie avec lui.

1.° Meyer rapporte (Eſſais de chimie, *chap. XVIII*) que lorſqu'on rectifie une huile de vitriol bien fumante, telle que celle de Nordhaus, il paſſe des vapeurs qui ſe condenſent, dans le récipient bien luté, en une liqueur que le froid coagule en une matière ſaline: ce ſel fume violemment quand on ouvre le récipient. Le chimiſte d'Oſnabruck a cru que c'étoit une combinaiſon de ſon *cauſticum* avec l'huile de vitriol; & on m'a rapporté que M. de Fourcroy qui a vérifié l'expérience, attribuoit ce phénomène à une combinaiſon particulière de gaz ſulfureux & d'huile de vitriol.

Ce phénomène, très-intéreſſant par lui-même, & ſur-tout

par la manière dont ce dernier chimiſte l'enviſage, ne me paroît avoir aucun rapport avec les obſervations que j'ai rapportées ci-deſſus; 1.° les criſtaux dont j'ai parlé, ne ſe volatiliſent point, ils ſe fondent au feu & ſe réduiſent en huile; 2.° expoſés à l'air, il ne s'en dégage ni fumée ni odeur.

Nous devons à M. le duc d'Ayen de ſuperbes expériences ſur la congélation de l'huile de vitriol: ce célèbre amateur des ſciences profita du froid extraordinaire qu'on éprouva à Paris, à la fin de Janvier 1776, pour expoſer à une fenêtre, dans des ſoucoupes de porcelaine, de l'acide vitriolique à divers degrés de concentration. La nuit du 27 au 28, l'acide concentré ſe gela après 7 ou 8 heures d'expoſition; l'acide affoibli par l'eau, ne donna aucun ſigne de congélation, même après 30 heures.

M. de Morveau a répété l'expérience le 15 Février 1782; & après avoir obtenu de la glace par un froid artificiel de 16 au-deſſous de 0, il ſe convainquit que l'huile pouvoit ſe geler à un froid moindre; & les portions d'huile qui avoient réſiſté à l'impreſſion d'un froid auſſi violent, ſe figèrent à quelques degrés au-deſſus de 0: il obſerva même des ſtries à la ſurface de la glace, ce qui me paroît annoncer un délinéament de criſtalliſation; mais, d'un côté, le rapprochement ou trop forte concentration de la liqueur, & de l'autre, le froid violent qu'on lui appliqua, précipitèrent confuſément les parties intégrantes de l'huile, & ne lui permirent pas un arrangement ſymétrique.

Le manque d'eau de criſtalliſation doit néceſſairement s'oppoſer à la formation des criſtaux; & pour que le phénomène eût lieu, il falloit de l'huile de vitriol qui n'eût été portée, par la rectification naturelle, qu'au 63.me ou 65.me degré, & je ne crois pas qu'on obtienne cet effet en affoibliſſant à ce degré l'huile déjà concentrée; car l'huile de vitriol préalablement concentrée, & enſuite affoiblie par l'eau, ne me paroît pas exactement de la même nature que celle qui eſt portée au même degré par une concentration

Digitized by Google

naturelle. 1.° Il y a un principe colorant & autres matières qu'on dégage par la rectification, & qu'on ne redonne point par l'addition de l'eau; 2.° l'huile dont on a arrêté la concentration au 64.me degré, ne dissout pas l'indigo, au point de porter la partie colorante sur les étoffes; tandis que l'huile bien concentrée & affoiblie par l'eau au même degré, fait du très-beau bleu : ces expériences ont été faites & répétées très en grand dans la fabrique de flanelles de M.rs Isnel & Luchaire à Montpellier. 3.° Les cristaux de l'huile au 65.me degré, tombés en *deliquium*, & exposés à la même température, n'ont plus cristallisé, quoique le *deliquium* ne marquât que 64. Ce fait me paroit prouver que l'eau & l'humidité de l'air, qui se combinent avec l'acide, y développent & entretiennent une chaleur permanente qui ne le rend pas *impressionable* au même degré de froid.

Le 11 au soir & le 12, deux onces de ces cristaux enfermés dans une cornue que j'ai bouchée bien exactement avec un bouchon de liége, & exposés à une température de + 4 degrés, ne sont pas tombés en *deliquium*, tandis que les cristaux qui s'étoient formés dans la grande capsule, & que j'ai laissés dans le vase, exposés à une température de + 1, sont presque tous tombés en *deliquium*, au point d'être déjà totalement déformés; ce qui me fait présumer qu'on pourra garder les cristaux dans un laboratoire, en mettant le flacon qui les contient, dans un endroit frais: on pourroit essayer de plonger le flacon dans l'eau, l'éther ou autre liqueur froide.

Le phénomène que je viens de décrire est sans contredit une véritable cristallisation; mais il paroît se rapprocher des congélations, en ce que, dans la première expérience de ma fabrique, tout le liquide s'étoit figé en cristaux, & qu'il n'y avoit pas une goutte de ce que nous appelons *eau-mère*. Mais il me paroît qu'un sel quelconque, qui ne sera tenu en fusion ou dissolution que par sa seule eau de cristallisation, doit produire des effets semblables, si on lui applique un froid suffisant pour pénétrer toute la masse.

Digitized by Google

Ce fait me paroît prouver encore que la loi de la criſtalliſation ſi bien préſentée par M.rs Linné, de l'Iſle, Sage, Daubenton, Haüy, eſt plus générale qu'on ne l'a cru, & qu'elle s'étend juſqu'à ces matières que nous étions autoriſés à regarder comme des êtres ſimples, avant les belles expériences de M. Lavoiſier.

Digitized by Google

EXTRAIT
DES OBSERVATIONS
ASTRONOMIQUES ET PHYSIQUES,
Faites à l'Obſervatoire royal,
en l'année 1785.

M. le Comte DE CASSINI, Directeur.
M.rs DE VILLENEUVE & RUELLE, Élèves.

Nota. SA MAJESTÉ ayant voulu qu'à commencer du 1.er Janvier 1785, on ſuivît, à ſon Obſervatoire royal, un cours complet & continuel d'obſervations aſtronomiques & phyſiques, a créé trois places d'obſervateurs, qui, ſous les yeux du directeur de l'Obſervatoire, doivent faire toutes les obſervations qui peuvent avoir lieu, tant le jour que la nuit, depuis le commencement juſqu'à la fin de chaque année. L'extrait de ces obſervations & de leurs réſultats eſt imprimé particulièrement tous les ans, & diſtribué aux principaux Savans de l'Europe: mais l'Académie ayant deſiré qu'il fît partie de ſes Mémoires, on le trouvera à l'avenir à la fin de chaque volume.

Digitized by Google

AVERTISSEMENT.

Les nouveaux instrumens que Sa Majesté a commandés pour son Observatoire royal, ont été commencés cette année, & doivent être achevés dans le courant de 1786. Le sieur Lenoir est chargé de la construction d'un Cercle entier de trois pieds de diamètre; le sieur Megnié a entrepris celle du Quart-de-cercle mural de sept pieds & demi de rayon. Ce grand instrument est exécuté à l'Observatoire même, dans un vaste atelier disposé à cet effet, où seront établis à demeure les outils & toutes les principales machines nécessaires à la construction des grands instrumens d'Astronomie: une spacieuse fonderie a été bâtie & distribuée de la manière la plus commode pour faire des essais sur la fonte en cuivre des différentes parties de l'instrument. Ce sera donc à l'avenir dans le même lieu que seront faits & les instrumens & les observations; l'artiste & le savant réunis se prêteront un secours réciproque, dont les arts & les sciences ne peuvent tirer qu'un très-grand avantage.

Sa Majesté, en confiant la construction des nouveaux instrumens de son Observatoire, à des artistes François, a eu principalement en vue de ranimer l'industrie nationale, & de mettre les artistes de la capitale dans le cas de disputer à une nation rivale la prééminence qu'elle a depuis quelque temps obtenue dans les arts par les chef-d'œuvres qui sont sortis de chez elle. L'on sait ce que peuvent opérer en France les regards du Souverain; on doit donc juger favorablement des heureux effets que va produire la protection marquée que Sa Majesté daigne accorder dans cette occasion aux Artistes françois.

En attendant que la construction de ces nouveaux instrumens soit achevée, nous avons fait usage de ceux que nous possédions précédemment; la plupart appartiennent à l'Académie, qui, autant que ses facultés le lui ont permis, s'est toujours empressée à seconder nos travaux, & à suppléer au dénuement où nous nous sommes trouvés pendant long-temps par l'état de vétusté & d'imperfection où étoient réduits les anciens instrumens de l'Observatoire. Un fonds annuel que Sa Majesté vient d'affecter à l'entretien & à l'augmentation de nos instrumens, nous met aujourd'hui dans une

situation,

Digitized by Google

ſituation bien différente. Nous avons déjà fait l'acquiſition d'un ſuperbe téleſcope de cinq pieds de foyer, de la conſtruction du ſieur Dollond, & dont le pouvoir amplifiant, à l'imitation de ceux de M. Herſchel, va juſqu'à trois mille fois. Pluſieurs autres inſtrumens de toute eſpèce, & propres à diverſes obſervations, ont été acquis ou commandés & commencent déjà à former une collection précieuſe qui aſſure à l'avenir la richeſſe, la gloire & l'utilité de l'Obſervatoire royal dont l'établiſſement ſemble renaître ſous une nouvelle forme. La ſuite nombreuſe d'obſervations dont nous offrons ici les réſultats, va faire connoître l'uſage que nous avons fait des nouveaux ſecours que nous avons obtenus : il eſt néceſſaire d'entrer dans quelques explications pour l'intelligence des tableaux dans leſquels nous avons tâché de préſenter en raccourci tous les principaux réſultats de nos opérations.

Les hauteurs du baromètre, que l'on trouvera parmi les obſervations météorologiques, ont été déterminées depuis le mois de Juillet, avec un excellent inſtrument de la conſtruction du ſieur Megnié ; par le moyen d'une petite cuvette que l'on plonge à chaque obſervation dans le mercure, & qui ſe remplit également, on obtient toujours un niveau conſtant : ce baromètre meſure juſqu'aux centièmes de ligne les variations de la hauteur du mercure ; à c'eſt M. Lavoiſier, membre de l'Académie, que nous ſommes redevables de cet inſtrument.

Le thermomètre à mercure, avec lequel nous avons obſervé la température de l'air, a été conſtruit par le ſieur Moſſy, d'après les ordres de l'Académie ; la diviſion a été faite ſur glace par le ſieur Richer, avec le plus grand ſoin, on y diſtingue les degrés & dixièmes de degrés.

Un autre thermomètre placé au fond des caves où il reſte perpétuellement, a été également conſtruit par ordre de l'Académie, ſous l'inſpection & la direction de M. Lavoiſier : ſa conſtruction ingénieuſe & particulière a pour objet de déterminer ſi la température des caves de l'Obſervatoire eſt conſtante, ſi on peut la prendre pour un terme fixe ; & au cas qu'elle ait quelques variations, d'en rechercher les loix, d'en meſurer l'étendue au centième de degrés près.

La déclinaiſon de l'aiguille aimantée a été obſervée avec une aiguille d'acier fondu, de neuf pouces de longueur : nous nous

propoſons de faire exécuter inceſſamment un nouvel inſtrument pour cette ſorte d'obſervation.

La variation diurne a été déterminée avec une aiguille ſuſpendue à des fils de ſoie, ſelon la méthode de M. Coulomb.

Quant aux obſervations aſtronomiques, tous les lieux des planètes ont été déterminés par des obſervations faites dans le méridien, comme étant les plus exactes : les paſſages ont été pris avec une lunette méridienne achromatique de trois pieds & demi, exécutée par le ſieur Charité, artiſte François, ſur le modèle d'un pareil inſtrument anglois, de la conſtruction du ſieur Ramſden ; & les hauteurs ont été obſervées avec un quart-de-cercle de ſix pieds de rayon, conſtruit en 1743, par le ſieur Langlois, ce qui à la vérité néceſſitoit toujours le concours de deux obſervateurs ; mais ſi cette méthode eſt plus embarraſſante, & ne permet pas de faire un auſſi grand nombre d'obſervations qu'avec les inſtrumens muraux, elle a peut-être l'avantage, en ſéparant les deux parties de l'obſervation, d'y employer l'eſpèce d'inſtrument qui eſt la plus propre à chacune. En effet, je ne balancerois jamais, pour l'obſervation des paſſages, à donner la préférence à la lunette méridienne ſur le meilleur mural, à cauſe des inégalités du plan de ce dernier inſtrument, impoſſibles à éviter, très-difficiles à reconnoître, plus encore à déterminer, ſans parler des changemens accidentels dont ce plan eſt ſuſceptible ; & pour les hauteurs, la difficulté de vérifier un mural, lui donne certainement de l'infériorité vis-à-vis des quarts-de-cercle mobiles, qu'on peut retourner, renverſer, & vérifier avec la plus grande facilité & auſſi fréquemment qu'on le juge à propos.

Les éclipſes des ſatellites de Jupiter, des étoiles par la Lune, & autres phénomènes inſtantanés de ce genre, ont été obſervés avec de très-bonnes lunettes achromatiques à trois verres, de trois pieds & demi de foyer & de quarante-deux lignes d'ouverture, de la conſtruction du ſieur Dollond.

Les tables auxquelles nous avons comparé les réſultats de nos obſervations, ſont celles que M. de la Lande a raſſemblées à la ſuite de ſon Aſtronomie, édition de 1771 ; *les ſignes + & — que nous avons employés pour l'erreur des tables, indiquent qu'il faut ajouter ou retrancher de la poſition actuelle déduite des tables, pour avoir celle qui a été obſervée.*

Digitized by Google

HISTOIRE PHYSIQUE

de l'année 1785.

SI l'on ne conſidère les obſervations météorologiques, que ſous un certain point de vue, ſi l'on n'enviſage pour ainſi dire qu'en maſſe & ſans réflexion cette multiplicité de cauſes accidentelles, momentanées & locales, qui paroiſſent influer ſans ceſſe ſur la conſtitution de l'atmoſphère, & occaſionner les changemens continuels de la température; on peut être tenté de croire que le haſard a plus de part que toute autre choſe aux phénomènes météorologiques, qu'il eſt impoſſible d'y reconnoître des règles certaines, & qu'en conſéquence il n'y a qu'une ſimple curioſité, ſans aucune utilité, à les obſerver. Mais le philoſophe inſtruit, qui examine & approfondit tout avant de prononcer, eſt bien éloigné de penſer ainſi. Plus il a obſervé la Nature, plus il a pénétré ſes ſecrets, & plus il eſt perſuadé que dans le vaſte plan de cet univers il n'eſt point d'effet ſans cauſe, point d'évènement dû au haſard, point de mouvement ſans loix. Les comètes obſervées pendant nombre de ſiècles, & priſes pour des météores fortuits, ont enfin été reconnues pour des planètes, & rangées au nombre des corps réguliers de notre ſyſtème. Il y a à peine une vingtaine d'années que l'on fait les obſervations météorologiques avec l'aſſiduité & l'exactitude néceſſaires; les inſtrumens qu'on y emploie ſe perfectionnent tous les jours. Ne pouvons-nous donc pas eſpérer qu'en redoublant d'attention, en multipliant les obſervations des phénomènes météorologiques, nous parviendrons quelque jour à découvrir certaines loix, certaines périodes dont la connoiſſance ne ſera pas moins utile à la ſociété, que glorieuſe & importante pour la phyſique.

Les obſervations de l'état & des variations de l'atmoſphère pendant le cours de cette année, ont été faites journellement à l'Obſervatoire, & répétées à différentes heures du jour & de la nuit. On va rapporter ci-après les reſultats généraux, qui ſeront

Digitized by Google

suivis d'un tableau particulier pour chaque mois, des circonstances les plus remarquables de la température.

	La plus grande.	*La plus petite.*	*Variation annuelle.*
Hauteur du Baromètre.	*pouc. lign.*	*pouces.*	*pouc. lign.*
	28. 5,2. 11 Avril.	27,0. 29 Mars.	1. 5,2.
Hauteur du Thermomètre.			
Exposé à l'air libre.....	$+24^{d},2.26$ Juill.	$-8^{d},7.1$ Mars.	$32^{d},9.$
Placé au fond des caves.....	$9^{d}\frac{5}{100}$ 27 Déc.	$9^{d}\frac{11}{100}$ 1 Janv.	$\frac{11}{100}$
Variation diurne de l'aiguille aimantée...	15′ 4″ en Mai.	4′ 7″ en Janv.	13′,7.

Jours de pluie..... 107.
Jours de neige.... 16.
Jours de gelée.... 49.

Quantité d'eau tombée dans l'année. 15 pouces 5 lignes,0.

Déclinaison de l'aiguille aimantée, le 1.er Janv. $21^{d}33'$. — le 30 Mai $22^{d}0'$.

TABLEAU MÉTÉOROLOGIQUE.

1785.	BAROMÈTRE.	THERMOMÈTRE.	VENTS dominans.	*CIRCONSTANCES & Remarques.*
JANVIER.	Plus grande hauteur 28 pouc. 3 lign.,8 le 23. Plus petite hauteur 27 pouc. 1 lign.,0 le 2. Huit jours de pluie, 9 lign.,2 d'eau. Un jour de neige.	Plus grande hauteur $+9^{d},1$ le 5. Plus petite hauteur $-2^{d},5$ le 24. Huit jours de gelée.	S. S. O. E. S. E. S. E.	Il y a eu pendant ce mois, quinze jours de brume & de brouillard, il a été épais particulièrement les 12, 13, 20, 21, 23 & 25. Très-mauvais temps les 5, 6 & 9. Le vent a été très-grand les quatre derniers jours du mois, de l'O. au S.
FÉVRIER.	Plus grande hauteur 28 pouc. 5 lign.,0 le 12. Plus petite hauteur 27 pouc. 0 lign.,8 le 22. Trois jours de pluie, 1 pouc. 1 lign.,9. Dix jours de neige.	Plus grande hauteur $+5^{d},5$ le 7. Plus petite hauteur $-7^{d},5$ le 28. Quatorze jours de gelée.	N. N. O. S. S. E. N. N. E.	Il n'y a eu que quatre jours de brume. Les vents ont été très-forts pendant ce mois, particulièrement les 27 & 28.

Digitized by Google

TABLEAU MÉTÉOROLOGIQUE.

1785.	BAROMÈTRE.	THERMOMÈTRE.	VENTS dominans.	CIRCONSTANCES & Remarques.
MARS.	Plus grande hauteur 28pouc. 3lign.,3 le 17. Plus petite hauteur 27pouc. 0lign.,0 le 29. Trois jours de neige. Un jour de grêle.	Plus grande hauteur + 7d,8 le 21. Plus petite hauteur — 8d,7 le 1. Treize jours de gelée.	N. N. E. N.	Il y a eu pendant ce mois dix jours de brume & brouillard. Plusieurs jours de fort beau temps. Une aurore boréale foible le 22.
AVRIL.	Plus grande hauteur 28pouc. 5lign.,2 le 11. Plus petite hauteur 27pouc. 4lign.,0 le 2. Cinq jours de pluie, 6lign.,2 d'eau. Un jour de neige.	Plus grande hauteur + 17d,4 le 18. Plus petite hauteur — 0d,7 le 3. Un jour de gelée.	N. E. N. E. N. N. E.	Il y a eu pendant ce mois sept jours de brume. Généralement très-beau temps, surtout vers la fin du mois.
MAI.	Plus grande hauteur 28pouc. 4lign.,5 le 13. Plus petite hauteur 27pouc. 8lign.,0 le 18. Cinq jours de pluie, 3lign. d'eau.	Plus grande hauteur + 21d,0 le 24. Plus petite hauteur + 5d,8 le 22.	N. N. E. O. S. O. O. N. O.	Il y a eu cinq jours de brume, particulièrement le 5 de ce mois. Aurore boréale le 23. Grande sécheresse pendant tout le mois. Il n'a commencé que le 27 à tomber quelques gouttes d'eau : les jours suivans la pluie a été forte.
JUIN.	Plus grande hauteur 28pouc. 3lign.,8 le 10. Plus petite hauteur 27pouc. 9lign.,1 le 5. Neuf jours de pluie, 22lign.,8 d'eau. Un jour de grêle.	Plus grande hauteur + 22d,2 le 27. Plus petite hauteur + 4d,8 le 24.	O. S. O. N. N. E. N. E.	Il a tonné les 8 & 28.

Digitized by Google

TABLEAU MÉTÉOROLOGIQUE.

1785.	BAROMÈTRE.	THERMOMÈTRE.	VENTS dominans.	*CIRCONSTANCES & Remarques.*
JUILLET.	Plus grande hauteur 28$^{pouc.}$ 3$^{lign.}$,4 le 9. Plus petite hauteur 27$^{pouc.}$,0$^{lign.}$,4 le 29. Quinze jours de pluie, 2$^{pouc.}$ 4$^{lign.}$,5 d'eau.	Plus grande hauteur + 24^{d},2 le 26. Plus petite hauteur + 10^{d},2 le 24.	N. O. O. S. O. S. O.	Il y a eu quelques coups de tonnerre le 20.
AOÛT.	Plus grande hauteur 28$^{pouc.}$ 3$^{lign.}$,7 le 27. Plus petite hauteur 27$^{pouc.}$ 7$^{lign.}$,6 le 3. Douze jours de pluie, 2$^{pouc.}$ 0$^{lign.}$,6 d'eau.	Plus grande hauteur + 20^{d},3 le 2. Plus petite hauteur + 6^{d},3 le 27.	S. S. O. O. S. E.	Le vent a été toujours très-fort pendant ce mois, principalement les 4 & 13. Tonnerre les 2, 3, 4 & 5. Léger brouillard le 23.
SEPT.	Plus grande hauteur 28$^{pouc.}$ 4$^{lign.}$,7 le 29. Plus petite hauteur 27$^{pouc.}$ 3$^{lign.}$,7 le 25. Quinze jours de pluie, 1$^{pouc.}$ 10$^{lign.}$ d'eau.	Plus grande hauteur + 19^{d},5 le 19. Plus petite hauteur + 7^{d},6 le 29.	S. O. S. S. O. S. O.	Le vent a été communément très-fort & des plus violens les 6 & 25. Tonnerre le 23. Sept jours de brume & brouillard.
OCTOBRE.	Plus grande hauteur 28$^{pouc.}$ 4$^{lign.}$,9 le 14. Plus petite hauteur 27$^{pouc.}$ 8$^{lign.}$,3 le 8. Quatorze jours de pluie, 1$^{pouc.}$ 10$^{lign.}$,4 d'eau.	Plus grande hauteur + 15^{d},5 le 12. Plus petite hauteur + 0^{d},3 le 27.	S. S. O. S.	Il y a eu quinze jours de brouillard. Vents violens les 12 & 28.

Digitized by Google

TABLEAU MÉTÉOROLOGIQUE.

1785.	BAROMÈTRE.	THERMOMÈTRE.	VENTS dominans.	*CIRCONSTANCES & Remarques.*
NOVEMB.	Plus grande hauteur 28$^{pouc.}$ 4$^{lign.}$,6 le 17. Plus petite hauteur 27$^{pouc.}$ 1$^{lign.}$,5 le 30. Douze jours de pluie, 2$^{pouc.}$ 1$^{lign.}$,5 d'eau.	Plus grande hauteur + 12^{d},5 le 5. Plus petite hauteur — 1^{d},9 le 18. Deux jours de gelée.	S. O. S. O.	Il y a eu quatorze jours de brouillard. Vents violens les 1, 19, 26 & 28.
DÉCEMB.	Plus grande hauteur 28$^{pouc.}$ 3$^{lign.}$,5 le 18. Plus petite hauteur 27$^{pouc.}$ 0$^{lign.}$,7 le 1. Six jours de pluie, 0$^{pouc.}$ 6$^{lign.}$,9 d'eau, 4 jours de neige.	Plus grande hauteur + 8^{d},9 le 19. Plus petite hauteur — 7^{d},8 le 31. Onze jours de gelée.	S. O. E. S. E. N. E.	Il y a eu dix jours de brouillard. Vent violent les 2, 6 & 29.

Digitized by Google

HISTOIRE CÉLESTE

De l'année 1785.

L'ASTRONOMIE n'attend ſa perfection que du temps, elle eſt l'élève des ſiècles. Le génie, par des découvertes heureuſes, peut bien à la vérité hâter quelquefois la marche lente de ſes progrès; mais il a beau faire, s'il n'a derrière lui une longue ſuite d'obſervations ſur laquelle il puiſſe s'appuyer & conſtruire, ſes efforts ſeront inutiles, il ne bâtira que des ſyſtèmes.

Chaque année n'ajoute communément que peu de choſe aux lumières de l'Aſtronomie; mais ce peu de choſe, en s'accumulant, devient au bout d'un ou pluſieurs ſiècles, la baſe & le fondement de quelque grande & belle théorie. Il eſt des temps plus heureux que d'autres, où la rencontre de certaines circonſtances, l'apparition de quelque phénomène particulier, augmentent tout-à-coup nos connoiſſances, découvrent ou confirment quelque vérité nouvelle ou ſoupçonnée. Notre ſiècle ſans doute a été l'un des plus favoriſés de ce côté: deux paſſages de Vénus ſur le Soleil, dans l'eſpace de neuf années, ont enfin fixé la parallaxe du Soleil, l'un des élémens les plus importans de l'Aſtronomie; mais s'il reſte encore quelque doute ſur cette détermination intéreſſante, ce ne ſera qu'en 1874, c'eſt-à-dire, au bout de cent cinq ans que le retour du même phénomène pourra en procurer la vérification. Une nouvelle planète vient, en 1781, d'être ajoutée à notre ſyſtème; quatre années d'obſervations nous ont fourni une ébauche de ſa théorie: la révolution de ce nouvel aſtre paroît être de quatre-vingt-trois ans; ce ne ſera donc que dans quatre ou cinq ſiècles, qu'après l'avoir obſervé aſſiduement pluſieurs fois dans les mêmes points de ſon orbite, l'on pourra parvenir à une exacte connoiſſance de ſes mouvemens. Plus de quarante comètes ont été aperçues & obſervées depuis quatre-vingt-cinq ans, & leur retour ne doit avoir lieu au plus tôt que dans le ſiècle prochain. En attendant, preſque chaque année nous en

en fait découvrir quelques nouvelles au retour desquelles nos successeurs devront également veiller, pour parvenir à déterminer la durée de leur révolution. Si cette connoissance précieuse est réservée aux siècles futurs, au moins est-il vrai qu'ils nous en seront redevables, puisque ce sont nos observations comparées aux leurs qui serviront de base; ainsi l'on pourroit en quelque sorte comparer les travaux des Astronomes, à ceux de ces respectables pères de famille, qui travaillent & n'amassent que pour la jouissance de leurs enfans & pour enrichir leur postérité.

On voit donc combien peut devenir intéressante, précieuse même un jour, pour les progrès de l'Astronomie, la collection suivie d'observations astronomiques que nous commençons à rassembler. Dans le cours de cette année, par exemple, nous avons déterminé près de cent quatre-vingts lieux de planète, & fixé l'erreur de la théorie dans les divers points de leurs orbites, où l'on avoit peu coutume de les suivre auparavant. Cette vérification répétée pendant plusieurs années, à chaque révolution & dans les mêmes points, ne peut manquer de nous conduire à une connoissance complète des mouvemens célestes, de leurs inégalités, & des équations par lesquelles on peut les représenter. Dès-lors on conviendra que l'Astronomie nous sera redevable de quelque chose, & beaucoup plus, peut-être, que si nous eussions fait une découverte même brillante, mais souvent peu utile aux progrès de la science. C'est cette persuasion qui ne cesse d'animer le zèle de nos coopérateurs (1), & leur donne la force, le courage & la patience, en s'adonnant entièrement à la pratique de l'Astronomie, de s'exposer aux fatigues de l'observation & des veilles, & de surmonter l'ennui & les difficultés des calculs astronomiques, dont les tableaux suivans vont offrir les résultats.

(1) M.rs de Villeneuve & Ruelle, Élèves.

LE SOLEIL.

Il n'y a eu cette année aucune éclipse de Soleil visible à Paris: celle du 9 Février n'a eu lieu que pour l'Afrique & l'Asie; elle a dû être centrale & totale au Congo: celle du 4 Août a dû être centrale & annulaire dans l'Amérique septentrionale.

Il a paru de temps en temps quelques taches sur le disque du Soleil, mais elles ont été peu considérables.

Au mois de Mars, on a observé

La hauteur du bord supérieur du Soleil, le 21... 41d 57′ 50″,2.

D'où l'on conclud { la déclinaison vraie du centre. 0. 31. 0, *bor.* / l'heure de l'équinoxe, le 19 à 16h 34. 49.

Au mois de Juin, on a déterminé

La hauteur solsticiale du centre du Soleil..... 64. 37. 47.

D'où l'on conclud

L'obliquité de l'écliptique apparente..... 23. 27. 59.

Au mois de Septembre, on a observé

La hauteur du bord supérieur du Soleil, le 22... 41d 31′ 36″,8.

D'où l'on conclud { la déclinaison vraie du centre. 0. 4. 26 *bor.* / l'heure de l'équinoxe, le 22 à 4h 33. 8.

On a déterminé, par observation, le passage du centre du Soleil dans le parallèle de plusieurs Étoiles, ainsi qu'on le voit dans le Tableau suivant.

				Différ. d'asc. dr.
Passage du Soleil dans le parallèle de.....	α de l'Hydre	le 27 Févr.	à 21h 10′ 30″	157d 29′ 41″0.
	i d'Orion	4 Mars	5. 53. 30	95. 24. 22,0.
	β de l'Éridan	5 Mars	19. 30. 26	" " "
	e d'Orion	7 Avril	5. 58. 56	150. 39. 14,0.
	δ du Lion	16 Avril	2. 49. 33	130. 21. 32,0.
	Arcturus	20 Mai	21. 57. 40	" " "
	π du Serpent	16 Juin	12. 33. 59	" " "
	γ d'Hercule	24 Juillet	10. 30. 7	118. 25. 29,0.
	Sirius	6 Nov.	17. 41. 55	" " "
	β de la Baleine	16 Nov.	22. 7. 3	135. 2. 38,6.
	λ du Lièvre	5 Déc.	7. 16. 3	191. 5. 50,5.

Digitized by Google

VÉNUS.

Cette Planète a achevé, dans le courant de cette année, deux révolutions moins quatre signes treize degrés trois quarts autour du Soleil, & s'eſt trouvée

DANS SON NŒUD		EN CONJ.	Dans ſa plus grande digr.		STATIONNAIRE.		ÉCLIPSÉE par la LUNE.
Deſcend.	Aſcendant.	Inférieure.	Occident.	Orientale.			
2 Juin.	23 Sept.	29 Mai.	2 Août.	28 Mars.	8 Mai.	19 Juin.	12 Avril.

On a déterminé, par obſervation, quarante-deux lieux de cette Planète, qui, comparés aux Tables, ont donné les réſultats ſuivans :

1785.	TEMPS VRAI.	ÉTOILE comparée.	Poſition ſuppoſée de l'ÉTOILE.		Lieu obſervé de VÉNUS.		Erreur des Tables.	
			Aſcenſ. droite.	Déclinaiſon.	Longitude.	Latitude.	En long.	En latit.
	H. M. S.		D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.	M. S.
Janv. 12	2. 34. 22,0	ι Baleine.	37. 18. 1,0	12. 47. 31,0 A.	330. 43. 5,0	0. 32. 30 A.	+0. 24.	+0. 6
Mars 1	2. 44. 48,0	o du Lion.	142. 25. 39,0	10. 51. 41,0 B.	26. 34. 5,0	1. 25. 13 B	1. 4	0. 22
2	2. 45. 7,0	α Écreviſſe.	131. 41. 11,0	12. 40. 43,0	27. 29. 13,0	1. 30. 12	0. 49	0. 25
3	2. 45. 23,3	*Idem.*	131. 41. 11,0	12. 40. 43,0	28. 24. 11,0	1. 35. 15	0. 33	0. 28
Avril 5	2. 52. 10,0	ζ du Lion.	151. 11. 4,0	24. 28. 47,0	61. 2. 42,0	4. 10. 6	0. 32	0. 27
7	2. 51. 45,0	ι du Lion.	143. 24. 48,0	24. 25. 13,0	62. 41. 1,0	4. 17. 32	0. 29	0. 25
9	2. 51. 8,5	*Idem.*	143. 24. 48,0	24. 25. 13,0	64. 15. 18,0	4. 24. 33	0. 42	0. 38
10	2. 50. 41,0	*Idem.*	143. 24. 48,0	24. 25. 13,0	65. 2. 4,0	4. 27. 30	0. 30	0. 24
11	2. 48. 48,0	μ du Lion.	145. 8. 18,0	24. 25. 13,0	66. 10. 25,0	4. 33. 29	0. 45	0. 29
15	2. 47. 49,4	*Idem.*	145. 8. 18,0	24. 25. 13,0	68. 36. 28,0	4. 41. 44	0. 38	0. 54
17	2. 46. 8,0	*Idem.*	145. 8. 18,0	24. 25. 13,0	69. 54. 59,0	4. 46. 10	0. 28	0. 54
25	2. 35. 28,5	α Cour.	231. 24. 32,0	27. 26. 43,0	74. 15. 49,0	4. 55. 5	0. 12	0. 33
29	2. 27. 18,6	*Idem.*	231. 24. 32,0	27. 26. 43,0	75. 48. 45,0	4. 53. 32	—0. 9	0. 41
Mai 1	2. 22. 21,5	ε Bouvier.	218. 54. 45,2	27. 59. 8,0	76. 24. 32,0	4. 50. 41	0. 8	0. 32
4	2. 13. 47,1	*Idem.*	218. 54. 49,2	27. 59. 8,0	77. 2. 40,0	4. 43. 46	0. 19	0. 28

Digitized by Google

1785	TEMPS VRAI.	ÉTOILE comparée.	Position supposée de l'ÉTOILE. Ascens. droite.	Déclinaison.	Lieu observé de VÉNUS. Longitude.	Latitude.	Erreur des Tables. En long.	En latit.
	H. M. S.		D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.	M. S.
Mai 5	2. 10. 38,5	α Cour.	231. 24. 33,5	27. 26. 40,5 B.	77. 11. 14,0	4. 40. 42 B.	+0. 1	+0. 31
6	2. 7. 17,3	*Idem.*	231. 24. 33,5	27. 26. 40,5	77. 17. 53,0	4. 37. 5	—0. 3	0. 36
8	2. 0. 4,0	*Idem.*	231. 24. 33,5	27. 26. 40,5	77. 24. 5,0	4. 28. 41	+0. 3	0. 40
9	1. 56. 9,0	*Idem.*	231. 24. 33,5	27. 26. 40,5	77. 23. 24,0	4. 23. 17	—0. 15	0. 35
10	1. 52. 7,2	*Idem.*	231. 24. 33,5	27. 26. 40,5	77. 20. 39,0	4. 18. 15	0. 5	0. 26
11	1. 47. 53,6	*Idem.*	231. 24. 33,5	27. 26. 40,5	77. 15. 35,0	4. 12. 28	0. 16	0. 35
12	1. 43. 20,5	*Idem.*	231. 24. 33,5	27. 26. 40,5	77. 7. 55,0	4. 5. 53	0. 4	0. 26
14	1. 34. 4,4	*Idem.*	231. 24. 33,5	27. 26. 40,5	76. 45. 19,5	3. 51. 23	0. 26	0. 17
15	1. 29. 6,8	*Idem.*	231. 24. 33,5	27. 26. 40,5	76. 30. 27,0	3. 43. 42 B.	0. 34	0. 35
Juin 9	22. 49. 35,9	γ d'Herc.	243. 7. 27,0	19. 39. 55,0	63. 1. 31,0	1. 40. 50 A.	0. 23	+0. 12
10	22. 44. 1,3	*Idem.*	243. 7. 27,0	19. 39. 55,0	62. 38. 18,0	1. 53. 13	0. 28	0. 31
11	22. 33. 55,0	*Idem.*	243. 7. 27,0	19. 39. 55,0	62. 17. 13,0	2. 4. 10	0. 34	0. 4
12	22. 33. 19,6	*Idem.*	243. 7. 27,0	19. 39. 55,0	62. 58. 59,0	2. 14. 47	0. 6	+0. 11
23	21. 45. 27,2	α d'Herc.	256. 13. 13,5	14. 32. 5,0	62. 7. 13,0	2. 42. 25	0. 8	—0. 22
Juill. 24	20. 49. 0,0	γ d'Hercule	243. 7. 27,0	19. 39. 55,0	77. 51. 36,0	4. 6. 26	+0. 57	0. 9
2	20. 48. 32,0	*Idem.*	243. 7. 27,0	19. 39. 55,0	78. 41. 54,0	4. 3. 50,5	0. 28	0. 5
Août 6	20. 47. 13,5	*Arcturus.*	211. 29. 19,2	20. 18. 18,0	89. 26. 37,0	3. 25. 37 A.	—1. 40	0. 7
1	20. 48. 47,2	*Idem.*	211. 29. 19,2	20. 18. 18,0	94. 16. 19,7	3. 6. 38	+1. 51	+0. 28
3	20. 49. 14,0	*Idem.*	211. 29. 19,2	20. 18. 18,0	95. 15. 35,0	3. 2. 11	1. 48	+0. 6
10	20. 51. 19,1	*Idem.*	211. 29. 19,2	20. 18. 18,0	99. 14. 53,0	2. 45. 11,0	1. 18	—0. 4
19	20. 53. 15,0	ε Pégase.	318. 2. 36,0	18. 53. 51,0	102. 17. 43,0	2. 32. 11	0. 41	+0. 21
26	20. 58. 48,6	*Idem.*	318. 2. 36,0	18. 53. 51,0	109. 37. 47,0	2. 0. 13	0. 49	—0. 13
29	21. 1. 29,0	*Idem.*	318. 2. 36,0	18. 53. 51,0	112. 50. 45,0	1. 46. 55	1. 7	—0. 9
Oct. 23	21. 52. 24,3	α Baleine.	43. 47. 5,1	3. 14. 43,0°	176. 27. 38,0	1. 28. 46 B.	0. 56	+0. 23
Nov. 15	22. 5. 26,8	Rigel.	76. 4. 31,9	8. 27. 27,0	204. 39. 32,0	1. 45. 44	0. 46	+0. 8
28	22. 11. 57,8	γ Éridan.	57. 1. 28,6	14. 7. 36,6	220. 47. 57,0	1. 36. 30	1. 7	—0. 5
Déc. 7	22. 17. 9,8	*Syrius.*	98. 55. 42,5	16. 25. 32,7 A.	232. 1. 20,0	1. 23. 54	0. 41	+0. 22

Digitized by Google

MARS.

Cette Planète a parcouru, dans le courant de cette année, un arc de 212d 5′ autour du Soleil, & s'eſt trouvée

EN QUADRATURE.	DANS SON NŒUD aſcendant.	STATIONNAIRE.	EN OPPOSITION.
14 Août.	24 Octobre.	21 Octobre.	27 Novembre.

On a déterminé, par obſervation, vingt-deux lieux de cette Planète, qui, comparés aux Tables, ont donné les réſultats ſuivans:

1785.	TEMPS VRAI.	ÉTOILE comparée.	Poſition ſuppoſée de l'ÉTOILE. Aſcenſ. droite.	Poſition ſuppoſée de l'ÉTOILE. Déclinaiſon.	Lieu obſervé de MARS. Longitude.	Lieu obſervé de MARS. Latitude.	Erreur des Tables. En long.	Erreur des Tables. En latit.
	H. M. S.		D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.	M. S.
Août 10	17. 47. 32,0	ε Pégaſe.	318. 2. 35,5	18. 53. 51,4 B.	50. 5. 36,0	1. 49. 17 A.	— 1. 53	— 0. 24
11	17. 46. 4,7	γ Dauphin.	309. 11. 20,8	1. 21. 58,7	50. 41. 5,0	1. 48. 53	1. 11	0. 17
16	17. 38. 49,0	α Flèche.	292. 38. 4,0	17. 32. 10,4	53. 31. 19,0	1. 45. 45	1. 36	0. 23
19	17. 34. 23,5	Idem.	292. 38. 4,0	17. 32. 10,4	55. 12. 9,0	1. 43. 44	2. 5	0. 23
26	17. 23. 51,3	ε Pégaſe.	318. 2. 35,5	18. 53. 51,4	58. 55. 23,0	1. 38. 18	2. 19	0. 25
27	17. 22. 18,7	Idem.	318. 2. 35,5	18. 53. 51,4	59. 26. 18,0	1. 37. 23	2. 12	0. 26
Oct. 23	15. 0. 6,8	α Bélier.	28. 47. 28,5	22. 26. 49,6	75. 14. 54,0	0. 2. 41	3. 27	0. 44
25	14. 51. 48,8	Idem.	28. 47. 28,5	22. 26. 49,6	75. 6. 35,0	0. 2. 42 B.	3. 43	+ 0. 43
26	14. 47. 35,1	Idem.	28. 47. 28,5	22. 26. 49,6	75. 1. 39,0	0. 5. 30	3. 13	0. 44
Nov. 7	13. 50. 36,8	Idem.	28. 47. 28,5	22. 26. 49,6	72. 48. 52,0	0. 40. 42	4. 33	0. 47
15	13. 7. 18,4	Alcyone.	53. 42. 20,4	23. 26. 0,0	70. 21. 6,0	1. 5. 5	4. 33	0. 44
16	13. 1. 38,9	Idem.	53. 42. 20,4	23. 26. 0,0	70. 0. 13,0	1. 8. 10	4. 18	0. 47
17	12. 55. 56,4	Idem.	53. 42. 20,4	23. 26. 0,0	69. 39. 2,0	1. 11. 2	4. 43	0. 38
21	12. 32. 47,7	Idem.	53. 42. 20,4	23. 26. 0,0	68. 10. 50,0	1. 22. 42	4. 10	0. 43
28	11. 51. 15,4	Idem.	53. 42. 20,4	23. 26. 0,0	65. 31. 15,0	1. 41. 21	4. 12	0. 14
Déc. 7	10. 58. 43,2	δ Gémeaux	106. 59. 21,0	22. 21. 31,0	62. 21. 12,0	2. 0. 54	4. 15	0. 32
9	10. 47. 18,7	α Bélier.	28. 47. 29,6	22. 26. 54,7	61. 44. 21,0	2. 4. 41	4. 9	0. 45
10	10. 41. 39,0	Idem.	28. 47. 29,6	22. 26. 54,7	61. 26. 51,0	2. 6. 25	4. 4	0. 48
11	10. 35. 59,0	ζ Taureau.	81. 13. 27,3	20. 59. 48,0	61. 9. 47,0	2. 7. 49	4. 15	0. 35
12	10. 30. 29,4	α Bélier.	28. 47. 29,6	22. 26. 54,7	60. 53. 48,0	2. 9. 34	3. 58	0. 49
13	10. 23. 58,5	Idem.	28. 47. 29	22. 29. 54,7	60. 38. 23,0	2. 10. 56	3. 53	0. 43

Digitized by Google

Les circonſtances favorables dans leſquelles les obſervations précédentes ont été faites, procurent les réſultats ſuivans :

Quadrature de Mars, le 14 Août, à....	$0^h\ 14'\ 6''{,}0$ *t. vr.*
Longitude géoc. de Mars en quadrature..	$1^s\ 21^d\ 58.\ 55{,}0.$
Paſſage de Mars par ſon nœud aſcendant, le 24 Octobre, à.....	$14^h\ 54.\ 31{,}0$ *t. vr.*
Lieu du nœud aſcendant de Mars.....	$1.\ 17^d\ 48.\ 0{,}0.$
Oppoſition de Mars, le 27 Novembre, à..	$6^h\ 24.\ 28{,}7$ *t. vr.*
Longitude en oppoſition.....	$2.\ 5^d\ 59.\ 22{,}0.$
Latitude en oppoſition.....	$1.\ 38.\ 5{,}0$ *bor.*

JUPITER.

Cette Planète a parcouru, dans le courant de cette année, un arc de $33^d\ 3'\frac{1}{3}$ autour du Soleil, & s'eſt trouvée

EN conjonction.	EN QUADRATURE.		EN oppoſition.	STATIONNAIRE.	
10 Mars.	4 Juillet.	26 Déc.	1 Octobre.	3 Août.	29 Nov.

On a déterminé, par obſervation, quarante-huit lieux de cette Planète, qui, comparés aux Tables, ont donné les réſultats ſuivans :

1785.	TEMPS VRAI	ÉTOILE comparée.	Poſition ſuppoſée de l'ÉTOILE. Aſcenſ. droite.	Déclinaiſon.	Lieu obſervé de JUPITER. Longitude.	Latitude.	Erreur des Tables. En long.	En latit.
	H. M. S.		*D. M. S.*	*D. M. S.*	*D. M. S.*	*D. M. S.*	*M. S.*	*M. S.*
Avril 28	21. 42. 19,2	ϒ Vierge.	187. 42. 45,0	0. 16. 13,0 A.	2. 19. 3,1	1. 6. 32 A.	—4. 34	+0. 12
Mai 1	21. 33. 15,2	ν Vierge.	182. 14. 24,0	0. 3 1. 30,0 B.	2. 58. 9,0	1. 6. 59	4. 42	—0. 5
3	21. 27. 7,8	*Idem.*	182. 14. 24,0	0. 3 1. 30,0	3. 23. 6,0	1. 7. 11	5. 12	—0. 9
7	21. 14. 45,6	ζ Vierge.	200. 57. 9,0	0. 10. 19,0	4. 13. 6,0	1. 7. 46	5. 13	—0. 9
9	21. 8. 2,2	*Idem.*	200. 57. 9,0	0. 10. 19,0	4. 38. 3,0	1. 8. 15	4. 49	+0. 2
10	21. 5. 23,2	*Idem.*	200. 57. 9,0	0. 10. 19,0	4. 50. 4,0	1. 8. 22	4. 58	—0. 1

Digitized by Google

1785.	TEMPS VRAI	ÉTOILE comparée.	Position supposée de l'ÉTOILE. Ascens. droite.	Déclinaison.	Lieu observé de JUPITER. Longitude.	Latitude.	Erreur des Tables. En long.	En latit.
	H. M. S.		D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.	M. S.
Mai 11	21. 2. 12,5	ζ Vierge.	200. 57. 9,0	0. 30. 17,0 B.	5. 2. 0,0	1. 8. 23 A.	— 5. 7	— 0. 12
12	20. 59. 3,6	*Idem.*	200. 57. 9,0	0. 30. 17,0	5. 1. 16,0	1. 8. 34	4. 51	— 0. 8
13	20. 54. 53,5	*Idem.*	200. 57. 9,0	0. 30. 17,0	5. 0. 26,0	1. 9. 3	4. 38	+ 0. 11
14	20. 52. 37,0	*Idem.*	200. 57. 9,0	0. 30. 17,0	4. 59. 37. 33,0	1. 8. 51	5. 21	— 0. 12
20	20. 33. 3,6	*Idem.*	200. 57. 9,0	0. 30. 17,0	6. 46. 40,0	1. 9. 48	5. 24	— 0. 15
21	20. 29. 47,5	*Idem.*	200. 57. 9,0	0. 30. 17,0	6. 38. 0,0	1. 10. 13	5. 18	— 0. 1
22	20. 26. 27,2	*Idem.*	200. 57. 9,0	0. 30. 17,0	7. 9. 15,0	1. 10. 32	5. 10	+ 0. 10
23	20. 23. 6,7	*Idem.*	200. 57. 9,0	0. 30. 17,0	7. 20. 21,0	1. 10. 34	5. 5	+ 0. 11
Juin 12	19. 13. 31,2	☽ Ophiucus.	264. 17. 48,4	2. 48. 10,0	10. 38. 9,0	1. 14. 43	5. 24	— 0. 2
13	19. 9. 54,7	*Idem.*	264. 17. 48,4	2. 41. 10,0	10. 46. 40,0	1. 14. 59	5. 53	0. 0
25	18. 25. 54,8	*Idem.*	264. 17. 48,4	2. 41. 10,0	12. 19. 23,5	1. 17. 42	6. 43	0. 13
Août 3	15. 58. 2,8	β Ophiucus	263. 13. 45,7	4. 40. 15,5	14. 36. 53,0	1. 18. 42	6. 29	0. 1
4	15. 54. 10,9	*Idem.*	263. 13. 45,7	4. 40. 15,5	14. 36. 37,0	1. 18. 54	6. 37	0. 7
5	15. 50. 19,5	*Idem.*	263. 13. 45,7	4. 40. 15,5	14. 36. 24,0	1. 19. 16	6. 35	0. 1
19	14. 56. 10,9	♃ Serpent.	281. 23. 55,1	3. 56. 28,0	14. 9. 49,0	1. 22. 48	6. 38	+ 0. 15
20	14. 52. 23,0	*Idem.*	281. 23. 55,1	3. 56. 28,0	14. 6. 38,0	1. 22. 57	5. 45	+ 0. 23
23	14. 40. 35,2	*Idem.*	281. 23. 55,1	3. 56. 28,0	13. 55. 33,0	1. 23. 40	6. 33	+ 0. 24
28	14. 21. 3,4	*Idem.*	281. 23. 55,1	3. 56. 28,0	13. 34. 0,0	1. 24. 59	6. 13	— 0. 14
Sept. 1	14. 5. 15,4	*Idem.*	281. 23. 55,1	3. 56. 28,0	13. 12. 56,0	1. 25. 44	6. 38	0. 21
13	13. 17. 28,4	♂ l'Aigle.	288. 40. 40,	2. 42. 13,3	11. 56. 39,0	1. 27. 42	6. 41	0. 22
Oct. 1	12. 4. 48,2	☽ Baleine.	38. 3. 51,0	2. 19. 53,0	9. 38. 5,0	1. 28. 46	6. 37	0. 30
11	11. 22. 52,8	*Idem.*	38. 3. 51,0	2. 19. 53,0	8. 18. 8,0	1. 28. 15	6. 43	0. 30
12	11. 18. 43,4	*Idem.*	38. 3. 51,0	2. 19. 53,0	8. 10. 32,0	1. 28. 12	6. 42	0. 27
13	11. 14. 33,8	*Idem.*	38. 3. 51,0	2. 19. 53,0	8. 2. 42,0	1. 28. 0	6. 42	0. 34
16	11. 1. 59,2	*Idem.*	38. 3. 51,0	2. 19. 53,0	7. 40. 29,0	1. 27. 39	6. 29	0. 33
25	10. 24. 52,1	α Lien ♌.	27. 44. 54,0	1. 43. 41,5	6. 37. 14,0	1. 26. 6	6. 51	0. 46
26	10. 19. 51,5	*Idem.*	27. 44. 54,0	1. 43. 41,5	6. 31. 26,0	1. 26. 0	6. 42	0. 42
27	10. 15. 35,2	*Idem.*	27. 44. 54,0	1. 43. 41,5	6. 24. 58,0	1. 25. 43	6. 52	0. 48
28	10. 11. 22,8	*Idem.*	27. 44. 54,0	1. 43. 41,5	6. 18. 57,0	1. 25. 39	6. 48	0. 40
29	10. 7. 19,7	*Idem.*	27. 44. 54,0	1. 43. 41,5	6. 13. 22,0	1. 25. 30	6. 33	0. 37
30	10. 2. 53,5	*Idem.*	27. 44. 54,0	1. 43. 41,5	6. 7. 49,0	1. 25. 21	6. 17	0. 34
Nov. 15	8. 54. 30,6	♂ d'Orion.	80. 16. 49,6	0. 28. 5,5	4. 59. 30,0	1. 31. 44	5. 46	0. 17
16	8. 50. 15,2	*Idem.*	80. 16. 49,6	0. 28. 5,5	4. 56. 54,0	1. 31. 15	5. 42	0. 29
17	8. 45. 55,0	*Idem.*	80. 16. 49,6	0. 28. 5,5	4. 54. 47,0	1. 31. 12	5. 23	0. 16
28	7. 58. 32,3	*Idem.*	80. 16. 49,6	0. 28. 5,5	4. 40. 44,0	1. 28. 13	5. 10	0. 5

Digitized by Google

1785.	TEMPS VRAI.	ÉTOILE comparée.	Position supposée de l'ÉTOILE. Ascens. droite.	Déclinaison.	Lieu observé de JUPITER. Longitude.	Latitude.	Erreur des Tables. En long.	En latit.
	H. M. S.		D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.	M. S.
Déc. 1	7. 45. 37,1	♌ d'Orion.	80. 16. 56,7	0. 28. 8,4 A.	4. 41. 32,0	1. 27. 4 A.	—4. 47	—0. 20
5	7. 38. 26,5	*Idem.*	80. 16. 56,7	0. 28. 8,4	4. 44. 38,0	1. 25. 42	5. 14	0. 32
7	7. 19. 52,6	*Idem.*	80. 16. 56,7	0. 28. 8,4	4. 47. 55,0	1. 25. 7	5. 4	0. 31
9	7. 1 L. 20,6	α Nœud X.	27. 45. 18,4	L. 43. 37,4 B.	4. 51. 53,0	1. 24. 28	4. 59	0. 30
10	7. 7. 4,0	*Idem.*	27. 45. 18,4	L. 43. 37,4	4. 53. 56,0	1. 24. 15	5. 8	0. 28
13	6. 58. 33,7	♌ d'Orion.	80. 16. 56,7	0. 28. 8,4	4. 58. 58,0	1. 23. 43	5. 14	0. 23
13	6. 54. 20,2	*Idem.*	80. 16. 56,7	0. 28. 8,4	5. 2. 9,0	1. 23. 26	4. 52	0. 23

Les observations du mois d'Octobre, donnent encore le résultat suivant:

Opposition de Jupiter, 1.er Octobre, à. . . . . 22h 9′ 44″ *temps vrai.*

Longitude en opposition. . . . . 0s 9d 34. 35.

Latitude en opposition. . . . . 1. 38. 39.

SATURNE.

Cette Planète a parcouru, dans le courant de cette année, un arc de 12 degrés autour du Soleil, & s'est trouvée

EN conjonction.	EN QUADRATURE.		EN opposition.	STATIONNAIRE.	
15 Janv.	24 Avril.	21 Octobre.	24 Juillet.	13 Mai.	3 Oct.

On a déterminé, par observation, trente-trois lieux de cette Planète, qui, comparés aux Tables, ont donné les résultats suivans:

Digitized by Google

1785.	TEMPS VRAI.	ÉTOILES comparées.	Position supposée de l'ÉTOILE. Ascens. droite.	Déclinaison.	Lieu observé de SATURNE. Longitude.	Latitude.	Erreur des Tables. En long.	En latit.
	H. M. S.		D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.	M. S.
Juin 11	15. 6. 14,7	β Scorpion.	228. 15. 27,5	19. 12. 21,0 A.	304. 45. 6,0	0. 25. 0 A.	—10. 4	—0. 44
12	15. 1. 56,2	*Idem.*	238. 15. 27,5	19. 12. 21,0	304. 42. 36,0	0. 25. 13	10. 2	0. 37
13	14. 57. 37,2	*Idem.*	238. 15. 27,5	19. 12. 21,0	304. 39. 52,0	0. 25. 10	10. 5	0. 47
Juill. 18	12. 24. 58,8	μ Sagittaire.	270. 14. 47,0	21. 5. 58,0	302. 29. 46,0	0. 29. 18	9. 2	0. 22
22	12. 7. 51,9	*Idem.*	270. 14. 47,0	21. 5. 58,0	302. 12. 13,0	0. 29. 41	8. 55	0. 21
23	12. 3. 35,8	*Idem.*	270. 14. 47,0	21. 5. 58,0	302. 7. 38,0	0. 29. 43	9. 1	0. 25
25	11. 55. 6,4	*Idem.*	270. 14. 47,0	21. 5. 58,0	301. 58. 46,0	0. 29. 57	9. 2	0. 21
26	11. 50. 51,0	*Idem.*	270. 14. 47,0	21. 5. 58,0	301. 54. 22,0	0. 30. 1	9. 0	0. 21
28	11. 42. 26,7	*Idem.*	270. 14. 47,0	21. 5. 58,0	301. 45. 35,0	0. 30. 8	8. 54	0. 25
31	11. 29. 54,8	*Idem.*	270. 14. 47,0	21. 5. 58,0	301. 32. 21,0	0. 30. 29	8. 54	0. 18
Août 1	11. 25. 37,8	*Idem.*	270. 14. 46,7	21. 5. 57,9 B.	301. 27. 45,0	0. 30. 24	9. 9	0. 29
3	11. 17. 23,6	*Idem.*	270. 14. 46,7	21. 5. 57,9	301. 19. 12,0	0. 30. 35	9. 2	0. 26
4	11. 13. 15,0	*Idem.*	270. 14. 46,7	21. 5. 57,9	301. 15. 3,0	0. 30. 45	8. 52	0. 21
5	11. 9. 6,4	*Idem.*	270. 14. 46,7	21. 5. 57,9	301. 10. 41,0	0. 30. 54	8. 55	0. 17
7	11. 0. 54,7	*Idem.*	270. 14. 46,7	21. 5. 57,9	301. 2. 22,0	0. 31. 0	8. 46	0. 19
9	10. 52. 41,5	*Idem.*	270. 14. 45,7	21. 5. 57,9	300. 53. 27,0	0. 30. 53	9. 19	0. 14
10	10. 48. 39,7	*Idem.*	270. 14. 45,7	21. 5. 57,9	300. 49. 48,0	0. 31. 14	8. 49	0. 19
11	10. 44. 36,2	*Idem.*	270. 14. 45,7	21. 5. 57,9	300. 45. 40,0	0. 31. 19	8. 50	0. 17
13	10. 40. 33,1	*Idem.*	270. 14. 45,7	21. 5. 57,9	300. 41. 56,0	0. 31. 35	8. 31	0. 4
17	10. 20. 31,5	*Idem.*	270. 14. 45,7	21. 5. 57,9	300. 22. 23,0	0. 31. 36	8. 28	0. 18
19	10. 12. 35,2	*Idem.*	270. 14. 45,7	21. 5. 57,9	300. 15. 16,0	0. 31. 49	8. 5	0. 18
20	10. 8. 40,1	*Idem.*	270. 14. 44,7	21. 5. 57,9	300. 10. 58,0	0. 31. 45	8. 40	0. 19
23	9. 56. 52,3	*Idem.*	270. 14. 44,7	21. 5. 57,9	300. 0. 6,0	0. 31. 51	8. 51	0. 17
26	9. 45. 12,3	*Idem.*	270. 14. 44,7	21. 5. 57,9	299. 50. 8,0	0. 31. 55	8. 44	0. 16
27	9. 41. 20,5	*Idem.*	270. 14. 44,7	21. 5. 57,9	299. 46. 57,0	0. 32. 7	8. 41	0. 8
28	9. 37. 29,2	*Idem.*	270. 14. 44,7	21. 5. 57,9	299. 44. 4,0	0. 32. 11	8. 31	0. 7
30	9. 25. 57,5	*Idem.*	270. 14. 44,7	21. 5. 57,9	299. 37. 56,0	0. 32. 25	8. 23	+0. 1
31	9. 25. 57,5	*Idem.*	270. 14. 44,2	21. 5. 57,9	299. 35. 18,0	0. 32. 34	8. 3	+0. 6
Oct. 26	6. 0. 7,9	β Lièvre.	79. 46. 36,7	20. 56. 46,1 A.	299. 14. 34,0	0. 33. 31	7. 54	—0. 54
27	5. 56. 27,7	*Idem.*	79. 46. 36,7	20. 56. 46,1	299. 16. 57,0	0. 33. 37	7. 55	0. 49
30	5. 45. 22,8	*Idem.*	79. 46. 36,7	20. 56. 46,1	299. 24. 55,0	0. 33. 39	7. 40	0. 51
Nov. 15	4. 45. 9,8	δ Lièvre.	85. 31. 49,7	20. 54. 15,6	300. 19. 40,0	0. 34. 24	7. 52	0. 25
16	4. 41. 18,0	*Idem.*	85. 31. 49,7	20. 54. 15,6	300. 23. 35,0	0. 34. 7	8. 7	0. 41

Les observations du mois de Juillet, donnent encore le résultat suivant :

Opposition de Saturne, le 24 Juillet à.. $5^h\ 55'\ 32''$ *temps vrai.*
Longitude en opposition..... 10^{sf} 2^d 4. 23.
Latitude en opposition..... 0. 29. 50 *australe.*

Mém. 1784.

Digitized by Google

HERSCHEL.

Cette Planète, connue depuis peu, dont la révolution d'environ quatre-vingt-trois ans, n'a parcouru dans le courant de cette année, qu'un arc de $4^d\ 30'\ \frac{1}{2}$ autour du Soleil : elle s'eſt trouvée en oppoſition le 3 Janvier.

On a déterminé, par obſervation, onze lieux de cette Planète, qui, comparés aux Tables conſtruites ſur les élémens déterminés par M. de la Place, ont donné les réſultats ſuivans :

1785.	TEMPS VRAI.	ÉTOILE comparée.	Poſition ſuppoſée de l'ÉTOILE. Aſcenſ. droite.	Déclinaiſon.	Lieu obſervé de HERSCHEL. Longitude.	Latitude.	Erreur des Tables En long.	En lat.
	H. M. S.		*D. M. S.*	*D. M. S.*	*D. M. S.*	*D. M. S.*	*M. S.*	*M. S.*
Janv. 11	11. 25. 1,0	♌ Gémeaux	106. 49. 31,0	22. 21. 39,0 B.	104. 2. 48,0	0. 25. 38 B.	—0. 44	+0. 4
12	11. 20. 31,2	*Idem.*	106. 49. 31,0	22. 21. 39,0	104. 0. 10,0	0. 25. 36	0. 47	0. 1
16	11. 2. 41,5	*Idem.*	106. 49. 31,0	22. 21. 39,0	103. 50. 18,0	0. 25. 39	0. 31	0. 4
17	10. 58. 16,7	*Idem.*	106. 49. 31,0	22. 21. 39,0	103. 47. 55,0	0. 25. 40	0. 24	0. 5
21	10. 40. 43,6	*Idem.*	106. 49. 31,0	22. 21. 39,0	103. 38. 4,0	0. 25. 45	0. 23	0. 10
22	10. 36. 19,3	*Idem.*	106. 49. 31,0	22. 21. 39,0	103. 35. 24,0	0. 25. 36	0. 37	0. 1
Déc. 5	14. 35. 37,0	*Idem.*	106. 50. 21,1	22. 21. 31,0	110. 18. 1,0	0. 28. 18	0. 26	0. 7
7	14. 26. 35,6	*Idem.*	106. 50. 21,1	22. 21. 31,0	110. 14. 5,0	0. 28. 18	0. 13	0. 3
9	14. 17. 36,6	α du Belier.	28. 47. 29,6	22. 26. 54,7	110. 9. 39,0	0. 28. 38	0. 32	0. 21
11	14. 8. 25,9	♌ Gémeaux	106. 50. 21,1	22. 21. 31,0	110. 5. 22,0	0. 28. 18	0. 44	0. 7
13	13. 59. 18,6	α du Bélier.	28. 47. 29,6	22. 26. 54,7	110. 1. 9,0	0. 28. 34	0. 28	0. 12

Les obſervations du mois de Janvier, donnent encore le réſultat ſuivant :

Oppoſition d'Herſchel, le 3 Janvier, à $17^h\ 39'\ 47'',3$ *temps vrai.*

Longitude en oppoſition..... $3^s\ 14^d\ 22.\ 39,0.$

Latitude en oppoſition..... 0. 2 5. 34,0 *boréale.*

On a ſuppoſé l'erreur moyenne des Tables, de 34 ſecondes ſouſtractives en longitude, & de 4 ſecondes additives en latitude.

Digitized by Google

LA LUNE.

On a déterminé, par obſervation, dix-huit lieux de la Lune: on en eût ſans doute obtenu un plus grand nombre, ſi les erreurs, dans les déclinaiſons calculées, n'avoient ſouvent fait manquer les hauteurs méridiennes, & rendu par-là les obſervations incomplètes.

1785.	TEMPS VRAI.	ÉTOILE comparée.	Poſition ſuppoſée de l'ÉTOILE.		Lieu obſervé de la LUNE.		Erreur des Tables.	
			Aſcenſ. droite.	Déclinaiſon.	Longitude.	Latitude.	En long.	En lat.
	H. M. S.		*D. M. S.*	*D. M. S.*	*D. M. S.*	*D. M. S.*	*M. S.*	*M. S.*
Janv. 22	10. 2. 48,4	β Taureau.	78. 11. 4,5	28. 24. 43,0B.	95. 55. 52,0	3. 44. 55A.	—1. 3	+0. 30
Févr. 23	11. 51. 23,0	βpet. Chien	108. 52. 53,0	8. 42. 36,0B.	154. 0. 56,0	1. 10. 17B.	—0. 49	—0. 2
27	14. 32. 23,0	λ Vierge.	211. 53. 5,0	12. 22. 34,0A.	202. 49. 44,0	4. 38. 19A.	—0. 30	+0. 1
Mai 23	11. 46. 20,5	*Antarès.*	244. 4. 29,6	25. 56. 23,0A.	241. 9. 16,0	4. 49. 20A.	—1. 5	—0. 13
26	14. 40. 7,2	π Scorpion.	236. 29. 14,2	25. 28. 59,7A.	282. 34. 20,0	2. 40. 1,5A.	+0. 5	—0. 5
27	15. 36. 29,6	ν Scorpion.	222. 53. 53,8	24. 25. 44,8A.	296. 45. 40,0	1. 31. 48A.	+0. 29	+0. 3
Juin 13	5. 14. 1,8	ε Serpent.	235. 2. 23,0	5. 7. 57,0B.	160. 27. 17,0	2. 21. 15A.	—0. 53	—0. 1
18	8. 51. 20,6	μSagittaire.	270. 14. 43,1	21. 5. 59,0A.	222. 23. 14,0	5. 8. 10,5A	—0. 40	—0. 24
Juill. 18	9. 3. 49,7	τ Sagittaire.	283. 23. 44,6	27. 57. 52,0A.	256. 25. 32,0	4. 21. 21A.	—0. 49	—0. 24
Août 20	17. 34. 28,0	β Verſeau.	320. 4. 39,1	6. 30. 7,4A.	337. 57. 16,0	2. 18. 0B.	—0. 13	—0. 14
23	15. 10. 46,1	ζ del'Aigle.	281. 53. 52,0	13. 33. 41,9B.	34. 24. 24,0	5. 0. 46B.	—0. 25	+0. 0
26	17. 59. 25,0	β Cygne.	290. 31. 34,7	27. 31. 24,0B.	88. 17. 14,0	4. 43. 0B.	—0. 37	—0. 16
Sept. 19	13. 5. 38,0	ε Dauphin.	305. 44. 56,2	10. 35. 26,2B.	16. 59. 53,0	4. 41. 4B.	—1. 0	—0. 13
Nov. 15	11. 25. 46,7	α du Bélier.	28. 47. 40,6	22. 26. 53,2B.	47. 22. 17,0	4. 55. 54B.	+0. 20	+0. 33
17	13. 32. 3,5	β Pégaſe.	344. 21. 17,8	26. 53. 40,3B.	77. 57. 55,0	3. 42. 44B.	—0. 31	+0. 0
Déc. 9	6. 27. 23,5	α ſien χ.	27. 45. 18,0	1. 43. 37,0B.	355. 29. 0,0	4. 2. 33B.	—0. 23	—0. 14
12	9. 9. 56,7	γ du Bélier.	25. 27. 28,3	18. 14. 42,4B.	40. 13. 33,0	3. 6. 52B.	—0. 19	+0. 5
13	9. 58. 57,7	Alcyone.	53. 42. 26,0	23. 26. 0,0B.	55. 21. 10,0	4. 46. 56B.	—0. 12	—0. 9

Digitized by Google

On a calculé les mêmes lieux de la Lune avec les nouvelles Tables d'Euler, publiées par M. Jeaurat, & on l'a trouvé

MOIS & JOURS.	TABLES D'EULER. Erreur. En longit.		En latitude.	
	M.	S.	M.	S.
Janvier 22	+ 0.	52	— 0.	10.
Février 23	+ 0.	27	+ 0.	22.
27	— 0.	40	+ 0.	13.
Mai 23	— 1.	4	— 0.	17.
26	+ 0.	9	— 0.	6.
27	— 0.	35	— 0.	14.
Juin 13	— 1.	19	+ 0.	7.
18	— 0.	41	— 0.	22.
Juillet 18	— 0.	40	— 0.	8.
Août 20	— 0.	9	+ 0.	18.
23	+ 0.	20	+ 0.	5.
26	— 0.	16	— 0.	14.
Sept. 19	+ 0.	20	+ 0.	15.
Nov. 15	+ 1.	17	+ 0.	28.
17	+ 0.	55	— 0.	19.
Déc. 9	+ 0.	37	— 0.	30.
12	+ 0.	2	+ 0.	18.
13	+ 0.	11	— 0.	9.

Occultations d'Étoiles par la Lune.

ETOILES éclipsées.	JOURS.	TEMPS VRAI. H.	M.	S.	
Pléïades Tayeta	11 Avril	8.	55.	10,5	Immersion.
Pléïades Dix-huit.e	11 Avril	9.	3.	28,0	Immersion.
Pléïades Maïa	11 Avril	9.	7.	27,0	Immersion.
Pléïades Asterope	11 Avril	9.	14.	16,7	Immersion.
8 d'Ophiucus	27 Avril	13.	2.	21,9	Immersion.
Idem.	27 Avril	13.	37.	19,2	Émersion.
ℓ du Sagittaire.	22 Juin	12.	7.	29,6	Immersion.
Idem.	22 Juin	13.	25.	27,2	Émersion.
* du Taureau.	26 Août	11.	54.	31,6	Émersion.
* du Sagittaire.	10 Oct.	7.	21.	21,6	Immersion.
* du Capricorne.	11 Oct.	9.	7.	50,7	Immersion.
ι des Gémeaux.	22 Oct.	11.	44.	53,8	Émersion.
* du Sagittaire.	5 Nov.	6.	10.	54,0	Immersion.
19e des Poissons.	9 Déc.	8.	27.	20,2	Immersion.
Pléïades Celeno	13 Déc.	12.	12.	1,7	Immersion.
Pléïades Maïa	13 Déc.	12.	35.	13,5	Immersion.
Pléïades *Idem.*	13 Déc.	13.	43.	22,1	Émersion.
Pléïades Seizième	13 Déc.	12.	52.	43,1	Immersion.
Pléïades Dix-septe	13 Déc.	12.	53.	6,6	Immersion.
Pléïades Taïeta	13 Déc.	13.	23.	51,5	Émersion.
Pléïades Electra	13 Déc.	13.	3.	6,8	Émersion.

Digitized by Google

Eclipſes des Satellites de Jupiter.

PREMIER SATELLITE.

MOIS & JOURS.	TEMPS VRAI. H.	M.	S.		CIRCONSTANCES.
Janv. 7	6.	58.	20,0	Émerſion	près de l'horizon.
23	5.	13.	18,5	Émerſion	bandes aſſez term. un peu jour.
Août 7	14.	1.	34,9	Émerſion	temps très-favorable.
23	12.	20.	31,8	Immerſion	à travers un nuage léger.
Sept. 1	8.	45.	18,6	Immerſion	aſſez beau temps.
Oct. 1	11.	0.	53,7	Immerſion	un peu de vapeurs.
10	9.	37.	26,8	Émerſion	temps ſuperbe.
26	7.	58.	44,6	Émerſion	légères vapeurs.
Nov. 2	9.	53.	54,4	Émerſion	aſſez beau temps.
9	11.	49.	8,0	Émerſion	beau ciel.
11	6.	17.	48,7	Émerſion	quelques vapeurs.
16	13.	43.	44,0	Émerſion	beaucoup de vapeurs.
Déc. 4	6.	27.	31,0	Émerſion	un peu tard à cauſe des nuages

DEUXIÈME SATELLITE.

Août 23	15.	10.	38,5	Immerſion	aſſez beau temps.
Oct. 12	12.	19.	5,9	Émerſion	beau temps, mais grand vent.
Nov. 6	9.	32.	17,7	Émerſion	temps favorable.
13	12.	8.	57,0	Émerſion	brouillard épais.
Déc. 1	6.	36.	3,0	Émerſion	beaucoup de vapeurs.

TROISIÉME SATELLITE.

Août 11	10.	24.	33,0	Émerſion	vapeurs de temps en temps.
Oct. 29	6.	47.	47,9	Émerſion	légères vapeurs.
Nov. 5	8.	35.	24,8	Immerſion	aſſez beau temps.
5	10.	48.	18,4	Émerſion	*idem*.

QUATRIÉME SATELLITE.

Août 23	13.	1.	18,0	Immerſion	nuages légers.

Digitized by Google

Occultation de Vénus par la Lune.

Cette observation a été secondée par le temps le plus favorable.

	Temps vrai.	
12 Avril 1785	0h 1′ 39″,9	le bord obscur de la Lune, mord sur le bord éclairé de Vénus.
	0. 1. 59,9	immersion de la corne australe de Vénus.
	0. 3. 10,9	immersion de la corne boréale.
	0. 50. 26,9	émersion du bord éclairé de Vénus, de dessous le bord éclairé de la Lune.
	0. 50. 48,0	émersion de la corne boréale de Vénus.
	0. 52. 6,9	la corne australe de Vénus est détachée du bord éclairé de la Lune.

Comètes.

Il a paru cette année deux Comètes, qui ont été découvertes à l'Observatoire royal, par M. Méchain, Astronome de la Marine, & de l'Académie Royale des Sciences, l'une le 7 Janvier, l'autre le 11 Mars: nous ne les avons point observées, tant parce que nous avons préféré de suivre, sans interruption, le cours des autres Planètes, que parce que la position défavorable de ces Comètes auroit nécessité de transporter nos instrumens d'un bout à l'autre de l'Observatoire.

Voici les élémens de leurs orbites, tels que M. Méchain les a calculés.

	Première Comète.	*Seconde Comète.*
Lieu du nœud ascendant.....	8s 24d 12′ 5″	2s 4d 44′ $\frac{5}{6}$.
Inclinaison de l'orbite.....	70. 14. 12	87. 7.
Lieu du périhélie.....	3. 19. 51. 56	9. 27. 34,5.
Passage au périhélie, temps moyen.	27 Janv. 7h 58 4	8 Avril 11h 29′
Logarithme de la distance périhélie.	0,0581975	9,631024.
Sens du mouvement.....	direct.	

Digitized by Google

La première de ces Comètes a été obſervée depuis le 7 Janvier juſqu'au 7 Février; elle n'a jamais été aperçue à la vue ſimple. La ſeconde n'étoit viſible qu'avec le ſecours des lunettes, dans le commencement de ſon apparition, & n'avoit qu'une chevelure; mais le 31 Mars elle a paru avec une queue de 7 à 8 degrés, qui a augmenté juſqu'au 16 Avril, dernier jour où il fut poſſible de l'obſerver à Paris.

TABLE de la déclinaiſon de pluſieurs Étoiles, déduite de leur hauteur méridienne, obſervée au quart-de-cercle mobile, en 1785.

MOIS & JOURS.	ÉTOILES.	NOMBRE d'Obſervations.	HAUTEUR OBSERVÉE. D. M. S.	DÉCLINAISON MOYENNE le 1er Janvier 1786. D. M. S.
Mars 7	α d'Orion	2	48. 31. 43,2	7. 21, 4 B.
Déc. 10	*Idem.*	2	48. 31. 49,4	
Oct. 13	α Perſée	2	90. 14. 54,5	49. 5. 0 B.
Nov. 17	*Idem.*	4	90. 14. 49,7	
Avril 23	α Vierge	4	31. 9. 13,8	10. 2. 11 A.
Août 20	α Flèche	4	58. 42. 21,9	17. 31. 58 B.
Sept. 14	*Idem.*	2	58. 42. 27,8	
Avril 28	α Couronne	3	68. 37. 1,5	27. 26. 43 B.
Mai 19	α Balance	3	26. 3. 15,5	15. 8. 23 A.
Oct. 25	α Baleine	4	44. 25. 22,8	3. 14. 24 B.
Oct. 27	α Lien	4	42. 54. 31,2	
Nov. 8	*Idem.*	2	42. 54. 30,0	1. 43. 30 B.
Déc. 10	*Idem.*	2	42. 54. 30,5	
Oct. 23	α Bélier	9	63. 36. 55,9	
Nov. 12	*Idem.*	7	63. 36. 59,5	22. 26. 32 B.
Déc. 11	*Idem.*	4	63. 36. 62,1	

Digitized by Google

Suite de la Table de déclinaiſon, &c.

MOIS & JOURS.	ÉTOILES.	NOMBRE d'Obſervations.	HAUTEUR OBSERVÉE.	DÉCLINAISON MOYENNE le 1.er Janvier 1786.
			D. M. S.	D. M. S.
Avril 25	Arcturus	5	61. 28. 35,4	
Mai 20	*Idem.*	2	61. 28. 33,1	20. 18. 13 B.
Juin 23	*Idem.*	3	61. 28. 35,0	
Juin 3	Antarès	2	15. 16. 40,8	25. 56. 33 A.
Mars 11	Regulus	4	54. 11. 3,5	13. 0. 26,8 B.
Mars 5	Syrius	3	24. 45. 43,8	
Nov. 6	*Idem.*	2	24. 46. 11,3	16. 26. 4 A.
Déc. 9	*Idem.*	3	24. 46. 6,4	
Avril 27	β Cygne	3	68. 41. 28,3	27. 31. 15 B.
Juin 22	β Ophiucus	1	45. 50. 48,0	4. 40. 12 B.
Août 5	*Idem.*	3	45. 50. 58,5	
Mai 5	β Lion	4	56. 56. 45,2	15. 46. 14 B.
Mai 20	β d'Hercule	2	63. 8. 14,0	21. 58. 3 B.
Juin 25	*Idem.*	2	63. 8. 17,3	
Juin 17	β Scorpion	4	21. 59. 49,0	19. 12. 16 A.
Juin 22	β Serpent	4	57. 16. 33,8	16. 6. 8 B.
Nov. 22	β Pégaſe	3	68. 5. 56,7	26. 55. 32 B.
Déc. 12	*Idem.*	4	68. 5. 59,0	
Avril 13	γ Corbeau	3	24. 50. 51,0	16. 21. 3 A.
Août 27	γ Aigle	6	51. 16. 48,4	10. 6. 12 B.
Juin 15	γ Ophiucus	4	43. 58. 49,2	2. 48. 10 B.
Juin 15	γ d'Hercule	4	60. 50. 15,4	19. 39. 59 B.
Juillet 24	*Idem.*	2	60. 50. 23,9	
Oct. 14	γ Baleine	4	43. 30. 34,9	2. 19. 37 B.
Nov. 25	γ Pégaſe	4	55. 10. 17,6	13. 59. 39 B.
Déc. 12	*Idem.*	2	55. 10. 15,0	
Déc. 5	γ Lièvre	4	18. 41. 9,8	22. 31. 42 A.

Suite

Digitized by Google

Suite de la Table de déclinaison, &c.

MOIS & JOURS.	ÉTOILES.	NOMBRE d'Observations.	HAUTEUR OBSERVÉE. D. M. S.	DÉCLINAISON MOYENNE le 1.er Janvier 1786. D. M. S.
Janv. 19	♑ Gémeaux	4	63. 32. 5,4	22. 21. 49 B.
Mars 9	*Idem.*	7	63. 32. 4,4	
Déc. 7	*Idem.*	3	63. 31. 56,7	
Janv. 16	♑ Baleine	4	40. 34. 28,2	0. 36. 2 A.
Avril 26	♑ Lion	3	62. 52. 10,3	21. 41. 42 B.
Nov. 22	♑ d'Orion	4	40. 42. 53,0	0. 28. 4 A.
Déc. 8	*Idem.*	5	40. 42. 48,5	
Avril 22	ε Vierge	3	53. 17. 15,1	12. 6. 42 B.
Oct. 27	ε d'Orion	3	39. 50. 4,4	1. 21. 6 A.
Déc. 8	μ Baleine	3	29. 52. 26,5	11. 19. 8 A.
Juillet 26	μ Sagittaire	6	20. 6. 25,0	21. 5. 50 A.
Oct. 29	ζ d'Orion	4	39. 7. 3,5	2. 4. 9 A.
Mai 12	ζ Vierge	5	41. 41. 8,8	0. 30. 6 B.
Nov. 21	ζ Taureau	3	62. 10. 18,1	20. 59. 53 B.
Déc. 6	*Idem.*	5	62. 10. 18,5	
Déc. 8	ζ Gémeaux	2	62. 2. 26,0	20. 52. 5 B.
Avril 5	ζ Lion	2	65. 39. 5,2	24. 28. 40 B.
Août 25	θ Serpent	5	45. 7. 4,0	3. 56. 18 B.
Mai 30	υ Scorpion	4	22. 18. 40,6	18. 53. 27 A.

Le quart-de-cercle mobile de 6 pieds, avec lequel nous avons observé toutes les hauteurs méridiennes des Étoiles & des Planètes, pendant le cours de l'année 1785, est le même instrument qui nous a servi à déterminer l'obliquité de l'Écliptique, par une suite non interrompue de quarante

années d'obſervations des hauteurs du Soleil dans le Solſtice. Le réſultat que nous avons trouvé, n'étant pas le même que celui qu'ont établi pluſieurs Aſtronomes, nous avons penſé qu'il ſeroit intéreſſant de rapporter ici les hauteurs méridiennes des principales Étoiles, telles que notre inſtrument nous les a données, ainſi que la déclinaiſon moyenne qui en réſulte, afin d'établir par-là une comparaiſon directe entre notre inſtrument & ceux des autres Obſervatoires.

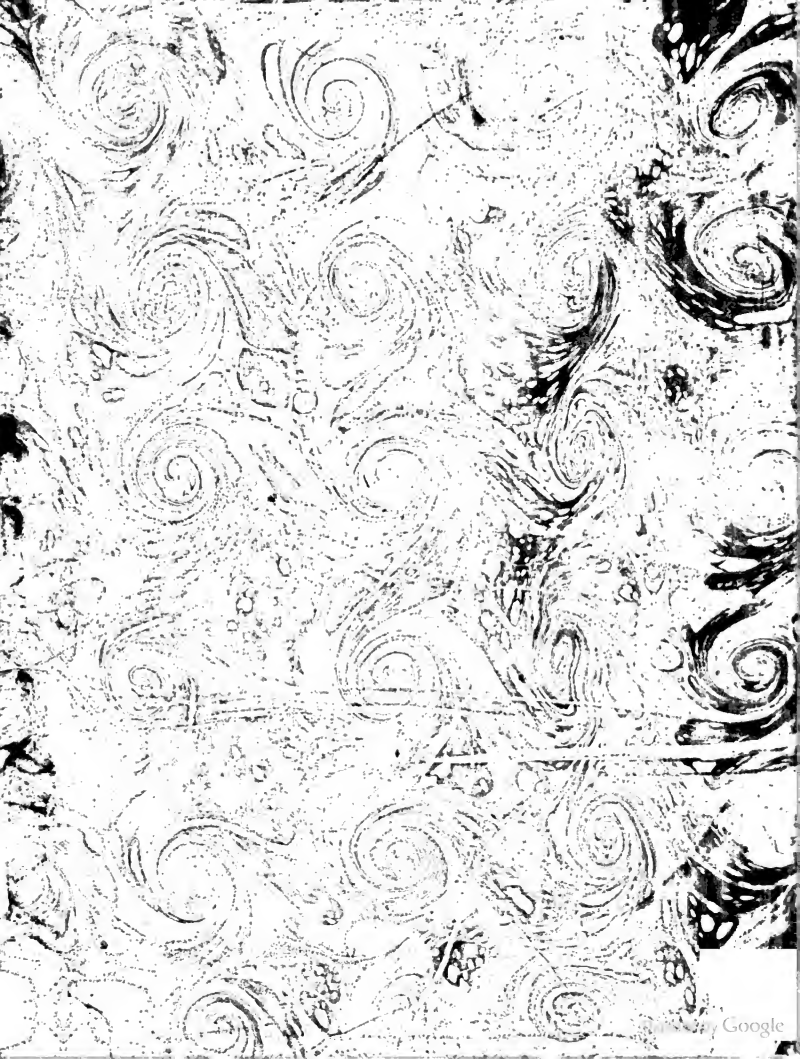
Nota. La troiſième colonne renferme le nombre des obſervations entre leſquelles on a pris un milieu, pour réduire au jour moyen entre ceux où l'on a obſervé, la hauteur rapportée dans la quatrième colonne; cette hauteur n'eſt corrigée que de l'erreur de la diviſion & de la lunette de l'inſtrument : pour en déduire la déclinaiſon moyenne, compriſe dans la cinquième colonne, on a employé les Tables des réfractions rapportées dans l'Aſtronomie de M. de la Lande, les Tables d'aberration & de nutation de la Connoiſſance des Temps, *année 1781*, & l'on a ſuppoſé la hauteur de l'Équateur de $41^{d}\ 9'\ 46''$.

FIN.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google


Digitized by Google